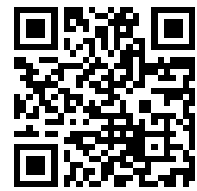
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

B 1,063,706

Digitized by Google

Library of the University of Michigan

Bought with the income

of the

Ford-Messer

Bequest

Digitized by Google

Q
54
.A16

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME SESSANTATREESIMO

1927-1928

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

Libreria FRATELLI BOCCA

Via Carlo Alberto, 3.

1928

Digitized by Google

Torino — Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona

Digitized by Google

Q
1.54
4.68

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIII, DISP. 1ª, 2ª E 3ª, 1927-1928

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1928

Digitized by Google

DISTRIBUZIONE DELLE ADUNANZE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1927-928

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1927 - 6 novembre	1927 - 13 novembre
» - 20 »	» - 27 »
» - 4 dicembre	» - 11 dicembre
» - 18 »	1928 - 8 gennaio
1928 - 15 gennaio	» - 22 »
» - 29 »	» - 5 febbraio
» - 12 febbraio	» - 19 »
» - 26 »	» - 4 marzo
» - 11 marzo	» - 18 »
» - 25 »	» - 1 aprile
» - 15 aprile	» - 22 »
» - 29 »	» - 6 maggio
» - 13 maggio	» - 20 »
» - 27 »	» - 10 giugno
» - 17 giugno	» - 24 »

Digitized by Google

2-26-47
H1125

PRESIDENTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

dalla sua fondazione

ELEZIONE	PRESIDENTI PERPETUI (*)
1783, 25 luglio	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Giuseppe Angelo). Offrì le dimissioni dalla carica e furono accettate (7 settembre 1788) conferendogli il titolo di *Presidente emerito.*
» »	**La Grange Tournier** (Giuseppe Luigi), *Onorario.*
1788, 30 novembre	**Morozzo di Bianzé** (conte Carlo Lodovico).
1801, 24 gennaio (4 piovoso a. IX)	**Saluzzo** (cittad. Angelo Giuseppe) ex-conte di Monesiglio.
1801, 15 febbraio	Col Regolamento del 26 piovoso anno IX (15 febbr. 1801) essendosi stabilito che l'Accademia Nazionale rinnovata col *Decreto della Commissione esecutiva del Piemonte* del 22 nevoso anno IX (17 gennaio 1801) non avesse più che due presidenti di classe, cessarono queste funzioni del Saluzzo.
1804, 25 febbraio (5 ventoso a. XII)	**Bonaparte** (Napoleone) primo console della Repubblica Francese, *Onorario.*
1815, 25 novembre	**Balbo di Vinadio** (conte Prospero).
1837, 26 »	**Lascaris di Ventimiglia** (marchese Agostino).
1838, 18 »	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Alessandro).
1851, 18 dicembre	**Plana** (barone Giovanni).
1864, 1° maggio	**Sclopis di Salerano** (conte Federigo).

(*) Dal volume *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783-1883).* Torino, 1883, pag. 141.

Digitized by Google

ELEZIONE	PRESIDENTI TRIENNALI (*)
1879, 9 marzo	**Ricotti** (Ercole).
1882, 12 febbraio	**Ricotti** (Ercole) rieletto.
1883, 6 maggio	**Fabretti** (Ariodante).
1885, 12 aprile	**Genocchi** (Angelo).
1888, 8 „	**Genocchi** (Angelo) rieletto.
1889, 28 „	**Lessona** (Michele) termina il 2° triennio iniziato dal GENOCCHI.
1891, 24 maggio	**Lessona** (Michele).
1894, 24 giugno	**Lessona** (Michele) rieletto, † 20 luglio 1894.
1895, 13 gennaio	**Carle** (Giuseppe).
1898, 9 „	**Carle** (Giuseppe) rieletto.
1901, 13 „	**Cossa** (Alfonso) † 23 ottobre 1902.
1902, 14 dicembre	**D'Ovidio** (Enrico) termina il triennio iniziato dal COSSA.
1904, 21 febbraio	**D'Ovidio** (Enrico).
1907, 17 marzo	**D'Ovidio** (Enrico) rieletto.
1910, 24 aprile	**Boselli** (Paolo).
1913, 18 maggio	**Boselli** (Paolo) rieletto.
1916, 28 „	**Camerano** (Lorenzo) † 22 novembre 1917.
1918, 3 febbraio	**Naccari** (Andrea) continua il triennio iniziato dal CAMERANO.
1919, 27 aprile	**Naccari** (Andrea) † 2 ottobre 1926.
1922, 7 maggio	**Ruffini** (Francesco).
1925, 3 „	**Ruffini** (Francesco) rieletto.

(*) A norma dell'art. 3 dello *Statuto della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, approvato con R. Decreto 2 febbraio 1882, il Presidente dura in carica un triennio e può essere rieletto per un altro triennio.

Digitized by Google

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1927

NB. — *Negli elenchi degli Accademici la prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Ruffini (Francesco), Senatore del Regno, Professore stabile di diritto ecclesiastico nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Grand' Uff. ✱ e ⊞. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

Rieletto alla carica il 3 maggio 1925 per il triennio dal 20 aprile 1925 al 19 aprile 1928 (R. D. 2 luglio 1925).

VICE-PRESIDENTE

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), Professore stabile di Geologia nella R. Università di Torino, già Rettore della R. Università. Comm. ✱ e ⊞. — *Torino, Via Bonafous, 5.*

Rieletto alla carica il 3 maggio 1925 per il triennio dal 20 aprile 1925 al 19 aprile 1928 (R. D. 2 luglio 1925).

TESORIERE

Panetti (Modesto), Professore stabile di meccanica applicata alle macchine e di Costruzioni Aeronautiche nel R. Politecnico di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✱ e ⊞. — *Corso Peschiera, 30.*

Eletto alla carica il 15 novembre 1925 per il triennio dal 1° luglio 1925 al 30 giugno 1928 (R. D. 13 dicembre 1925).

Digitized by Google

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Somigliana (nob. Carlo), Professore stabile di Fisica matematica nella R. Università di Torino, Preside della Facoltà di Scienze, ✱ e Comm. ▭. — *Corso Vinzaglio, 75.*

Rieletto alla carica il 15 novembre 1925 per il triennio dall'11 giugno 1925 al 10 giugno 1928 (R. D. 13 dicembre 1925).

Segretario

Mattirolo (Oreste), Professore stabile di Botanica nella R. Università di Torino, ✱ e Gr. Uff. ▭, Uff. del Merito agricolo di Francia. — *Torino, Orto Botanico (al Valentino).*

Rieletto alla carica il 15 novembre 1925 per il triennio dall'11 giugno 1925 al 10 giugno 1928 (R. D. 13 dicembre 1925).

ACCADEMICI RESIDENTI

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Professore emerito di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✱ e ▭. — *Torino, Corso Peschiera, 30.*

29 dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Peano (Giuseppe), Professore stabile di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, ✱ e Comm. ▭. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*

25 gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Guidi (Camillo), Professore stabile di Statica grafica e Scienza delle costruzioni, Uff. ✱, Gr. Uff. ▭. — *Torino, Corso Valentino, 7.*

31 maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), *predetto.*

15 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), *predetto.*

10 marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Digitized by Google

Grassi (Guido), Professore emerito di Elettrotecnica nella R. Scuola d'ingegneria di Torino, Uff. ✱, Comm. ⊛. — *Torino, Via Ettore De Sonnaz, 7.*
9 febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), *predetto.*
5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Panetti (Modesto), *predetto.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 27 aprile 1919.

Ponzio (Giacomo), Professore stabile di chimica generale nella R. Università di Torino, ⊛. — *Torino, Corso Massimo d'Azeglio, 48.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 28 ottobre 1923.

Sacco (Federico), Prof. stabile di Geologia applicata nella R. Scuola d'Ingegneria e Prof. di Paleontologia nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ⊛. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele II, 18.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 19 maggio 1924.

Majorana (Quirino), Professore stabile di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna, Comm. ✱ e ⊛. — *Bologna, Via Irnerio, 46.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 1° marzo 1925.

Herlitzka (Amedeo), Professore stabile di Fisiologia nella R. Università di Torino, ⊛. — *Torino, Via Pietro Toselli, 1.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Pochettino (Alfredo), Professore stabile di Fisica sperimentale e Rettore della R. Università di Torino, ✱ e ⊛. — *Torino, Via Giuria, 1.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Boggio (Tommaso), Prof. stabile di Meccanica superiore nella R. Università di Torino, ✱, Comm. ⊛, Lauréat de l'Académie des sciences de Paris. — *Torino, Via Ottavio Revel, 5.*
17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Garelli (Felice), Prof. di chimica tecnologica e Direttore della R. Scuola d'ingegneria di Torino, Comm. ⊛. — *Torino, Corso Duca di Genova, 1.*
17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Pierantoni (Umberto), Professore stabile di Anatomia e fisiologia comparate nella R. Università di Napoli. — *Napoli, Galleria Umberto I, 27.*
17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Repossi (Emilio), Professore stabile di Mineralogia nella R. Università di Torino. — *Torino, Via Cibrario, 61.*
22 marzo 1925 - 7 maggio 1925.

Savoia (S. A. R. il Principe Luigi Amedeo di) Duca degli Abruzzi. — *Torino, Via Maria Vittoria, 12.*
6 marzo 1927 - 7 aprile 1927.

Digitized by Google

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Professore stabile di Fisica matematica nella R. Univ. di Roma, ✠, ✱, Gr. Cord. ✠, Croce di Guerra. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895.

Bianchi (Luigi), Senatore del Regno, Professore stabile di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, ✠, ✱, ✠. — *Pisa, Viale Giovanni Pisano, 15.*
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Bertini (Eugenio), Professore emerito della R. Università di Pisa, Uff. ✱, Comm. ✠. — *Pisa, Lungarno Mediceo, 7.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Pirotta (Pietro Romualdo), Professore stabile di fisiologia vegetale nella Università di Roma, ✠, Gr. Uff. ✠. — *Roma (3), Via Milano, 75, Istituto Botanico.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Rosa (Daniele), Professore stabile di Zoologia ed anatomia comparata nella R. Università di Modena, ✠. — *Modena, R. Università.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Zambonini (Ferruccio), Professore stabile di chimica generale nella R. Università di Napoli. — *Napoli, Via Mezzocannone A.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922

Levi-Civita (Tullio), Professore stabile di meccanica razionale nella R. Università di Roma, ✠. — *Roma, Via Sardegna, 50.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Cantone (Michele), Professore stabile di fisica sperimentale nella R. Università di Napoli, ✠, Comm. ✠. — *Napoli, Via Duomo, 305.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Digitized by Google

ACCADEMICI STRANIERI

Thomson (John Joseph), Professore nella Università di Cambridge. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Rutherford (Sir Ernesto), Professore di fisica sperimentale nell'Università di Cambridge.
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Hale (Giorgio), Astronomo. — *Pasadena, Mount Wilson Observatory (California).*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Picard (Emilio), Segretario perpetuo per le scienze matematiche dell'Accademia delle Scienze di Parigi. — *Parigi (6), Quai Conti, 25.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Michelson (Alberto), Professore di fisica nell'Università di Chicago. — *Chicago, Kimbark Avenue, 5756.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Lorentz (Enrico), Professore di fisica teoretica nell'Università di Leida. — *Harlem, Juliana straat, 49.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Digitized by Google

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 aprile 1898.
Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 giugno 1903.
Enriques (Federico), Prof. nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.
Berzolari (Luigi), Professore nella R. Università di Pavia. — 24 febbr. 1918.
Marcolongo (Roberto), Professore nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Pincherle (Salvatore), Professore nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Severi (Francesco), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Appell (Paul Emile), Professore di meccanica analitica alla Sorbona, Parigi. — 11 giugno 1922.
Borel (Emile), Professore di calcolo delle probabilità e di fisica matematica, Parigi. — Id. id.
Loria (Gino), Professore di geometria superiore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Study (Eduard), Professore di matematiche nell'Università di Bonn. — Id. id.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di Edinburg. — 27 maggio 1894.
Boussinesq (Valentino), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nella Università di Parigi. — 15 maggio 1910.
Albenga (Giuseppe), Professore nella R. Università di Bologna. — 24 febbraio 1918.
Colonnetti (Gustavo), Professore nel R. Politecnico di Torino, — Id. id.
Maggi (Gian Antonio), Professore nella R. Università di Milano. — Id. id.
Mesnager (Agostino), Professore nella Scuola Nazionale dei Ponti e Strade, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 29 dicembre 1918.
Fantoli (Gaudenzio), Professore di idraulica nel R. Istituto tecnico superiore di Milano. — 11 giugno 1922.

Digitized by Google

Planck (Max), Professore di fisica matematica nell'Università di Berlino. — 11 giugno 1922.

Prandtl (Ludwig), Professore di meccanica applicata nell'Università di Gottinga. — Id. id.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Garbasso (Antonio), Professore nella R. Università di Firenze. — 15 maggio 1910.

Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.

Corbino (Orso Mario), Professore nella R. Università di Roma. — 24 febbraio 1918.

Lombardi (Luigi), Professore nel R. Politecnico di Roma. — Id. id.

Marconi (Guglielmo), Senatore del Regno, Dottore in scienze, Londra. — Id. id.

Palazzo (Luigi), Direttore del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, Roma. — Id. id.

Rizzo (Giovanni Batt.), Professore di fisica terrestre nella R. Università di Messina. — 11 giugno 1922.

Bragg (W. H.), Professore di fisica nel Collegio Universitario di Londra. — Id. id.

Perrin (Jean), Professore di chimica-fisica alla Sorbona, Parigi. — Id. id.

Laue (Max von), Professore di fisica teoretica nell'Università di Berlino. — Id. id.

Amerio (Alessandro), Professore di fisica sperimentale nella R. Università di Messina. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 gennaio 1881.

Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 marzo 1905.

Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.

Angeli (Angelo), Professore nella R. Università di Firenze. — 24 febbraio 1918.

Le Chatelier (Enrico Luigi), dell'Istituto di Francia, Parigi. — Id. id.

Nasini (Raffaele), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Piutti (Arnaldo), Professore nella R. Università di Napoli. — Id. id.

Bruni (Giuseppe), R. Politecnico di Milano. — 15 giugno 1919.

Digitized by Google

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 marzo 1905.
Suess (Franc. Edoardo), Professore nella "Deutsche Technische Hochschule" di Praga. - Landesgerichtsstrasse 12, Vienna 1. — Id. id.
Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.
Artini (Ettore), Professore e Direttore del Museo Civico di Storia Naturale di Milano. — 24 febbraio 1918.
Brugnatelli (Luigi), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Dal Piaz (Giorgio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.
Day (Arturo L.), Direttore del Laboratorio geo-fisico dell'Istituzione Carnegie, Washington, D. C. — 11 giugno 1922.
Washington (Enrico Stefano), Laboratorio geo-fisico di Washington. — Id. id.
Franchi (Secondo), Ingegnere, Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.
Gortani (Michele), Professore di geologia nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Novarese (Vittorio), Ingegnere, Professore; Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Mangin (Luigi), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.
De Vries (Ugo), Professore nella Università di Amsterdam. — 13 genn. 1918.
Bower (Federico Orpen), Professore nella Università di Glasgow. — 24 febbraio 1918.
Chodat (Roberto), Professore di botanica nell'Università di Ginevra. — 25 giugno 1922.
Longo (Biagio), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Pisa. — Id. id.
Gola (Giuseppe), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Padova. — Id. id.
Bois (Desiderato), Professore nel Museo di storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Boulenger (Giorgio Alberto), Giardino botanico dello Stato, Bruxelles. — 28 gennaio 1900.
Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 giugno 1903.

Digitized by Google

Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — 5 marzo 1905.

Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell'Università di Madrid. — 15 maggio 1910.

Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.

Albertoni (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella Università di Bologna. — 24 febbr. 1918.

Bovero (Alfonso), Professore alla Facoltà di Medicina, S. Paolo del Brasile. — Id. id.

Chiarugi (Giulio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di Perfezionamento di Firenze. — Id. id.

Vialleton (L.), Professore di Anatomia Microscopica, Montpellier. — Id. id.

Bottazzi (Filippo), Professore di fisiologia sperimentale nella R. Università di Napoli. — 11 giugno 1922.

Cesaris-Demel (Antonio), Professore di anatomia patologica nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Gley (E.), Prof. di biologia generale nel *Collège de France*, Paris. — Id. id.

Richet (Charles), Professore di fisiologia nell'Università di Parigi. — Id. id.

Sherrington (Ch. S.), Professore di fisiologia nell'Università di Oxford. — Id. id.

Digitized by Google

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

De Sanctis (Gaetano), Professore stabile di Storia antica nella R. Università di Torino, Presidente della Unione Accademica Internazionale, ✱, Gr. Uff. ⊞, Cav. Gr. Cr. del S. M. O. del Santo Sepolcro. — *Torino, Corso Vittorio Em., 44.*

Rieletto alla carica il 3 maggio 1925 per il triennio dal 20 aprile 1925 al 19 aprile 1928 (R. D. 2 luglio 1925).

Segretario.

Vidari (Giovanni), Professore stabile di Pedagogia nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✱ e ⊞. — *Torino, Via Valeggio, 15.*

Rieletto alla carica il 3 maggio 1925 per il triennio dal 20 aprile 1925 al 19 aprile 1928 (R. D. 2 luglio 1925).

ACCADEMICI RESIDENTI

Boselli (S. E. Paolo), Senatore del Regno, Socio effettivo dei Lincei, Primo Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano, ecc., Cav. Ord. Supr. SS. Annunziata, ✠, Gr. Cord. ✱ e ⊞. — *Torino, Piazza Maria Teresa, 3.*

15 gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*

21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), *predetto.*

21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), Professore stabile di Letteratura latina nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✱ e Gran Croce e Gran Cordone ⊞. — *Piazza Vittorio Veneto, 10.*

20 maggio 1906 - 7 giugno 1906. — Pensionato 24 gennaio 1915.

Brondi (Vittorio), Senatore del Regno, Professore stabile di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore della P. I., Gr. Uff. ✱ e ⊞. — *Torino, Via Montebello, 26.*

17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907. — Pensionato 4 febbraio 1917.

Digitized by Google

Einaudi (Luigi), Senatore del Regno, Professore stabile di Scienza delle finanze e Diritto finanziario nella R. Università di Torino, Comm. ⊛. — *Torino, Via La Marmora, 60.*

10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato 13 dicembre 1917.

Schiaparelli (Ernesto), Senatore del Regno, Direttore del R. Museo di Antichità in Torino, Uff. ✱, Comm. ⊛. — *Torino, Corso Oporto, 40.*

10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato 11 luglio 1918.

Patetta (Federico), Professore stabile di Storia del Diritto italiano nella R. Università di Torino, ✱, Comm. ⊛. — *Via S. Massimo, 44.*

3 maggio 1914 - 11 giugno 1914. — Pensionato 27 ottobre 1918.

Vidari (Giovanni), *predetto.*

31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 23 febbraio 1920.

Prato (Giuseppe), Professore stabile di Economia politica nel R. Istituto superiore di Studi commerciali di Torino, ⊛. — *Via Giuseppe Galliano, 21.*

31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 30 dicembre 1920.

Clan (Vittorio), Professore stabile di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Deputato al Parlamento, Comm. ⊛. — *Piazza Statuto, 4.*

20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 2 ottobre 1922.

Pacchioni (Giovanni), Professore stabile di diritto civile nella R. Università di Milano, ⊛. — *Milano* (33), *Via Fratelli Bronzetti, 28.*

20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 7 ottobre 1923.

Faggi (Adolfo), Professore stabile di Storia della filosofia nella R. Università di Torino, Comm. ⊛. — *Torino, Via Vassalli Eandi, 3.*

18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920. — Pensionato, 3 ottobre 1926.

Luzio (Alessandro), Sovrintendente del R. Archivio di Stato di Torino, ✠, ✱, Comm. ⊛. — *Via Principe Tommaso, 4.*

18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920.

Mosca (Gaetano), Senatore del Regno, Professore stabile di storia delle istituzioni e delle dottrine politiche nella R. Università di Roma, Comm. ✱, Gr. Uff. ⊛. — *Roma (36), Via Piero Antonio Micheli, 18.*

18 gennaio 1920 — 12 febbraio 1920.

Jannaccone (Pasquale), Professore stabile di statistica nella R. Università di Torino, Comm. ⊛. — *Torino, Via Principe Tommaso, 39.*

28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

Solari (Gioele), Professore stabile di filosofia del diritto nella R. Università di Torino. — *Torino, Via Maria Vittoria, 3.*

23 dicembre 1923 - 24 gennaio 1924.

Bertoni (Giulio), Professore stabile di filologia romanza, Comm. ⊛. — *Torino, Via Principe Amedeo, 34.*

31 gennaio 1926 - 21 febbraio 1926.

Rondolino (Ferdinando), Dottore di leggi. — *Torino, Via Bogino, 16.*

31 gennaio 1926 - 21 febbraio 1926.

Digitized by Google

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Professore stabile di Diritto romano nella R. Università di Roma, ✠, Gr. Cr. ❋ e ⊞. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Senatore del Regno, Professore emerito di Lingue e Letterature neo-latine nella R. Università di Firenze, ✠, Gr. Uff. ❋ e ⊞. — *Firenze (22), Piazza d'Azeglio, 13.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Guidi (Ignazio), Senatore del Regno, Professore emerito di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, ✠, Uff. ❋ Gr. Uff. ⊞, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Sabbadini (Remigio), Professore emerito di Lingua e Letteratura latina nella R. Università di Milano, Comm. ⊞. — *Pisa, Via Fibonacci, 19.*
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Salandra (S. E. Antonio), Deputato al Parlamento, Professore stabile di Diritto amministrativo nella R. Università di Roma, Socio straniero dell'Istituto di Francia, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di scienze morali e politiche e dell'Accademia Pontoniana di Napoli. Cavaliere dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, ✠, Gr. Cr. ❋ e ⊞, ecc. — *Roma, Via Girolamo Fracastoro, 7.*
22 dicembre 1918 - 12 gennaio 1919.

Digitized by Google

ACCADEMICI STRANIERI

Nolhac (Pietro de), Professore nell'École pratique des hautes études di Parigi.
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Hauvette (Enrico), Professore di lingua e letteratura italiana alla Sorbona, Parigi.
28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nella Scuola Politecnica di Parigi. — 15 marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Senatore del Regno, Professore emerito della R. Università di Napoli. — Id. id.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.
Gentile (Giovanni). Prof. nella R. Università di Roma. — 17 maggio 1914.
Martinetti (Pietro). Prof. nella R. Università di Milano. — Id. id.
Bergson (Enrico Luigi), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.
Varisco (Bernardino), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Brandileone (Francesco), Professore nella R. Università di Roma. — 10 giugno 1906.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Montalcini (Camillo), Prof., Segretario generale degli uffizi amministrativi della Camera dei Deputati. — 17 maggio 1914.

Digitized by Google

Ranelletti (Oreste), Professore nella R. Univ. di Milano. — 23 giugno 1918.
Romano (Santi), Professore di diritto costituzionale nella R. Università di Milano. — 28 maggio 1922.
Sella (Emanuele), Professore di economia politica nella R. Università di Genova. — Id. id.
Dallari (Gino), Professore di filosofia del diritto nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Scienze Storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 marzo 1886.
Venturi (Adolfo), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 31 maggio 1908.
Meyer (Edoardo), Prof. nell'Università di Berlino. — 17 maggio 1914.
Lippi (Silvio), Direttore dell'Archivio di Stato di Cagliari. — Id. id.
Pareti (Luigi), Professore di storia antica nella R. Uiversità di Firenze. — 28 maggio 1922.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Orsi (Paolo), Dirett. del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Halbherr (Federico), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Marucchi (Orazio), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Paribeni (Roberto), Direttore del Museo Nazionale Romano (delle Terme). — Id. id.
Breccia (Evaristo), Direttore del Museo Greco-Romano di Alessandria di Egitto. — 28 maggio 1922.

Sezione di Geografia.

Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Univ. di Torino. — 31 maggio 1908.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Nallino (Carlo Alfonso), Professore nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Vacca (Giovanni), Professore di storia e geografia dell'Asia orientale nella R. Università di Roma — 28 maggio 1922.
Levi Della Vida (Samuele Giorgio), Professore di lingue semitiche nella R. Università di Roma. — Id. id.

Digitized by Google

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio alle Querce in Firenze. — Id. id.
Vitelli (Gerolamo), Senatore del Regno, Professore emerito nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.
Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Università di Milano. — 26 febbraio 1911.
Rostagno (Enrico), Bibliotecario della Mediceo-Laurenziana di Firenze. — 23 giugno 1918.
Barbi (Michele), Professore nel R. Istituto super. di magist. di Firenze (Taviano Pistoiese). — Id. id.
Galletti (Alfredo), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Scherillo (Michele), Senatore del Regno, Professore di letteratura italiana presso la Università di Milano. — 28 maggio 1922.
Bassi (Domenico), Direttore dell'officina dei Papiri presso la Biblioteca nazionale di Napoli. — 28 maggio 1922.
Sanesi (Ireneo), Professore di letteratura italiana nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Romagnoli (Ettore), Professore di letteratura greca nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Bignone (Ettore), Professore di letteratura greca nella R. Università di Palermo. — Id.

Digitized by Google

Mutazioni avvenute nel Corpo Accademico

dal 1° gennaio al 31 dicembre 1927

ELEZIONI

Somigliana (prof. Carlo), riconfermato rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico in seduta a Classi unite del 13 febbraio 1927.

Savoia (S. A. R. il principe Luigi Amedeo di) Duca degli Abruzzi, eletto Socio nazionale residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nella seduta del 6 marzo 1927 (R. D. di approvazione 7 aprile 1927).

MORTI

20 gennaio 1927.

Comparetti (Domenico), Socio nazionale non residente della Classe di scienze morali.

4 maggio 1927.

Del Lungo (Isidoro), Socio corrispondente della Classe di scienze morali.

4 maggio 1927.

Tschermak-Seysenegg (Gustavo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche.

30 maggio 1927.

Cerulli (Vincenzo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche.

17 luglio 1927.

Mittag-Leffler (Gustavo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche.

28 agosto 1927.

Haug (Emilio), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche.

2 ottobre 1927.

Arrhenius (Svante Augusto), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 6 Novembre 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Guidi, Grassi, Panetti, Ponzio, Sacco e Repossi, il quale funge da Segretario.

Scusano l'assenza il Vice-Presidente Parona, il Segretario Mattirolo ed i Soci Garelli e Pochettino.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente comunica la notizia della morte dei nostri Soci corrispondenti G. Mittag-Leffler, E. Haug e Aug. Arrhenius, che saranno commemorati.

Il Presidente comunica in seguito una lettera di S. A. il Duca degli Abruzzi, che ringrazia l'Accademia della sua nomina a Socio nazionale residente; una lettera del Socio Majorana, il quale trasmette all'Accademia copia dell'indirizzo da lui letto alla Soc. Française de Physique in occasione del centenario di Agostino Fresnel; e un invito diretto dalla Faculté des sciences de Paris al Presidente perchè voglia far parte del Comitato per le onoranze a Émile Picard, invito ch'egli dichiara di accettare con piacere.

Il Socio Sacco comunica ch'egli ha commemorato a Biella Quintino Sella, il quale fu pure Socio dell'Accademia; e il Socio

Digitized by Google

D'Ovidio, ricordando che il 1° fascicolo delle *Acta Mathematica* del defunto Socio corrispondente Leffler fu da lui illustrato all'Accademia, ritiene suo dovere commemorare subito brevemente l'illustre matematico scomparso.

In seguito il Socio Sacco fa omaggio all'Accademia di tre volumi sull'*Emigrazione Italiana dal 1910 al 1925*.

Quindi il Presidente presenta una pubblicazione pervenuta da parte dell'Ing. Enrico Camerana sull'*Industria mineraria solfifera siciliana*, ed una pervenuta da S. E. il Conte C. M. De Vecchi sulla *Vallata del Giuba*.

Il Socio Guidi presenta una sua breve Nota a stampa, *Sulle dighe ad arco*, e ne discorre brevemente.

Quindi per la inserzione negli *Atti* presenta una Nota dell'Ing. R. Zoia dal titolo: *Influenza della macrostruttura e della velocità di prova sulla formazione della coppella nella rottura delle barre di ferro omogeneo e di acciaio*.

Il Socio Ponzio presenta, pure per la inserzione negli *Atti*, una Nota dei Dottori G. B. Semeria ed M. Milone dal titolo: *Sulla riduzione catalitica del nitrobenzene in anilina nella fase gassosa*, e ne discorre brevemente.

Digitized by Google

LETTURE

Influenza della macrostruttura e della velocità di prova sulla formazione della coppella nella rottura delle barre di ferro omogeneo e di acciaio.

Nota dell'Ing. RAFFAELLO ZOIA, assistente R^a Scuola d'Ingegneria,
presentata dal Socio nazionale residente C. Guidi.

L'aspetto normale della rottura di una barra laminata di ferro omogeneo e di alcuni acciai è quello a tronco di cono e corrispondente coppella. Per spiegare tale aspetto della rottura diverse furono le teorie proposte, ed ultimamente il signor C. Fremont (1), partendo da considerazioni teoriche e sperimentali, conclude che durante il fenomeno della strizione, che precede sempre la rottura in coppella, si viene a formare una zona periferica contemporaneamente tesa e compressa, " ciò che le permette di allungarsi più che la zona centrale solo tesa „, e che si rompe quindi per prima; la rottura proseguirebbe poi secondo la superficie di separazione delle due zone. Ora tale distribuzione di tensioni interne mi sembra inesatta, poichè applicando il ragionamento del sig. Fremont a cilindri interni (e corrispondenti parti tubolari) con diametro successivamente decrescente, si giungerebbe alla conclusione che la zona con fibre unicamente tese non esiste.

Nel caso di barre laminate, numerose esperienze da me ese-

(1) *C. R. Académie des Sciences*, Vol. 184, N° 17 (25-4-27), p. 998, e più dettagliatamente: *Génie Civil*, Vol. 90, N° 19 (7-5-27), p. 453.

Digitized by Google

guite recentemente dimostrano che la rottura in coppella è in stretta relazione colla macrostruttura del laminato.

Come materiale di studio per questa ricerca ho preso in esame i campioni di tondini per costruzioni in beton armato (in numero di oltre 350) inviati per la prova di tensione al Laboratorio sperimentale della R. Scuola d'Ingegneria di Torino da due anni a questa parte, materiale questo di diversa origine e molto vario anche come resistenza (da 33 a 65 $^{kg}/_{mmq}$).

Prima serie di esperienze: prova usuale di rottura. Dal confronto sistematico della struttura macrografica (messa in evidenza attaccando la sezione trasversale coi diversi reattivi in uso) colla rottura dei tondini, sono giunto ai seguenti risultati:

a) nei numerosissimi casi in cui vi è una zona centrale di segregazione molto netta (di forma tondeggiante, ovale, quadrangolare, a losanga, a otto, ecc.), il fondo della coppella ne ricopia l'andamento talora in modo perfetto, talora colla tendenza degli spigoli e delle rientranze a scomparire per avvicinarsi alla forma circolare della sezione (sotto l'azione delle tensioni interne) e la differenza tra le due figure è generalmente piccola, nelle condizioni di una prova a trazione ordinaria;

b) quando manca una zona netta di segregazione o quando i reattivi mettono in evidenza una struttura dendritica, l'orientazione e le particolarità del fondo della coppella sono sempre in strettissima dipendenza colla macrostruttura.

Seconda serie di esperienze: prova di rottura su tratti di uno stesso tondino torniti fino a diametri successivamente decrescenti.

Nelle nuove rotture l'area del fondo della coppella non è diminuita o lo è solo leggermente, e quindi aumenta notevolmente il rapporto $n = \frac{\text{area fondo coppella}}{\text{area sezione contratta}} \times 100$ (che può essere opportunamente assunto a definire brevemente l'entità della rottura in coppella, a numeri grandi corrispondendo coppelle poco pronunciate e viceversa).

Se si spinge la tornitura fino a giungere alla zona di se-

Digitized by Google

gregazione, il numero *n* può raggiungere valori elevatissimi, sia assolutamente, sia in confronto al suo valore primitivo (Fig. 1).

Terza serie di esperienze: confronto tra le rotture di tratti successivi di uno stesso tondino.

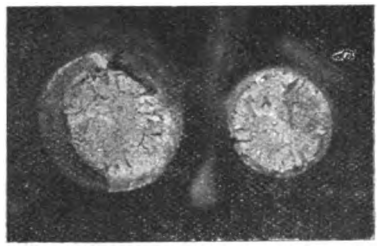


Fig. 1.

Caso tipico è il seguente: il fondo della rottura si avvicina alla forma a losanga della zona di segregazione, mentre si hanno tre aspetti diversi della rottura: coppella intera, coppella frazionata, rottura con due solchi a spirale con pareti oblique

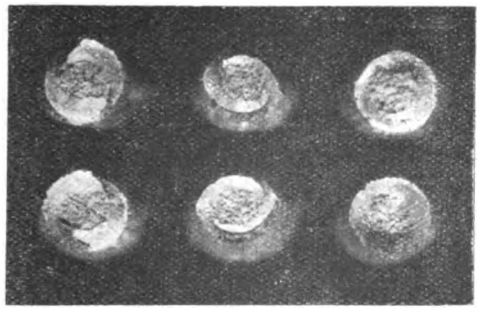


Fig. 2.

partenti dai due vertici opposti della losanga più lontani dal centro (Fig. 2).

Quarta serie di esperienze: confronto fra le rotture di due saggi di uno stesso tondino rotti, il primo in 8-10 minuti (velocità *A*), il secondo in 10-12 secondi (velocità *B*, 40-60 volte maggiore):

Digitized by Google

a) per materiali aventi una zona centrale molto nettamente differenziata, passando dalla velocità di prova *A* a quella *B*, diminuisce generalmente, ma di poco, il numero *n*;

b) per materiali pei quali l'esame macrografico non dà due zone ben distinte, ma si ha un passaggio graduale di struttura dal centro alla periferia, la diminuzione del numero *n* può essere marcatissima, come ho verificato in numerosi casi. Esempi: Fig. 3, tondino da 45 $^{kg}/_{mmq}$ con 30 % di allungamento (valori corrispondenti alla velocità *A*) e Fig. 4, tondino da 54 $^{kg}/_{mmq}$ e 25 % di allungamento.

Fig. 3.

Fig. 4.

Conclusione: dai risultati ottenuti segue che la formazione della rottura in coppella delle barre laminate di ferro ed acciaio dipende od è influenzata in modo essenziale dalla loro struttura eterogenea (esperienze serie 1ª) e precisamente dalla presenza di una zona centrale meno plastica (serie 2ª); la rottura comincia per strappamento da tale zona e si estende per scorrimento nella zona periferica più plastica dando luogo a diversi aspetti della rottura (serie 3ª). Le esperienze della serie 4ª confermano questi risultati, essendo logico che la velocità di prova abbia influenza notevole sul numero *n* solo pei materiali *b)* che presentano una diminuzione non brusca ma progressiva di plasticità andando verso il centro.

La presente Nota fu depositata presso la Segreteria della R. Accademia delle Scienze di Torino il 20 luglio 1927.

Digitized by Google

Sulla riduzione catalitica del nitrobenzene in anilina nella fase gassosa.

Nota dei Dott.ri G. B. SEMERIA e M. MILONE
presentata dal Socio naz. resid. G. Ponzio

Due serie di lavori ci offre la letteratura sulla riduzione del nitrobenzene con idrogeno in presenza di catalizzatori: l'una riguarda la riduzione nella fase liquida per lo più con catalizzatori colloidali (Zsigmondy, Leprince, Siveke, Debus, Paal, Skita e Meyer, Nord (1)); l'altra riguarda la riduzione nella fase gassosa con catalizzatori metallici (rame, nichel, cobalto, platino, ecc.) e comprende, oltre ai classici lavori di Sabatier e Senderens, quelli, molto più particolareggiati, di Henke e Brown (2) secondo i quali la trasformazione del nitrobenzene in anilina avviene quasi quantitativamente fra 250° e 300° usando un eccesso di idrogeno.

Parendoci opportuno stabilire con esattezza i rapporti che passano fra il rendimento della reazione, le percentuali di idrogeno impiegate, la massa del catalizzatore e la temperatura, abbiamo ripreso lo studio dell'argomento, servendoci (e ciò allo scopo di avvicinarci il più possibile alle condizioni che si potrebbero verificare nella pratica industriale) di un apparecchio di notevoli dimensioni, del quale diamo il disegno in scala ed una riproduzione fotografica.

(1) Zsigmondy, *Traité de chimie colloidale*, Dunod, Paris, 1926; Leprince und Siveke, D. R. P., 141029; C. *1902*, I, 1199; Debus, A., *138*, 200 (1893); C. Paal-C. Amberger, B., *38*, 1406-1409 (1905); C. Paal-J. Gerum, B., *40*, 2201-2208 (1907); C. Paal-K. Roth, B., *41*, 2283 (1908); Skita und Meyer, C., *1903*, I, 398; F. Nord, C, *1919*, III, 786.

(2) Sabatier e Senderens, C. R., *133*, 321 (1901); Henke e Brown, C. A., *16*, 1403, 1939, 2124 (1922); *17*, 665 (1923); *18*, 1936 (1924) e " J. of. Phys. Chem. „, *26*, 162, 272, 715 (1922); *27*, 739 (1923); *28*, 71 (1924).

Digitized by Google

Esso è costituito da un tubo di ferro della lunghezza di un metro, del diametro di 7 cm. e dello spessore di [illegible] cm., chiuso alle estremità con due calotte di ferro avvitate a perfetta tenuta ed aventi nella parte superiore due fori in cui si adattano due tappi a vite portanti ciascuno un termometro con scala da [illegible] a [illegible], il primo dei quali ha il bulbo nella camera di vaporizzazione, il secondo nella massa del catalizzatore. Nell'interno del tubo trovasi una gabbia di filo di ferro che ne occupa l'intera sezione e contiene il catalizzatore. Alla parte inferiore della parete destra è saldato un tubo di ferro, lungo [illegible] cm. e del diametro di cm 1.5, in comunicazione con un refrigerante ad acqua. Le due calotte hanno ciascuna un foro centrale di 1 cm. di diametro: da quello della calotta superiore si introduce la miscela nitrobenzene-idrogeno; quello della calotta inferiore serve all'introduzione di quantità supplementari di idrogeno.

Il nitrobenzene è fatto gocciolare mediante un capillare in un tubo di vetro che si prolunga per 40 cm. nel tubo di ferro, nel quale vaporizza e si mescola con l'idrogeno che entra da un tubo laterale. Per regolare la quantità del nitrobenzene che esce dal capillare si fa variare la pressione nel piccolo serbatoio mediante una colonna di mercurio.

Le quantità di idrogeno impiegate sono misurate con un manometro differenziale avente dell'acqua come liquido manometrico e del quale si fece la taratura stabilendo la portata corrispondente ad ogni dislivello.

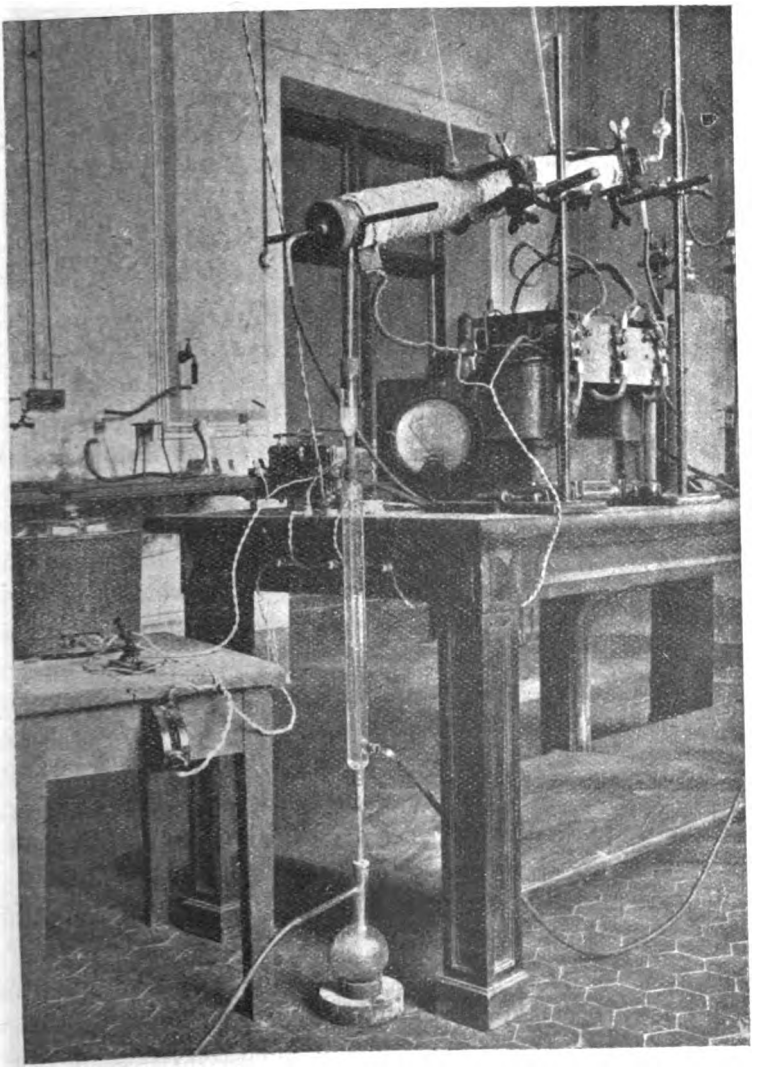
Il nitrobenzene proveniva dalla ditta Kalbaum ($d = 1.208$; p. eb. [illegible]); l'idrogeno era prelevato direttamente dalle bombole fornite dalla ditta Garuti di Sesto San Giovanni.

Il tubo, isolato con uno strato di micanite, veniva riscaldato elettricamente mediante sette metri di bandella di ferro (d. mm. [illegible]-0.5) avvolti a spirale e fissati alle due estremità con due collarini di rame ai quali giungeva la corrente dal secondario (21 Volts) d'un trasformatore (240-21 Volts). Il tubo era termicamente protetto da due strati di cartone d'amianto e da uno strato di corda d'amianto: in un quarto d'ora si raggiungevano i [illegible], e mediante la resistenza a cursore inserita sul

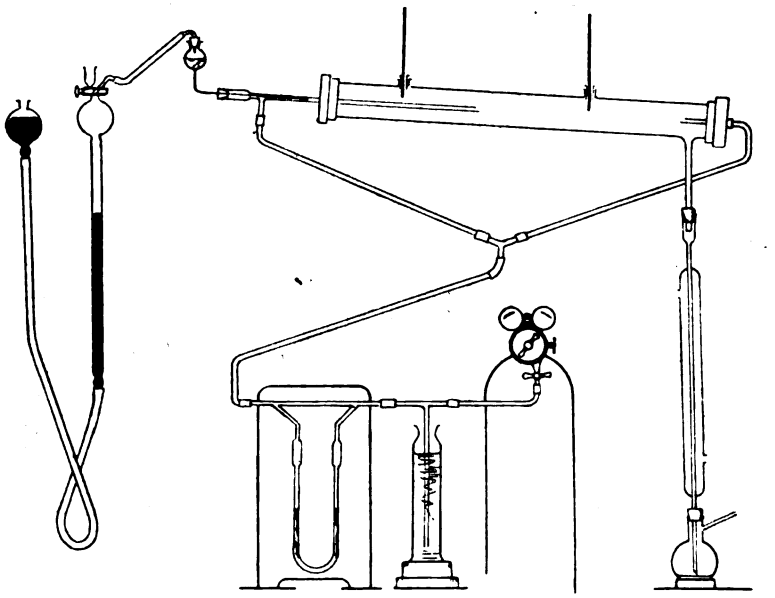
Digitized by Google

primario del trasformatore la temperatura poteva essere mantenuta all'altezza voluta, con una differenza di $\pm 3°$.

Il prodotto della reazione veniva raccolto, all'uscita dal refrigerante ad acqua, in un pallone di Erlenmeyer sul fondo del quale si metteva un po' di acqua; mentre l'eccesso di idrogeno era condotto mediante un tubo di gomma in un aspiratore.



Digitized by Google



Catalizzatori. — Come catalizzatori abbiamo usato soltanto il rame e l'argento.

Il *catalizzatore rame* fu preparato introducendo gr. 25 di amianto (convenientemente spappolato e previamente riscaldato con acido cloridrico e poi lavato con acqua fino a reazione neutra) in una soluzione bollente di gr. 115 di nitrato di rame in cc. 500 di acqua, aggiungendo una soluzione satura di carbonato sodico e continuando il riscaldamento in modo da provocare la formazione di ossido ramico. La massa, raccolta su un Büchner, lavata con acqua fino a reazione neutra e seccata in stufa a 110° veniva poi introdotta, mediante l'apposita gabbia di filo di ferro nel tubo di catalisi. Facendo quindi passare la corrente di idrogeno e scaldando con cautela a 170° - 200° per mezz'ora si otteneva un catalizzatore contenente circa il 49 % di rame (l'analisi di tre campioni diede i seguenti risultati: 48,90 - 49,35 - 49,73 % di Cu).

Il *catalizzatore argento* fu preparato in modo analogo introducendo gr. 25 di amianto in una soluzione bollente di nitrato d'argento al 10 % ed aggiungendo quindi idrossido di sodio

Digitized by Google

al 20 %. La massa nerastra, raccolta alla pompa e lavata con acqua fino a reazione neutra, fu quindi seccata in stufa a 110° ed assoggettata alla riduzione con idrogeno a 160°-190° per mezz'ora. Conteneva circa il 50 % di Ag.

Esecuzione delle esperienze. — Dopo avere portato il tubo, contenente il catalizzatore, alla temperatura voluta e scacciata l'aria con una forte corrente di idrogeno si fanno passare, nel corso di un'ora, le quantità stabilite di nitrobenzene e di idrogeno. Si fa ancora passare idrogeno per 10 minuti, si sospende il riscaldamento e quando il tubo è freddo si lava il refrigerante con acqua e si versa il contenuto del pallone, colle acque di lavatura, in un matraccio tarato da un litro e si porta a volume con altra acqua. Su un'aliquota della soluzione così ottenuta si determina l'anilina col metodo dell'acqua di bromo (1), oppure con una soluzione titolata di acido solforico (indicatore: p - dimetilaminoazobenzene) (2).

Si eseguirono oltre 400 esperienze con 20 - 35 - 50 gr. di catalizzatore; con cc. 3 - 5 - 10 (gr. 3,024 - 6,040 - 12,08) di nitrobenzene all'ora, e con diverse quantità di idrogeno calcolate in multipli della quantità teorica (3). Le esperienze col rame furono ripetute a tre differenti temperature (250° - 300° - 350°); quelle dell'argento anche a 400°.

I risultati sono riassunti nella tabella qui contro.

I diagrammi che seguono dimostrano le relazioni che passano tra i rendimenti in anilina per le diverse quantità di nitrobenzene e di idrogeno alle differenti temperature. Come ordinate sono riportati i rendimenti in anilina (riferiti al teorico) e come ascisse i multipli della quantità teorica di idrogeno. Le curve interne si riferiscono ciascuna ad una quantità oraria di nitrobenzene.

---

(1) Kings Scott-C. Knight, *Methods of quant. org. anal.* Longmans, Green and Co., London, 1914.

(2) C. M. Carson, *Ind and. Engin. Chem.*, *17*, 62 (1925).

(3) La riduzione di un grammo di nitrobenzene in anilina richiede teoricamente gr. 0,05927 di idrogeno = litri 0,663 a 0° e 760 mm.

Digitized by Google

Rendimenti in anilina

Quantità oraria di nitrobenzene	Multipli della quantità teorica di idrogeno	Catalizzatore Rame									Catalizzatore Argento								
		Quantità di catalizzatore									Quantità di catalizzatore								
		Grammi 20			Grammi 35			Grammi 50			Grammi 20			Grammi 35			Grammi 50		
		250°	300°	350°	250°	300°	350°	250°	300°	350°	250°	300°	350°	250°	300°	350°	250°	300°	350°
		%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
	1											15	35			61	30	55	74
	2				10		45	15	55	60	3	30	52	30	52	74	42	64	90
	3	3	17	27	23.5	40	53	28	55	66	19	42	64	39.5	62	92	55	75	98
	4	13	33	39	31	50	64	39	55	79	28	51	75	48	80	99.5	65	91.5	
10 cc.	5	20.5	44	54	37	58	76	47	57	90	35	60	83	55	95		72		
	6	27	55	69	42	65.5	86	54	61	95	41	68	89	61	99.5		79		
	7	32	64	75.5	44	75	92	57	70		48	74	94	67			82		
	8	35.5	71	80	46	88	95	59.5	90		52	80		71			88		
	9	38	78			94.5								75.5			90.5		
	1										10	30	50	41	60	70	50	65	83
	2	7		39	18		60	30.5		76	20	40	60	52	65	85	60	73	96
	3	20	37	47	32	61	66	44	72.5	81.5	28	50	60	60	75	99.5	70	85	99.5
	4	27	46.5	57	40	64	74	52	75	90	34	60	80	65	90		76	99.5	
5 cc.	5	32	60	70	45.5	70	85	60	80	95.5	41	70	90	70	99.5		82		
	6	37	69.5	81	50	77	95	63	85.5	99.5	47	76	93.5	75			87		
	7	40	78	88	53	85	99	68	94		51	81	97	79.5			91.5		
	8	44	84.5	91	56	93		70	99.5		56		99	83			95		
	9	47	89	93	58	99		72						85.5			97		
	1										16	35	60			87	56	70	85.5
	2	21		55.5	34.5		72	42		85	28	50	73	60	70	96	70	80	90
	3	30	57	63	43		77.5	62	82	89	35	60	85	68	86	99.5	80	95	99.5
	4	36	65	77	51	76	84	71	84	95.5	45	70	95	75	99		88	99.5	
3 cc.	5	41	73	87	58	79	92	77	86	99	51	80	99.5	80	99.5		94		
	6	46	80	91	62	84	98	80	90		58.5	85.5		85			88		
	7	50	86	93	66	92	99.5	81	99		63	90		88			99.5		
	8	52.5	90	94.5	68	98		84						90					

Digitized by Google

Conclusioni. — 1°) La reazione è esotermica; infatti lasciando raffreddare l'apparecchio quando in esso passa soltanto idrogeno la temperatura segnata dal termometro il cui bulbo pesca nel catalizzatore diminuisce assai più rapidamente che non quando si fa passare la miscela nitrobenzene-idrogeno; mentre la temperatura segnata dal termometro il cui bulbo trovasi nella camera di vaporizzazione diminuisce più lentamente nel primo caso perchè il nitrobenzene assorbe calore per vaporizzarsi.

Inoltre, regolando le resistenze in modo che la temperatura assuma un certo valore durante il passaggio della miscela nitrobenzene-idrogeno, e, senza variare la quantità di energia elettrica fornita al tubo, si cessa il gocciolamento del nitrobenzene, la temperatura segnata dal termometro il cui bulbo è immerso nel catalizzatore comincia quasi subito a diminuire per poi arrestarsi a circa 30° più basso; e facendo nuovamente gocciolare il nitrobenzene la temperatura riassume poco a poco il valore primitivo.

2°) Sul rendimento in anilina influisce molto la temperatura. Il miglior rendimento col catalizzatore rame si ha operando a temperature non superiori a 350°; poichè già a 400° si osserva formazione di benzene e di ammoniaca

$$C_6H_5NO_2 + 8H \rightarrow C_6H_6 + NH_3 + 2H_2O.$$

Portando il catalizzatore oltre i 400° esso continua poi ad agire in detto senso anche se si abbassa la temperatura. Per il catalizzatore argento l'*optimum* è a 400°.

3°) Il rendimento in anilina aumenta rapidamente con l'aumentare della quantità di catalizzatore impiegata, però soltanto fino ad un certo limite, oltre il quale rimane costante. Per temperature comprese fra 250° e 300° un aumento nella quantità di catalizzatore provoca un aumento nel rendimento molto superiore a quello che si verifica fra 300° e 350°.

4°) L'influenza delle quantità di idrogeno sul rendimento cresce coll'aumentare della temperatura e della quantità del catalizzatore. Dai diagrammi risulta che le linee che danno questa relazione tendono a diventare parallele all'asse delle *y* più o meno rapidamente; inoltre esse sono maggiormente incli-

Digitized by Google

nate verso l'asse delle x ad elevate temperature e per maggiori quantità di catalizzatore.

L'introduzione di quantità addizionali di idrogeno dall'estremità destra del tubo di catalisi aumenta solo di poco il rendimento in anilina.

5°) Il rendimento non varia molto col variare delle quantità orarie di nitrobenzene; la variazione diventa anche meno sensibile col crescere della temperatura e delle quantità di catalizzatore.

6°) L'attività del catalizzatore si mantiene costante. Per molti mesi e spesso per 12 ore al giorno ci siamo serviti dello stesso catalizzatore senza osservare alcuna diminuzione nella sua efficenza.

7°) L'anilina che si ottiene col catalizzatore rame è quasi sempre un po' colorata da tracce di azobenzene; col catalizzatore argento a 350° (col quale il rendimento è quasi quantitativo) si ottiene invece anilina pura.

Torino - Istituto Chimico della R. Università.

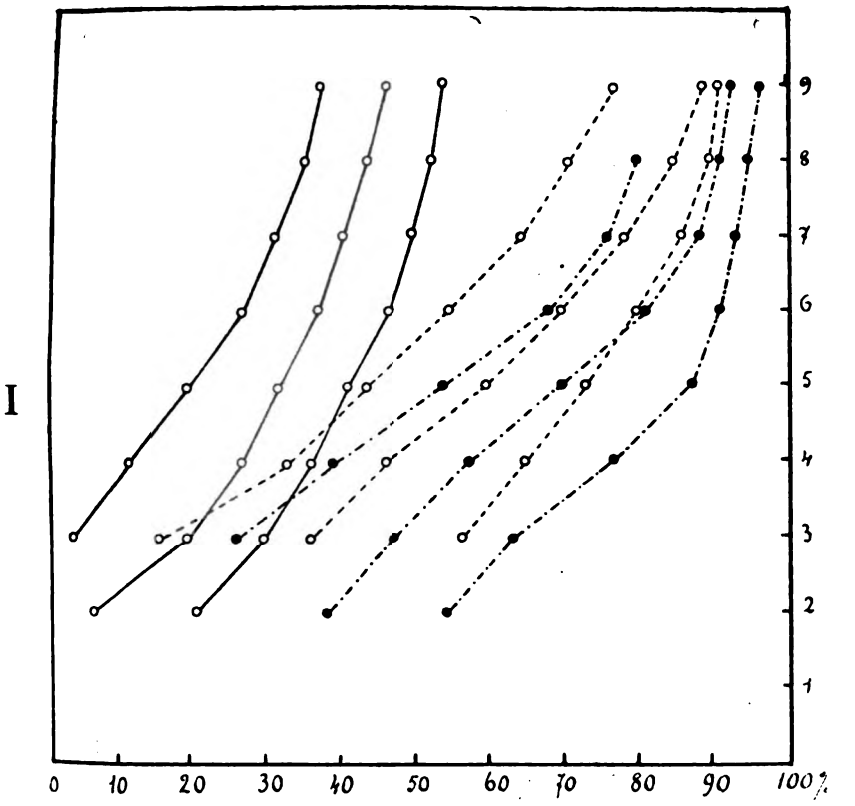
INDICE DEI DIAGRAMMI

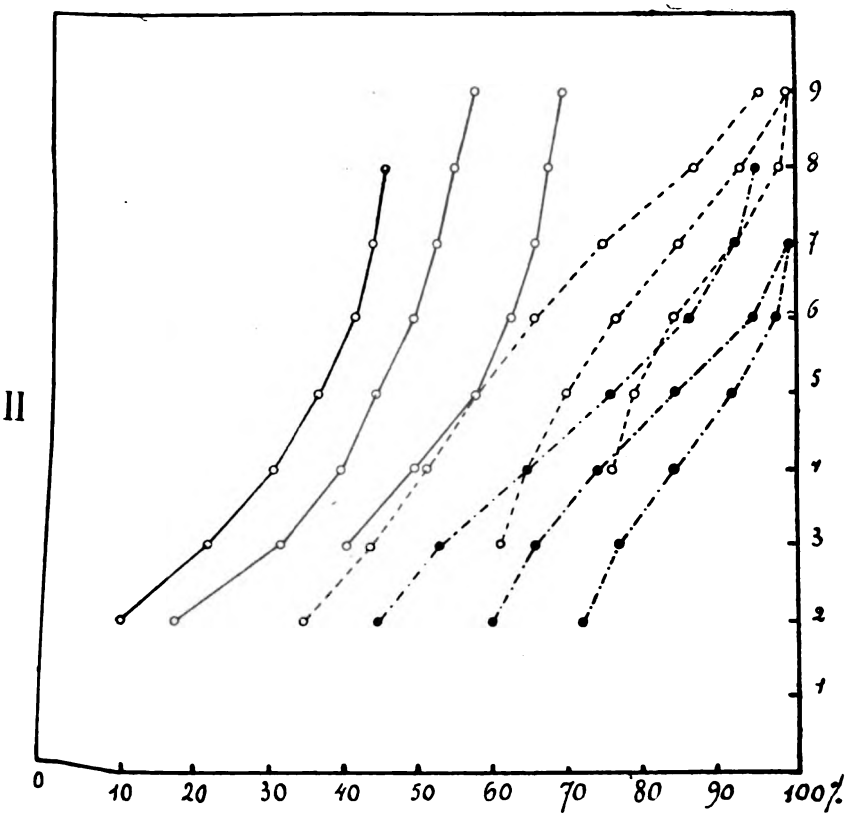
I —	Catalizzatore	RAME	Quantità	gr. 20
II —	»	»	»	» 35
III —	»	»	»	» 50
IV —	»	ARGENTO	»	» 20
V —	»	»	»	» 35
VI —	»	»	»	» 50

Le linee continue si riferiscono alla temperatura di 250°; quelle tratteggiate a 300° e quelle a punto e linea (cerchietto nero) a 350°.

Di ogni fascio di linee quella più a destra si riferisce alla quantità oraria di 3 cc. di nitrobenze, quella centrale a 5 cc. e quella a sinistra a 10 cc.

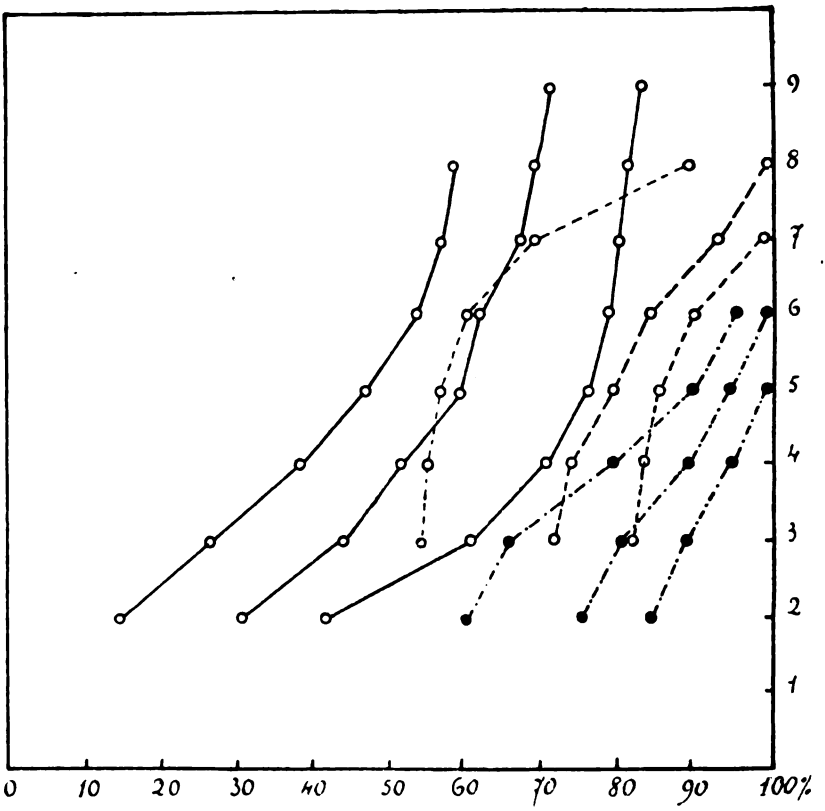
Digitized by Google



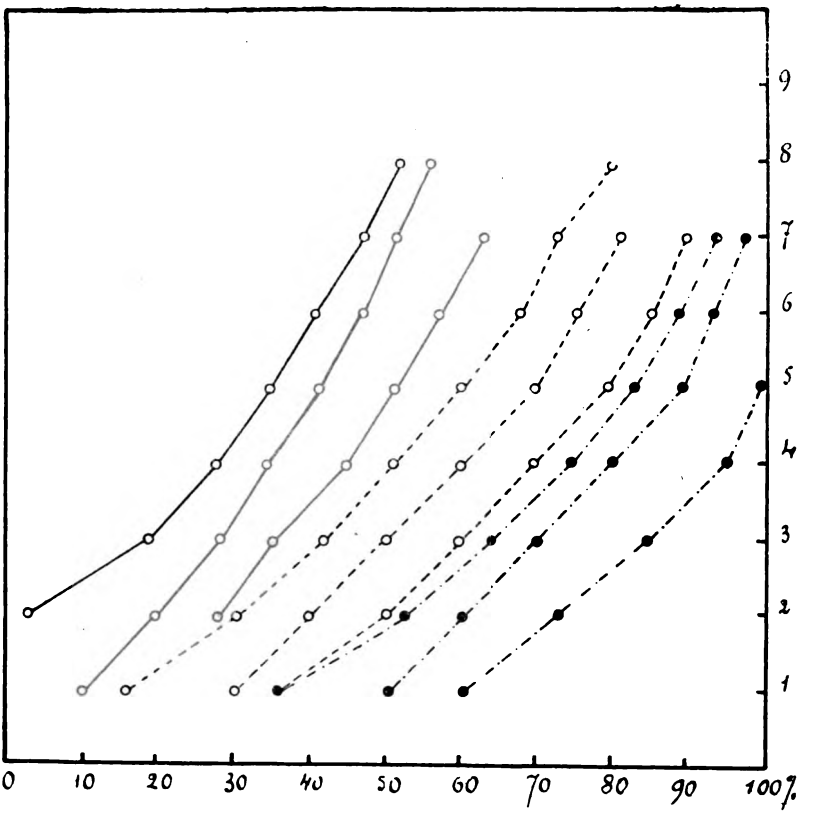


Digitized by Google

III

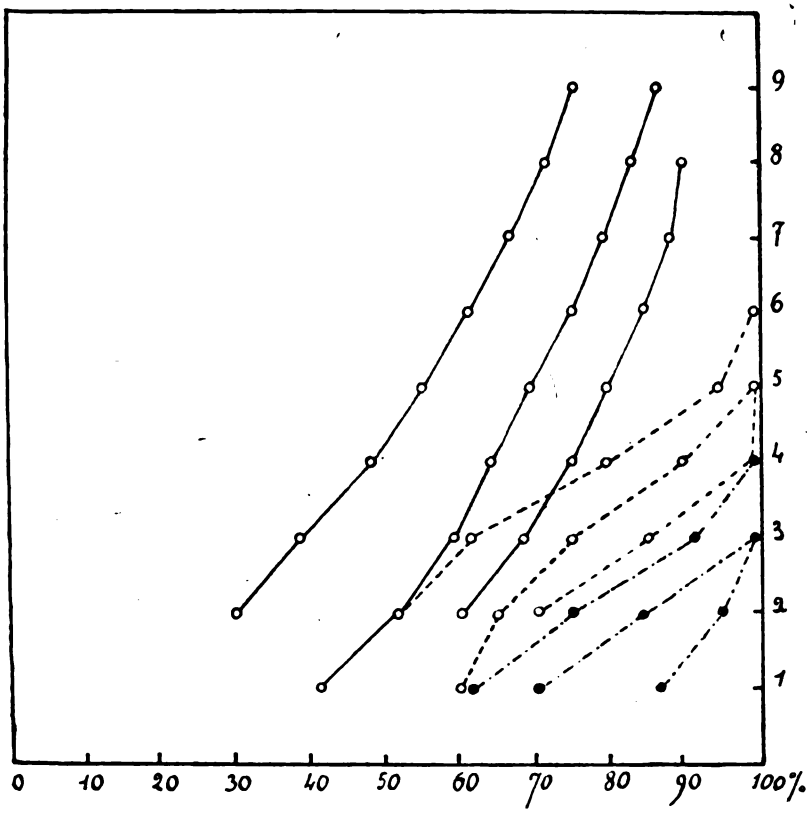


IV

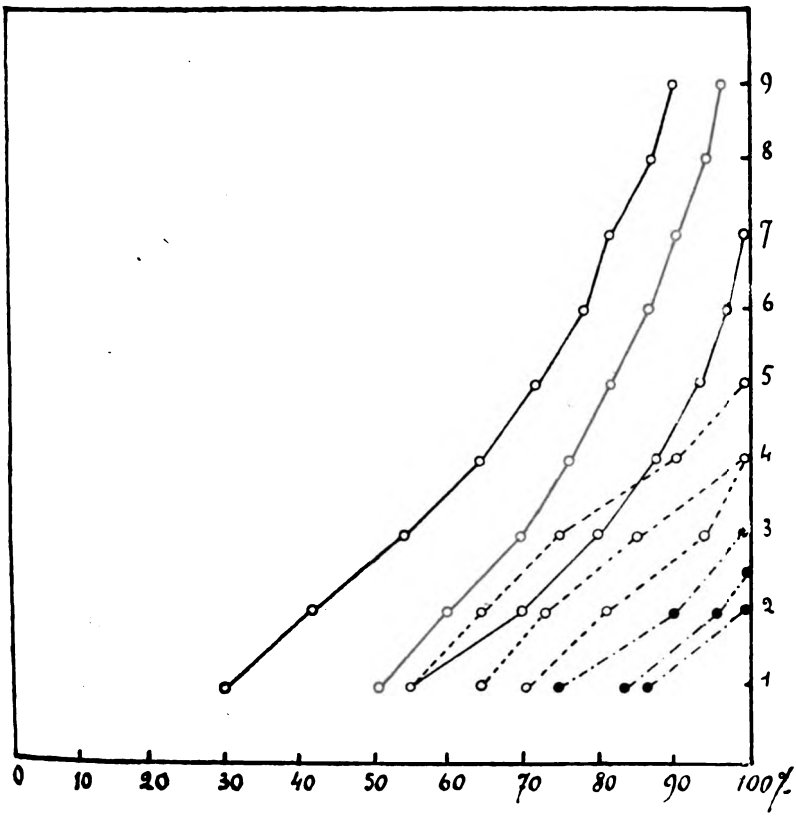


Digitized by Google

V



VI



Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 20 Novembre 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. CARLO SOMIGLIANA
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Guidi, Panetti, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Vice Presidente Parona.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza che risulta approvato.

Il Presidente dà comunicazione di una lettera del sig. Léon Guillet, Membro dell'Istituto di Francia, nella quale si espone il desiderio che l'Accademia nostra voglia partecipare alle onoranze che si tributeranno al Prof. Émile Picard, nostro Socio straniero, nella ricorrenza del suo cinquantenario scientifico; in questa occasione sarà coniata apposita medaglia riproducente l'effigie del festeggiato.

L'Accademia delibera di aderire al desiderio espresso dal sig. Guillet nel nome dell'*École Centrale des Arts et Manifactures*.

Viene quindi comunicato l'invito dell'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Genova, diretto dal prof. Luigi Cognetti de Martiis, perchè l'Accademia voglia prender parte

Digitized by Google

alla commemorazione del prof. Lorenzo CAMERANO, la quale avrà luogo a Genova il giorno 22 corr.

Il Presidente, constatato che nessuno dei Soci presenti può accogliere l'invito e recarsi a Genova, delibera che sia incaricato telegraficamente il nostro Socio corrispondente prof. Ottone PENZIG di rappresentare il nostro Sodalizio alla cerimonia che rievocherà la figura del nostro amato e compianto Presidente nel 10° anniversario della sua morte.

Il Socio GARELLI, recatosi a Parigi per prender parte alle onoranze tributate alla memoria di Marcellino BERTHELOT, che l'Accademia nostra si gloria di aver annoverato fra i suoi membri, comunica il testo dell'indirizzo da lui consegnato alla Presidenza dell'Accademia di Francia nel nome della nostra Accademia. L'indirizzo, dopo lettura, viene approvato per la inserzione nel presente verbale onde ne rimanga traccia nei nostri *Atti*.

" La Reale Accademia delle Scienze di Torino, che si onora
" di aver avuto Marcellino BERTHELOT fra i suoi Soci più illustri,
" aderisce, con vivo compiacimento, alle Onoranze che tutto il
" mondo scientifico tributa alla memoria del Grande Chimico,
" nel primo Centenario della Sua nascita.

" L'Accademia di Lagrange, Spallanzani, Volta, Avogadro,
" Plana, ha unito il suo plauso a quello dei Corpi Scientifici di
" tutte le Nazioni quando, ventisei anni or sono, in questa stessa
" Aula, si celebrò il Cinquantenario della prima pubblicazione
" di BERTHELOT. Degno interprete dei nostri sentimenti di am-
" mirazione fu allora Icilio GUARESCHI, che pubblicava poi, negli
" *Atti* dell'Accademia di Torino del 1908, il primo lavoro com-
" pleto sull'opera scientifica e sulla vita del Grande.

" Trascorso più di un quarto di secolo, la gloria di BERTHELOT
" risplende di nuova luce; perchè i progressi compiuti, i risultati
" ottenuti nei molteplici rami della Chimica teorica ed applicata,
" ch'Egli ha coltivato e, specialmente nella sintesi chimica, nella

Digitized by Google

" termochimica e chimica biologica, si debbono in parte alle " direttive ch'Egli ha tracciato con geniale intuizione, con " lavoro indefesso.

" L'Accademia di Torino, che ha sempre ammirato tutta " l'altezza dell'ingegno e la vastità dell'opera di questo Illustre " Figlio della Francia, saluta ora in Lui una delle più fulgide " manifestazioni del Genio Latino, pel quale Nazioni sorelle " hanno saputo tendersi la mano nella pacifica gara dell'umano " progresso ".

Il Socio GARELLI brevemente accenna alla solennità dei festeggiamenti in onore di BERTHELOT, ricordando come in tale occasione convenissero a Parigi i rappresentanti di ben 60 nazioni.

Il Socio POCHETTINO commemora quindi il Socio Andrea NACCARI, che fu già Presidente dell'Accademia. La brillante commemorazione, elettissima nella forma, affettuosamente condotta con conoscenza intima delle doti preclari dell'uomo, e degli altissimi meriti dello scienziato, colla quale il Socio POCHETTINO seppe rievocare la nobile figura dell'amatissimo scomparso, viene accolta dagli applausi unanimi dei Soci presenti.

Il Socio Direttore della Classe SOMIGLIANA felicitandosi col Socio POCHETTINO per la bella sua commemorazione, rievocando i meriti scientifici del NACCARI, comunica all'adunanza di aver avuto occasione di leggere uno studio biografico e critico sopra Alessandro VOLTA scritto dal NACCARI e per suo espresso volere rimasto inedito; il quale, a suo giudizio, è il migliore cenno biografico che finora sia stato scritto intorno all'insigne fisico comasco. Egli rimpiange che il permesso per la pubblicazione di tale manoscritto gli sia stato negato dagli Eredi, essendo convinto che tale pubblicazione risulterebbe di grande onore alla fama del NACCARI.

Il Segretario MATTIROLO, associandosi alle parole del Presidente, propone che l'Accademia si rivolga ufficialmente agli Eredi per ottenere la consegna del manoscritto ed il permesso

Digitized by Google

per la sua pubblicazione. Questa proposta è accolta dai Soci presenti, deliberandosi che le pratiche al riguardo sieno subito iniziate presso l'Erede Ing. Gazzaniga.

Il Socio Sacco propone, e l'Accademia approva, che la commemorazione del Naccari, fatta dal Socio Pochettino, sia preceduta da un ritratto del compianto nostro Presidente.

Il Socio Sacco fa quindi omaggio all'Accademia di un suo discorso tenuto a Oropa nella seduta del 19 settembre del Congresso del Club Alpino Italiano, celebrante il centenario della nascita di Quintino Sella.

Il Presidente fa poscia omaggio dell'*Atlante dei Ghiacciai italiani*, pubblicato dal Generale Porro e dall'Ing. Labus, e ne discorre, ricordando che questo Atlante segna in carte colorate (alla scala di 500.000) 754 Ghiacciai italiani.

Lo stesso Presidente presenta quindi alcuni suoi lavori, dei quali fa omaggio all'Accademia dopo averne brevemente discorso. Il primo dal titolo: *Sopra una formola di Pizzetti e la determinazione della densità media terrestre* fu pubblicato nel Bollettino Geodetico della Unione Geodetica e Geofisica Internazionale. Il secondo ha il titolo: *Sulla determinazione delle costanti del Geoide mediante misure di gravità*; mentre il titolo del terzo, comparso nei volumi dell'Istituto veneto, è il seguente: *Sulla estensione del Teorema di Clairaut.*

Presenta quindi in dono alla Biblioteca accademica il volume edito dal Reale Istituto Lombardo nel Centenario della morte di Alessandro Volta, facendo rilevare i meriti degli scritti di Francesco Grassi, intorno ai lavori del Volta, su la dilatazione degli aeriformi per l'azione del calore, provocando così una interessante discussione accademica sull'argomento.

Il Socio Segretario Mattirolo presenta, nel nome della Società Unione Tipografica Editrice Torinese, il volume XII dell'importantissimo *Trattato di Anatomia Patologica* iniziatosi molti anni or sono sotto la Direzione del nostro compianto Socio Pio Foà.

Digitized by Google

Il volume contiene la trattazione di due importanti capitoli: VANZETTI, *Sulle alterazioni locali della Circolazione*; PARODI, *Iperplasia e Ipertrofia.*

Il Socio MATTIROLO presenta inoltre e fa omaggio all'Accademia, nel nome del " Gruppo per la tutela del Patrimonio scientifico nazionale „, un volume sui *Monumenti Naturali della Toscana nel Censimento delle Bellezze Naturali d'Italia*, rilevando i meriti specialmente dei lavori di STEFANINI e PAMPANINI sui monumenti geologici e botanici della Toscana; di BALDASSERONI sulla protezione degli animali più rari della Toscana, e di Aldobrandino MOCHI sulla protezione dei costumi della Toscana. Il volume, abbondantemente illustrato, presenta esempi d'interesse eccezionale.

Terminata così la presentazione degli omaggi, il Segretario MATTIROLO comunica, per la inserzione negli *Atti*, un lavoro del prof. Giovanni NEGRI dal titolo: *Componenti atlantici della Flora Pedemontana.* In questo suo studio l'A. illustra la notevole importanza documentaria per lo studio della origine e della costituzione della Flora Piemontese, presentata da quelle specie le quali si dimostrano particolarmente legate, nella loro distribuzione geografica attuale, alla costa atlantica, penetrate probabilmente in Piemonte in periodi diversi, durante le variazioni climatiche che accompagnarono il periodo quaternario. Sommano queste specie in complesso ad una quarantina, alcune largamente diffuse quali ad es. *Cytisus scoparius, Teucrium scorodonia*; altre, in gran parte, sporadiche quali sono ad es. *Ornithopus perpusillus* e *Anarrhinum bellidifolium.* L'A. ritiene, che la diversità del modo di distribuzione di queste specie nel nostro paese, dipenda dalla diversa antichità della loro immigrazione. Le più uniformemente diffuse, essendo le ultime arrivate, sono l'espressione di quella fase climatica a carattere oceanico, e dal punto di vista della vegetazione a carattere silvatico, nella quale si inquadra all'aurora della storia, la vita delle nostre popolazioni.

Digitized by Google

LETTURE

ANDREA NACCARI

Commemorazione letta dal Socio naz. resid. ALFREDO POCHETTINO

Dopo la dipartita di un uomo di scienza, il quale a questa abbia consacrata, durante l'intera sua vita, tutte le sue forze, vien fatto di domandare se sia necessario, per ricordarlo, tesserne un pubblico elogio quasi non bastassero a ciò i risultati del suo lavoro. Ma quando al valore scientifico colui congiunse bontà di animo, nobiltà di carattere, elevatezza di sentimenti, nasce in ciascuno di noi il desiderio intimo di rievocarne l'opera, di ricordarne le virtù, per cercare di rivederlo ancora una volta sotto l'aspetto con cui egli soleva presentarsi a noi, per riavere, sia pure per brevi istanti, la visione di ciò che egli fu nei bei giorni che trascorse in nostra compagnia.

Questo dovrei oggi far io davanti a Voi per Andrea Naccari; questo cercherò di fare, se le mie forze saranno sufficienti, anche perchè è sempre un gran bene ed è sempre una forza rievocare coloro che ci hanno preceduto; si sente così meglio l'orgoglio e l'onere, si acquista così meglio la coscienza di portare in sè il deposito di tradizioni che ci è stato confidato da chi ci precedette.

Nato in Padova il 12 agosto 1841, Andrea Naccari conseguì in quella Università la laurea in matematica nel 1862. Dopo essere stato assistente alla cattedra di Fisica sperimentale dal 1866 al 1874, e professore di Fisica tecnologica dal 1874 al 1878 sempre nell'Ateneo Padovano, il 1° novembre 1878 fu nominato, per concorso, professore ordinario di Fisica sperimentale presso l'Università di Torino e vi rimase fino al Suo collocamento a

Digitized by Google

riposo, per limiti di età, nel 1916: trentotto anni di un insegnamento fecondo che, se cessò ufficialmente in quell'anno, continuò ancora fin quasi alla morte a vantaggio di chi ebbe con Lui consuetudine, perchè la mente ancora vivace e limpida Gli permise di non isolarsi del tutto dalla vita universitaria e accademica.

Direttore della Scuola di Farmacia dal 1879 al 1881, Rettore dal 1889 al 1892, Direttore della Scuola di Magistero della Facoltà di Scienze dal 1908 al 1916, ovunque Egli esercitò le sue funzioni fra il simpatico consenso dei colleghi e degli studenti, e tanta fiducia e tanta venerazione riscuotevano le Sue elette doti di mente e di cuore, tanta alacre forza, malgrado l'età, spirava ancora dalla Sua persona, che la Facoltà di Scienze, dopo il Suo collocamento a riposo, Lo volle a Preside dal 1916 al 1919 e questa Accademia Lo elesse a suo Presidente dal 1918 al 1922. Quanta bontà, quanta equanimità manifestasse nell'esercitare le due altissime cariche, non occorre dire: ognuno di noi sa e, commosso, ricorda. Per il lento, ma purtroppo inesorabile, declinare delle forze, che agli amici quasi non appariva, ma ch'Egli sentiva pur senza parlarne, non volle essere riconfermato nei due posti che la fiducia affettuosa dei colleghi Gli aveva affidato, e, fiero, giustamente fiero di aver lasciato a spalle più valide le due onorifiche cariche, si ritrasse e si limitò a guardar la vita passare con una simpatia sorridente, mantenendosi sempre informato di ogni sforzo si facesse nell'agone scientifico ed elargendo con signorile larghezza quei consigli che la Sua lunga esperienza rendeva oltremodo preziosi.

Uomo di cortesia impeccabile e continua, senza essere mai importuna, ebbe tutte le virtù che avvincono: la fedeltà agli amici pur con quell'arguzia bonaria che è la vera eleganza dell'amicizia, l'equilibrio nella vita che è il vero tratto delle persone di spirito, la semplicità volontaria dell'animo che vale più di tutte le perfezioni intellettuali. Lo avvicinai per la prima volta nel 1917, in un momento triste per tutti, ma particolarmente triste per Lui, in quel fatale novembre 1917 in cui, dopo la sciagura di Caporetto, l'animo di molti Italiani ebbe un istante di smarrimento. Lo trovai con la casa piena di parenti, profughi

Digitized by Google

dai territori invasi dal nemico, che Gli avevano portato le più tristi notizie delle Sue terre devastate, delle Sue sostanze che sembravano compromesse forse per sempre; eppure non potei scorgere in Lui un attimo di rimpianto personale, di debolezza, di sfiducia; ho ancora davanti agli occhi la Sua figura serena, tranquilla; sento ancora la Sua voce calma pronunciare parole di ferma, incrollabile fede. Confesso di non averLo mai ammirato tanto come in quel primo colloquio in cui, mentre io tentavo di esprimerGli la parte che prendevo al Suo particolare dolore, Egli volle deviare il discorso da quanto Lo affliggeva e si mise a parlarmi dei còmpiti che mi attendevano come Suo successore nella cattedra di Fisica, dell'Istituto, del personale di questo, della Facoltà, dandomi con brevi parole, lievemente colorite di veneta arguzia, un ritratto di ciascuno così vivo, così perfetto che io mi sentii, quasi di colpo, completamente inambientato.

Amò la vita e l'amò nella sua forma più nobile e più invidiabile, nel lavoro indefesso, lavoro di insegnante, di scienziato e di maestro. Come insegnante, quanti ebbero la ventura di averLo a professore ne ricordano la maniera di esporre chiara, semplice, precisa, la ricca serie di dimostrazioni sperimentali non vistose, ma sempre convincenti, eleganti, opportune. Seguace convinto del metodo sperimentale, lo consigliava vivacemente ai giovani nel Suo discorso inaugurale del 1881 e, pur riconoscendone le difficoltà, tanto che, " lodato assai „, diceva, " viene in pratica abbandonato sovente perchè troppo esige da chi esperimenta „, invitava tuttavia a lasciarsi guidare prevalentemente dall'esperienza, e soggiungeva: " abbandona il metodo scientifico chi non la verità cerca, ma la conferma di ipotesi preconcette che spesso si chiamano ardite per non dirle stravaganti o insensate „. In quello stesso discorso serenamente consigliava i giovani " a non scoraggiarsi di fronte alle difficoltà, a voler considerare lo studio come un rifugio contro le amarezze, e i suoi frutti, grandi o piccoli che siano, come la vera e unica ricompensa delle fatiche durate „; e concludeva: " In questo nobile arringo v'han premi e conforti non solo per i massimi ingegni, ma anche per i modesti lavoratori. Dalle pene frequenti della vita l'animo trova nella placida attività dello studio un

Digitized by Google

ristoro che non dipende dal plauso altrui; e dal rapido svanire dei sogni più cari, pare che, come a sicuro asilo, si volga alla contemplazione delle leggi della natura, che durano eterne „. Non è dunque da meravigliarsi se un uomo, capace di tali sentimenti, ai quali sempre uniformò la Sua vita, sia diventato il creatore della più fiorente scuola di Fisica sperimentale che sia esistita in Italia, anche fra le angustie di mezzi e di locali di quel laboratorio di via Po, ove si svolse per ben venti anni la Sua attività di scienziato e di docente.

Dei lavori onde, con la Sua operosità scientifica, che mai conobbe tregua, arricchì la letteratura fisica, è difficile discorrere brevemente, sia per il loro numero, sia per la varietà degli argomenti trattati. In tutti eccelle la bontà ed il rigore del metodo, la discussione spassionata e severa dei risultati, talchè questi sono ancora oggi riportati nelle più importanti Raccolte di dati numerici. E invero Egli fu un misuratore per eccellenza: basta leggere quel *Manuale di Fisica pratica*, da lui redatto in collaborazione con il Bellati, e che conserva ancor oggi, dopo cinquant'anni, il merito di essere, nel suo genere, unico ed insuperato, per persuaderci di quanto Egli esigeva dallo sperimentatore e dal misuratore.

Parecchie delle sue prime ricerche si occupano dello studio degli elementi voltaici; fra esse è particolarmente notevole la poderosa monografia su le coppie elettriche e le loro principali applicazioni, per la quale ottenne un premio dal R. Istituto Veneto; tutti restano, questi lavori, un vero modello del genere e portano allo studio del difficile argomento un contributo non indifferente. Così pure possono ben dirsi classici i lavori sul potere termoelettrico del Sodio e del Potassio, che, grazie al superamento di difficoltà sperimentali non lievi, fissano le costanti termoelettriche di questi due metalli; nè si possono passare sotto silenzio lo studio nel quale è risoluta la questione, allora ancora controversa, su la origine delle variazioni di resistenza del microfono e quello su la resistenza elettrica dell'acqua distillata, ove dimostra che su quella può grandemente influire la solubilità del vetro dei recipienti in cui questa è contenuta.

Il riscaldamento degli elettrodi prodotto dalla scintilla elet-

Digitized by Google

trica forma oggetto di una serie di ricerche con le quali il Naccari dimostrò per primo che l'elettrodo negativo si riscalda sempre più del positivo qualunque sia il metallo di cui sono costituiti, come venne successivamente confermato da numerose ricerche posteriori. Quasi contemporaneamente numerose e minuziose determinazioni della solubilità dell'anidride carbonica in acqua permisero al Naccari di estendere i limiti di validità della legge di Henry, dimostrando la inconsistenza di alcune obbiezioni che si erano sollevate contro la sua validità.

Dopo un primo lavoro su l'intensità del fenomeno Peltier a varie temperature, in cui riescì a confermare sperimentalmente la fondamentale relazione fra calore Peltier e temperatura, dedotta per via teorica dal Tait, Egli intraprese, con il Battelli, una serie sistematica di ricerche su l'ardua questione dell'effetto Peltier nei liquidi: i risultati conseguiti sono di fondamentale importanza in quanto non solo mettono fuori questione l'esistenza dell'effetto stesso, ma permettono ancora di calcolarne il valore assoluto. Nè meno importanti sono le celebri Sue determinazioni dei calori specifici di alcuni metalli, in special modo del Mercurio, dalla temperatura ordinaria fino a 320°, le quali, per il rigore del metodo e per l'abilità sperimentale con cui vennero condotte, possono ben porsi accanto a quelle classiche di Regnault.

I Suoi lavori su la conduzione dell'elettricità attraverso i gas, compiuti a varie riprese, stupiscono per la intuizione pressochè esatta ch'Egli ebbe in questo campo di fenomeni, allora quasi del tutto inesplorato; basta leggere gli argomenti con i quali, dallo studio della conducibilità assunta dall'aria per effetto di scariche elettriche o della lenta ossidazione del Fosforo, il Naccari sostiene l'ipotesi, allora appena abbozzata, che la conducibilità dell'aria sia di natura ionica.

Infine le esperienze sul fenomeno del riscaldamento dei corpi isolanti solidi e liquidi in causa di successive polarizzazioni elettrostatiche sono da tutti riconosciute come quelle che dimostrano irrefragabilmente che il fenomeno è dovuto a cause analoghe a quelle per cui si sviluppa calore nei cicli magnetici o elastici affetti da isteresi; e così sono da ritenersi fondamentali le espe-

Digitized by Google

rienze su le cariche residue dei dielettrici liquidi in quanto dimostrano la insufficienza della teoria maxwelliana sui dielettrici. Nell'ultimo lavoro sperimentale del Naccari è scoperto e descritto il fenomeno dell'aumento di conducibilità del Toluene sotto l'azione della luce; fenomeno particolarmente interessante sia per il notevole effetto che producono le radiazioni meno rifrangibili, sia perchè sembra trattarsi di una vera e propria fotoionizzazione di massa.

Con ciò ho ricordato solo una parte dei lavori del Naccari; troppo lungo sarebbe il riassumere ancora i Suoi studi: sul numero di Poisson nel caucciù, su i fenomeni termici prodotti dal passaggio dell'elettricità attraverso i gas rarefatti, su la misura diretta della pressione osmotica, su la determinazione del coefficiente di dilatazione dell'acqua fra 0° e 4°, su la tensione massima dei vapori, su la velocità di evaporazione, le varie monografie fra le quali mi piace ricordare quella su le misure e su le unità elettriche assolute, e la vita di Michele Faraday; in tutti questi lavori si trovano discussioni acute, osservazioni critiche, esami accurati di metodi sperimentali, da costituire sempre una lettura eminentemente proficua per coloro che si dedicano alla Fisica.

Dall'esame dell'opera scientifica del Naccari si deve riconoscere che il Suo nome non resta legato ad un fenomeno nuovo o ad una scoperta vera e propria; questo è vero, ma l'edificio che faticosamente la scienza viene costruendo non è solo costituito dalle pietre angolari: è pur necessario anche il lavoro paziente e magari talvolta minuzioso di coloro che preparano il materiale cementizio fra quelle. D'altronde, nel campo della Fisica, i lavoratori coscienziosi, prudenti, probi, come il Naccari, forniscono con le loro ricerche la base indispensabile per le costruzioni ulteriori, in quanto presentano quell'insieme di fatti sperimentali e di misure, del quale qualunque successivo sviluppo delle nostre conoscenze dovrà tener conto perchè incrollabilmente dimostrati i primi, al sicuro da ogni critica le seconde. E il lavoro scientifico di Andrea Naccari fu sempre giustamente apprezzato: infatti Gli valse la nomina a Socio della nostra Accademia, dell'Accademia dei Lincei, della Società Italiana delle Scienze

Digitized by Google

detta dei XL, dell'Istituto Veneto, dell'Accademia Gioenia e dell'Accademia Pontaniana.

Quando, nel 1916, Egli dovette abbandonare l'insegnamento, non volle onoranze. Eppure, se avesse consentito a lasciarSi tributare l'omaggio dovutoGli, quanti Gli avrebbero gettato il grido della riconoscenza, quanti Gli avrebbero rivolto il saluto di figlio! Eppure il Suo cuore nobilissimo avrebbe provato la più pura delle gioie, che possa rallegrare un Maestro, nel vedersi intorno fra i Suoi allievi il fior fiore dei fisici italiani. La modestia Lo trattenne dal ricevere solennemente l'omaggio che sarebbe certamente stato spontaneo e sentito...; forse Lo assalse ancora un pensiero malinconico: non avrebbe, ahimè!, potuto essere fra i presenti il Suo allievo prediletto; proprio in quell'anno il vecchio Maestro aveva deposta definitivamente la penna dopo aver scritta la necrologia di Angelo Battelli.

Pensatore sereno, sperimentatore coscienzioso, maestro sincero e cordiale, tale fu lo scienziato; tempra equilibrata, amico leale, cittadino intemerato, degno della stima e dell'affetto di tutti, tale fu l'uomo. Egli, partendosi da noi, ha lasciato un vuoto, un posto vuoto che non ci sappiamo rassegnare a veder tale, in quanto la Sua figura è ancora alla soglia della nostra memoria; è appena un po' indietreggiata; no, la morte non ha interamente distrutta per noi la personalità di Andrea Naccari, Egli è soltanto invisibile e ... tace.

Digitized by Google

Il componente [1] atlantico della Flora piemontese.

Nota del Dott. GIOVANNI NEGRI

presentata dal Socio nazionale residente O. Mattirolo

1. — È noto come l'influenza climatica esercitata dall'Atlantico sulla vegetazione europea trovi la sua più chiara espressione nella costituzione della grande foresta di latifoglie soggette a riposo invernale che, dalla sponda dell'Atlantico, fra la costa norvegese e la foce del Tago, si spinge verso l'interno del continente, occupando, da prima tutto lo spazio interposto fra il fascio delle

(1) Il termine di *componente* è usato nel senso definito da Reichert (*R. I. Die Pilzflora Aegyptens*, " E. Englers Bot. Jahrb. für Syst. usw. „, Bd. LV, pp. 632-638) nel suo interessante tentativo di mettere ordine nella terminologia corologica e di chiarire il valore del termine *elemento* proposto, com'è noto, dal Christ nel 1867, ma complicatosi col progredire degli studi fitogeografici ed oggi troppo diversamente compreso. Indico dunque io pure, rispettivamente col termine collettivo di *componente*, l'assieme delle specie della flora in istudio che hanno una medesima distribuzione attuale; con quello di *elemento*, il complesso delle specie per le quali può presumersi ragionevolmente una medesima origine; ed infine con quello di *migrante*, l'assieme delle specie che hanno compiuta una medesima migrazione, per raggiungere il distretto del quale viene studiata la popolazione vegetale. Reichert osserva giustamente che le nozioni di elemento e di migrante possono essere intese in senso *locativo* ed in senso *storico* a seconda che, per l'elemento, si consideri il luogo od il tempo delle origini, pel migrante, la via percorsa nella migrazione od il periodo in cui questa è avvenuta. Cfr. anche su questo argomento Jerosch M., *Geschichte und Herkunft der schweizerischen Alpenflora*, Leipzig, 1903; Braun-Blanquet Jos., *Essai sur les notions d'élément et de territoire phytogéographiques*, " Arch. des Sciences Phys. et Nat. „, Genève, 1919, p. 497.

Digitized by Google

catene montuose che limitano il bacino mediterraneo verso il Nord e le coste dei mari del Nord e del Baltico, poi restringendosi a foggia di cuneo raggiungente con l'apice l'estremità inferiore della catena degli Urali e compreso fra le steppe dell'Europa orientale ed il tratto Nord-Europeo della grande Selva Eurosiberiana di conifere, espressioni rispettive di due climi sostanzialmente diversi.

Su questa grande area silvatica le condizioni ambientali sono però tutt'altro che uniformi poichè il clima vi presenta tutte le transizioni dal tipo bretone costiero al tipo polacco continentale (1) e la vegetazione vi muta, corrispondentemente e nello stesso ordine, nei distretti atlantico, baltico-centro-europeo ed europeo-nord orientale (2), oltrechè per un progressivo aumento della continentalità, anche per una ragione inerente alla storia della vegetazione stessa. Tale ragione consiste nell'influenza inequivocabile delle vicende climatiche del periodo glaciale, le quali obbligarono la maggior parte della vegetazione centro europea a ripetute trasgressioni verso la regione mediterranea, soggetta, a sua volta e nelle medesime circostanze, ad un regime pluviale e forestale; mentre su di una striscia di territorio attiguo all'Oceano, forse più larga di quanto non sia oggi il distretto atlantico pei maggiori rapporti che la costa doveva assumere allora con gli arcipelaghi costieri, la vegetazione sfuggì, entro un certo limite, alle conseguenze della crisi glaciale e tanto più facilmente pel suo carattere oceanico, conservando un certo numero delle sue specie terziarie e probabilmente anche i lineamenti generali della sua fisonomia ecologica. È comprensibile l'interesse presentato dallo studio delle condizioni e delle vie di penetrazione nell'interno del continente di queste specie naturalmente poco preparate, dalle condizioni originali a cui sono state soggette, a tollerare le variazioni ampie e brusche della temperatura, il gelo, e l'anastatismo edafico, e prediligenti anzi, in genere, un terreno sabbioso

(1) De Martonne E., *Traité de Géographie Physique* (4ª ed., Paris, 1925), I, pp. 272-278.

(2) Hayek A., *Allgemeine Pflanzengeographie*, Berlin, 1926, pp. 310-313.

Digitized by Google

o per lo meno sciolto ed umido. L'argomento ha infatti occupato, da un secolo a questa parte, parecchi naturalisti, a cominciare da A. P. De Candolle e da A. Grisebach (1). Più recentemente poi la questione ha assunto un particolare rilievo per le pubblicazioni di studiosi, sia francesi (2), che illustrarono assai più minutamente di quanto non sia stato fatto sinora la composizione e le condizioni di diffusione della vegetazione atlantica verso l'interno del continente, sia svizzeri, bavaresi e polacchi (3), che ricercarono, in seno alla popolazione vegetale dei loro paesi, le specie migranti dall'occidente e procurarono di precisare le vie della loro penetrazione.

L'Italia, situata completamente a mezzogiorno della grande fascia montuosa sud-europea e la regione mediterranea in genere, evitata, nella Francia stessa, dalle specie atlantiche più signi-

---

(1) De Candolle A. P., *Rapports sur deux voyages botaniques et agronomiques dans les dépts. de l'ouest et du sud-ouest de la France*, « Mém. de la Soc. d'Agr. du Dépt. de la Seine », X, 1808, pp. 21-24; Grisebach A., *Ueber den Einfluss des Klimas auf die natürliche Begrenzung der Floren*, 1838; Id., *Ueber die Vegetationslinien des nordwestlichen Deutschland*, Göttingen, 1847.

(2) Braun-Blanquet Jos., *L'origine et le développement des flores dans le Massif central de France*, Paris-Zürich, 1923, pp. 105-144; Chevalier A., *Les espèces atlantiques de la flore française et la genèse des peuplements végétaux actuels de l'ouest et du nord-ouest de la France*, « Assoc. pour l'Avanc. des Sciences », Bordeaux, 1923; Idem, *Rapports entre la végétation de la Normandie et du Massif Breton et celle de la Grande Bretagne*, « Bull. de la Soc. Bot. de France », LXX, Paris, 1923, pp. 598-623; Allorgen P., *Étude sur la flore et la végétation de l'ouest de la France. I. A propos des espèces atlantiques de la flore française*, « Ibid. », LXXI, Paris, 1924, pp. 1185-94.

(3) Naegeli O., *Ueber westliche Florenelemente in der Nord-ost-Schweiz*, « Ber. d. schweizer. Bot. Gesellsch. », 15° (Bern, 1915), pp. 14-25; Gradmann R., *Das Pflanzeleben der schwäbischen Alb.*, 2. Aufl. (Tübingen, 1900), I, pp. 352-62 e passim; Eichler G., Gradmann R. und Meigen W., *Ergebnisse der pflanzengeographischen Durchforschung von Württemberg, Baden und Hohenzollern*, « Beilage zur Jahresheft des Vereins für Vaterländische Naturkunde in Württemberg Jahrg. », 68, 1912, p. 279 e segg.; Hegi G., *Mediterranee Einstralungen in Bayern*, « Abh. bot. Ver. Prov. Brandemburg », XLIV, 1900; Troll K., *Ozeanische Züge in Pflanzenkeid Mitteleuropas*, Festgabe Erich von Drygalski, München und Berlin, 1925; Czeczott H., *The atlantic element in the Flora of Poland*, « Bull. de l'Acad. Polon. », Ser. B, 1926, p. 361.

Digitized by Google

ficative, sembrerebbero poco o nulla interessate da questa ricerca. È invece degno di nota il fatto che il componente atlantico della nostra flora non è, nè esiguo, nè scarsamente interessante. A parte qualche cenno indiretto e sporadico (1), le sue specie non sono state prima d'ora soggette ad uno studio apposito; ed è anzi questo il còmpito della presente nota, nei riguardi della flora piemontese, che ho avuto campo di conoscere in molti anni di soggiorno e disponendo dei larghi materiali e della tradizionale liberalità scientifica dell'Istituto Botanico di Torino. Spero del resto di potere, in un secondo tempo, dedicare un altro lavoro al componente atlantico della flora toscana e di riassumere poi, in alcune conclusioni generali, il significato della presenza di queste specie per la storia generale della flora del nostro Paese.

Ma è d'uopo anzitutto circoscrivere il campo con un po' di precisione e stabilire il significato di alcune suddivisioni introdotte dagli studiosi nel concetto più generale di componente atlantico. Braun-Blanquet (l. c., pag. 117) osserva che la delimitazione del dominio atlantico verso l'interno non è facile quando la si voglia stabilire in base ai documenti biologici forniti dalla distribuzione delle specie caratteristiche, perchè queste piante, quantunque siano piuttosto delicate, possono penetrare abbastanza avanti nel dominio centro-europeo, approfittando del clima locale moderato e sub-oceanico delle basse montagne. In ogni modo, rimanendo fisso il nome di atlantiche propriamente dette, *eu-atlantiche*, per le specie strettamente localizzate al dominio costiero ed ai territori che ne dipendono senza interposizione di ostacoli fisici capaci di limitare la diffusione delle specie e senza eccessiva estensione verso l'interno del continente, vengono indicate come *sub-atlantiche* altre specie meno strettamente legate al loro dominio di origine, pure trovandovi il loro ottimo di sviluppo e di moltiplicazione; specie in genere gelicole come le precedenti, per lo più mesofite ed idrofite, che si diffondono fa-

(1) Negri G., *La vegetazione del bosco Lucedio (Trino Vercellese)*, "Mem. R. Accad. Sc. di Torino „, S. II, vol. LXII, Torino, 1911, pp. 434-35; Gola G., *La vegetazione dell'Appennino Piemontese*, "Annali di Botanica „, X, Roma, 1912. Cfr. pp. 228-30 e 268.

Digitized by Google

cilmente nella zona silvatica delle catene montuose e si mescolano invece raramente con le specie mediterranee, sia nella zona costiera, sia nelle stazioni interne alle quali queste ultime possono pervenire. Quanto alla capacità di penetrazione verso l'interno del continente, queste specie oltrepassano difficilmente una linea che va press'a poco dall'Adriatico al Baltico. Finalmente ad una categoria più numerosa di specie sempre mesofite e predominantemente gelicole, ma più tolleranti di una condizione di generale continentalità e diffuse effettivamente a tutta la penisola Balcanica, all'Asia Minore ed anche più oltre, il Braun-Blanquet attribuisce il nome di *pseudo-atlantiche.* Molte di queste specie appartengono alla florula satellite delle faggete o delle torbiere centro-europee e per esse Allorge ha preferito il termine forse più felice di *euri-atlantiche.*

Un po' differente è la classificazione proposta da K. Troll, che, rilevando giustamente l'importanza che le catene montuose marginali e peninsulari del Mediterraneo hanno avuto nel facilitare la profonda penetrazione di specie sub-atlantiche in questa regione, e, d'altra parte, il carattere peculiare della vegetazione atlantica più boreale, ha distinto anzitutto il componente oceanico della flora europea in tre gruppi: *atlantico, atlantico-mediterraneo montano* ed *atlantico subartico,* riconoscendo in ciascuno di essi due sottogruppi di degradante oceanicità: *eu-oceanico* e *sub-oceanico.* Salvo ritornare, trattando a suo tempo del componente atlantico della flora toscana, sull'interesse del gruppo atlantico-mediterraneo montano, rilevo qui che le specie della flora piemontese appartengono tutte al gruppo atlantico di Troll ed al sottogruppo euatlantico od euoceanico, che dir si voglia.

2. — Ciò premesso, il componente atlantico della flora piemontese consta delle seguenti specie sub-atlantiche.

1. *Mibora minima* P. B. — Arenili: esempl. in herb. pedemontano sine loco: Novarese, fide Biroli: isolata.
2. *Aira praecox* L. — *In pascuis siccis in montibus di Andrà supra Eporediam; fide Allioni: isolata.*
3. *Corynephorus canescens* P. B. — Arenili della Lomellina e del Vercellese: id. di Cambiano presso Torino: copioso.

Digitized by Google

4. *Rhynchospora fusca* Ait. — Acquitrini brughierosi sugli altipiani diluviali dal Canavese al Lago Maggiore: sporad.
5. *Quercus Toza* Bosc — Boschi submontani della bassa Val Susa: spor.
6. *Illecebrum verticillatum* L. — Acquitrini brughierosi degli altipiani diluviali del Vercellese e Novarese: raro.
7. *Sagina subulata Presl.* — Arenili sul pendio prealpino, altipiani diluviali, alluvioni nel Canavese e Vercellese: sporadica.
8. *Elatine hexandra* D. C. — Acque fluenti e risaie dell'alta pianura piemontese orientale: sporadica.
9. *Hypericum Desetangsii* Lamotte. — Acquitrini brughierosi nel Vercellese: regione montana Alpi Marittime: sporadico.
10. *Hypericum humifusum* L. — Boschi submontani delle Valli prealpine e brughiere umidicce degli altipiani diluviali; diffuso.
11. *Astrocarpus purpurascens* Duby. — Rupi serpentinose della zona montana dell'Appennino settentrionale: sporadico.
12. *Barbarea praecox* R. Br. — Vaude torinesi e vercellesi e zona submontana e montana Alpi Marittime: sporadica.
13. *Barbarea intermedia* Bor. — Ghiaiosi umidi summontani e montani nelle Alpi Marittime e in Val d'Aosta: sporadica.
14. *Brassica monensis* Huds. — Rupestri, ghiaiosi ed arenosi nella zona montana e submontana: nelle Alpi Marittime, Valle di Susa, Lanzo (*fide Allioni*) ed Aosta; sporadica.
15. *Helleborus foetidus* L. — Boschi submontani e montani delle propaggini esterne delle Alpi Occidentali: diffuso o sporadico secondo i distretti.
16. *Sedum hirsutum* All. — Rupi non calcaree nella zona submontana e montana delle Alpi Marittime e Cozie: spor.
17. *Cytisus scoparius* Lk. — Boschi montani dei pendii esterni delle Alpi e dell'Appennino, altipiani diluviali, brughierosi, arenili: diffuso.
18. *Genista pilosa* L. — Sabbiosi sul pendio submontano esterno delle Alpi, Appennino nella zona montana, altipiani diluviali: sporadica.
19. *Ornithopus perpusillus* L. — Arenili della Lomellina e delle alluvioni della Sesia nel Vercellese: raro.
20. *Hydrocotyle vulgaris* L. — *Circa lacum Aviglianae et secus flumen Sangone in agro januensi: fide Allioni.*
21. *Conopodium denudatum* Koch — Faggete della zona montana dell'Appennino piemontese: sporadico.
22. *Petroselinum segetum* Koch — *Inter segetes agri Pinerolensis: fide Allioni.*
23. *Apium inundatum* Rchb. — *In humentibus di Rocca di Corio: fide Allioni.*

Digitized by Google

24. *Meum athamanticum* Jacq. — Pascoli della zona montana in tutto l'arco alpino: sporadico.
25. *Oenanthe peucedanifolia* Poll. — Boschi acquitrinosi submontani e vaude canavesane: sporadica.
26. *Oenanthe crocata* L. — *Circà Lacum S. Michaëlis prope Eporediam: fide Allioni.*
27. *Polygala serpyllacea* Weihe — Pascoli montani e submontani umidi nelle Alpi Marittime e in Val d'Aosta: sporadica.
28. *Euphorbia Gibelliana* Peola — Boscaglie sassose alla Madonna della Neve sopra Givoletto e fra la Cresta di Calcante e le Lunelle in Val di Viù sopra Pessinetto: isolata.
29. *Anagallis tenella* L. — Pascoli umidi montani nell'Appennino Piemontese: sporadica.
30. *Linaria monspessulana* Mill. — Incolti ghiaiosi soleggiati dell'alta Valle di Susa: diffusa.
31. *Simbuleta bellidifolia* Wettst. — Arenili Sesto Calende e Mortara; fra Borgomasino e Cossano; sull'Appennino piemontese fra Gavi e Grognardo: sporadica.
32. *Scrofularia aquatica* L. — Acquitrini montani e submontani delle propaggini esterne delle Alpi Marittime e Cozie; Colline Torinesi (?): sporadica.
33. *Digitalis lutea* L. — Boschi sassosi summontani e montani lungo l'arco alpino-appenninico: sporadico.
34. *Orobanche Rapum-genistae* Thuill. — Parassita sul *Cytisus scoparius* nelle stazioni corrispondenti.
35. *Teucrium Scorodonia* L. — Boschi submontani e montani dell'arco alpino ed appenninico: diffuso.
36. *Scutellaria minor* Huds. — Brughiere umidiccie sulla Serra d'Ivrea: isolata.
37. *Centaurea nigra* L. — Incolti erbosi ad Alba; in Val d'Aosta ed a Riva Valdobbia: isolata.

L'esame di questo elenco ed il richiamo alle condizioni ecologiche offerte alle specie dalle stazioni che esse occupano in Piemonte, bastano a mostrarci come i rappresentanti della vegetazione atlantica godano effettivamente, nella nostra regione, di condizioni approssimativamente corrispondenti a quelle del loro paese d'origine. Carattere generale delle loro stazioni anche da noi è il geloidismo del substrato — sabbia, ferretto, feltro erboso — (tre tra le specie elencate presentano un certo grado di alicolismo: *Helleborus foetidus*, *Brassica monensis* e *Digitalis lutea*), mantenuto eustatico dalla permanente ricchezza d'acqua (scarse le specie xerofile: le due alicole citate, più *Astrocarpus purpurascens*,

Digitized by Google

Linaria monspessulana, Simbuleta bellidifolia, Teucrium Scorodonia, gelicole od indifferenti); ed è quindi costante il carattere stenohalino ed anche stenotermico dell'habitat di queste specie.

Per quanto riguarda la stenotermia è bene dir subito che la contraddizione fra il carattere piuttosto continentale del clima piemontese e la penetrazione nella nostra regione di una notevole corrente di specie oceaniche, è soltanto apparente quando si trasporti il fenomeno immigratorio in un'epoca dominata da un clima più favorevole, come vedremo in seguito. Quanto alla localizzazione ed alla conservazione del componente oceanico nelle stazioni in cui lo riscontriamo oggigiorno, essa dipende anzitutto da condizioni di umidità atmosferica limitanti in misura notevole l'escursione termica locale ed in secondo luogo dalla natura del terreno. Il meccanismo secondo il quale entra in gioco il fattore edafico è stato già precisato da Gola (1), ricordando, a proposito di casi di abbassamento dei limiti altimetrici della vegetazione, come le condizioni osmotiche del terreno abbiano una notevole importanza non solo nel determinare i caratteri della stazione in un medesimo ambiente climatico, ma altresì nello spiegare l'analogia di stazioni situate in ambienti climatici differenti. La osservazione calza perfettamente anche nel nostro caso, perchè le specie atlantiche penetrate, come vedremo, in Piemonte in corrispondenza della zona silvatica montana, il carattere ecologico della quale può, fatta eccezione per particolari stazioni xerofile, essere definito un generale eustatismo edafico e climatico, si sono diffuse poi alle stazioni planiziarie grazie all'esistenza di aree argillose (ferrettizzate), torbose od anche arenose umide, offrenti alle piante concentrazioni così basse da compensare la più lunga durata e la maggiore intensità del periodo di traspirazione.

Quanto poi alle particolarità geografico-topografiche che possono avere facilitata e completata l'azione del terreno, determinando particolari condizioni atmosferiche, Troll ha già rilevato (l. c.) come la presenza delle specie atlantiche lungo il versante

(1) Gola G., *Saggio di una teoria osmotica dell'edafismo*, « Annali di Botanica », VIII, Roma, 1910. Cfr. p. 250.

Digitized by Google

meridionale delle Alpi coincida colla diffusione del caratteristico clima insubrico, determinato dalle precipitazioni abbandonate sui primi pendii prealpini dagli umidi venti meridionali che vengono a urtarvisi e che riconcentrano in pioggia la loro umidità, nonchè dalla presenza dei grandi bacini lacustri; inoltre anche dalla mancanza, in corrispondenza dell'arco Alpino occidentale, di una fascia alpina calcarea capace di introdurre nelle stazioni un fattore modificante dell'eustatismo. Una precisione di dettaglio hanno introdotto Wilczeck e Vaccari dimostrando (1) appunto come anche il Canavese rappresenti un'isola di clima insubrico malgrado l'assenza di grandi bacini lacustri e rilevando come, a partire dalle Alpi Marittime, la larga fascia di terreni gneissici e granitici che si stende quasi ininterrottamente sulla parte esterna dell'arco Alpino sino a raggiungere il Lago Maggiore, abbia costituito la via di espansione delle specie calcifughe; ed io stesso (2) ho rilevato la presenza di una terza oasi mesoterma e stenoterma, dotata di piovosità abbondante e frequente e di umidità atmosferica permanentemente elevata, insomma di un'altra isola di clima insubrico, nel settore saluzzese il quale, anche per ragioni petrografiche, è geloide; ed insistito più recentemente (3) sull'importanza fitogeografica della cintura climatica stenoterma e umida che orla, con sufficiente continuità, il piede delle Alpi piemontesi, rivelata anche dalla fisonomia del paesaggio tipicamente brughieroso.

Ad uguali conclusioni conduce uno studio più minuto della distribuzione delle pioggie (4). Il Piemonte infatti possiede un

---

(1) Vaccari L. e Wilczeck C., *La vegetazione del versante meridionale delle Alpi Occidentali,* « Nuovo Giornale Botanico », nuova serie, XVI, Firenze, 1909, p. 179 e segg.

(2) Negri G., *La vegetazione di Monte Bracco* (*Saluzzo*), « Mem. della Società Italiana delle Scienze detta dei XL », Serie III, XXI, Roma, 1920, pp. 103-110; Roster G., *Climatologia dell'Italia*, Torino, 1909.

(3) Negri G., *Le colonie vegetali xerotermiche della Val di Susa, ecc.*, « Mem. della R. Acc. Naz. dei Lincei », Serie V, XIII, 1922, p. 724, Nota 1.

(4) Anfossi G., *La pioggia nella regione ligure*, Mem. Geografica della « Rivista Geografica Italiana », N. 17, Firenze, 1911, id.; *La pioggia in Piemonte e nelle Alpi Occidentali*, Ibid., N. 21, Firenze, 1913.

Digitized by Google

tipo di precipitazione nel quale, ad un massimo primaverile, si accompagna un secondo rialzo autunnale abbastanza accentuato per ricordare la consimile presenza di due massimi di piovosità nelle stazioni della costa atlantica. Si aggiunga che, nella pianura piemontese, il periodo più scarso di precipitazioni è rappresentato dai mesi invernali, meno rilevanti nelle nostre regioni sotto il punto di vista dei fenomeni vegetativi di quanto non lo sieno gli estivi. La scarsa piovosità estiva può infatti rappresentare una condizione ostile o per lo meno strettamente limitante della diffusione della vegetazione atlantica; è sotto questo aspetto che interessa al caso nostro il rilevare che la piovosità dei mesi estivi è, nell'alta pianura piemontese, abbastanza notevole.

E poichè abbiamo precedentemente ricordato la corrispondenza del particolare paesistico rappresentato dalla fascia prealpina di brughiere alle condizioni generali di un clima sub-oceanico, è il caso di aggiungere qui che, anche i pendii prealpini, presentano un carattere simile colla loro zona di faggete che scompaiono nella parte interna delle valli, ma popolano vigorosamente le propaggini esterne della catena, spingendo anche, nei settori più piovosi, il proprio limite inferiore a quote eccezionalmente basse e presentandovi una forte dilatazione della zona intercedente fra le più basse quote del faggio dominate e quelle del faggio sporadico (1). È inoltre da ricordare, per la stessa ragione, la frequenza delle colonie prealpine di specie francamente oceaniche, anche se classificabili da un punto di vista corologico come pseudo-atlantiche, quali il *Taxus baccata* e l'*Ilex aquifolium* (2) le quali rappresentano un indice climatico molto dimostrativo dell'esistenza di condizioni ambientali favorevolissime, per lo meno in un tempo non troppo lontano da noi, al transito lungo i pendii prealpini di una corrente migratoria di specie subatlantiche.

---

(1) Negri G., *Sul limite altimetrico inferiore del Faggio nel bacino padano*, "Ann. della R. Acc. di Agricoltura in Torino „, LXII, Torino, 1919.

(2) Negri G., *Appunti ecologici sul Taxus baccata L. in Piemonte*, "Ann. della R. Acc. di Agricoltura di Torino „, LXIII-LXIV, Torino, 1920-21.

Digitized by Google

Persino l'esistenza, nelle stazioni sabbiose della bassa pianura Lomellina, di un certo numero di specie sub-atlantiche molto significative, una delle quali, il *Corynephorus canescens*, diventa addirittura dominante e caratteristica, è giustificabile ecologicamente col geloidismo della sabbia silicea ed umida per la vicinanza della falda acquea e probabilmente coll'alto grado della umidità atmosferica, coincidenti nel determinare, in queste stazioni che sembrerebbero a primo aspetto assolutamente xerofile e che albergano effettivamente qualche specie mediterranea e assai termofila, una condizione di sufficiente eustatismo per aver permesso la conservazione delle specie atlantiche, qualcuna delle quali vi si è addirittura esclusivamente localizzata, attraverso tutte le vicende attraversate dalla pianura padana dopo il ritiro dell'ultima grande espansione glaciale.

3. — Giustificata così ecologicamente, la presenza del componente atlantico nella zona silvatica e padana del Piemonte, vediamo ora quale via possono aver seguita le sue specie per raggiungere le stazioni attuali e quando questa migrazione possa essere avvenuta.

È anzitutto necessario osservare come non tutte le nostre specie atlantiche abbiano attualmente anche in Francia una diffusione generale ed uniforme, tenuto pure conto della frammentarietà delle stazioni adatte; e come, d'altra parte, il grande arco montuoso, costituito dalle Alpi Occidentali e dall'Appennino settentrionale, non sembri, nelle condizioni climatiche attuali, attraversabile in un punto qualunque da una delle specie gelicole, eustatiche, preferenti un substrato disgregato e sopratutto insofferenti del gelo, quali sono le nostre, quantunque alcune di esse si incontrino nella zona silvatica montana ad altezze non inferiori ai valichi che potrebbero avere attraversato, ma sempre in condizioni di sporadicità tali da farle considerare piuttosto come relitti di un'area frammentata, che come avamposti di specie in via di progressione. Avremo occasione di accennare più avanti al fatto che anche altri studiosi, che si sono occupati della diffusione delle specie atlantiche, considerano questo componente piuttosto in via di regresso che di avanzata sui suoi limiti con-

Digitized by Google

tinentali (Braun-Blanquet, l. c.). Infine anche la distribuzione che le specie atlantiche presentano attualmente in Piemonte, in generale, come abbiamo veduto, molto lacunosa, può essere bensì in parte ascritta alle profonde modificazioni del paesaggio botanico consecutive alla prolungata e intensa azione dell'uomo, ma non completamente spiegata da questo solo fattore; ciò che, poichè mutazioni sostanziali nella composizione generale dei terreni dalla fine del quaternario in qua non sono concepibili, ci induce a pensare ad un mutamento climatico. Si aggiunga anche la considerazione della caratteristica povertà dei mezzi di disseminazione di queste specie. Più di metà di esse infatti manca affatto di disposizioni adatte a questo scopo, tre specie presentano disposizioni bolocore, inefficienti quindi per il trasporto dei disseminuli fra stazioni anche poco disgiunte, tre hanno apparecchi adesivi che possono però, come per solito, essere interpretati anche come apparecchi di ancoraggio, due, chiaramente zoocore, appaiono d'altra parte oggi strettamente accantonate, ed infine il rimanente è dotato di semi molto piccoli, particolare che viene abitualmente interpretato come un mezzo di larga diffusione, ma che rappresenta anche una condizione di eccezionale labilità dei disseminuli e che non sembra in ogni modo avere posseduto, nei casi in questione, una particolare efficienza distributiva.

La disgiunzione attuale delle specie atlantiche non può rappresentare dunque che una condizione di relitto e la loro diffusione deve essere stata, a suo tempo, legata ad uno stato generalmente eustatico ed umido del clima e del substrato ed essere avvenuta per piccolissime tappe, possibili data una contiguità delle stazioni adatte assai maggiore di quella che si riscontra ora.

Noi sappiamo che una condizione di questo genere si è effettivamente e ripetutamente verificata durante il quaternario. La interpretazione più soddisfacente delle crisi glaciali del quaternario, almeno per chi voglia tener conto non soltanto dei documenti geologici e fisiografici, ma anche di quelli paleontologici e biologici, è quella che li considera come dovuti ad alternanze di fasi climatiche rispettivamente ed eccezionalmente ricche di precipitazioni atmosferiche e di carattere oceanico, od assai povere

Digitized by Google

di piovosità e di carattere continentale. L'inlandsis centro-europea non avendo, come s'è già ricordato, raggiunto verso occidente la zona litoranea francese ed avendone quindi rispettata, in una misura probabilmente molto larga, la vegetazione, le specie atlantiche si sono trovate, a parecchie riprese, nelle migliori condizioni per invadere assai profondamente l'entro-terra europeo e naturalmente anzitutto la Francia settentrionale e centrale, in misura minore la Francia mediterranea per ragioni climatiche delle quali anche oggi la distribuzione delle specie atlantiche francesi conserva la traccia.

Neppure però col favore del clima che preparava ed accompagnava le singole espansioni glaciali, la maggior parte dell'arco alpino occidentale dovette diventare permeabile per le specie che c'interessano. Sappiamo infatti (1) come, quantunque siano su-

---

(1) Per quanto riguarda i rapporti del limite continentale della diffusione dell'*Ilex aquifolium* colla temperatura minima invernale e col decorso della isoterma *zero* per il mese di gennaio cfr. la diffusa ed esauriente discussione in Eichler, Gradmann e Meigen, l. c. Tale limite coincide effettivamente col decorso della isoterma 0 per il mese di gennaio, la quale deve però essere considerata essenzialmente come un mezzo di espressione di tutto quel complesso di contrasti che noi rileviamo, confrontando il clima costiero col clima interno; allo stesso scopo potremmo anche scegliere un altro simbolo, per es. il decorso della linea di uguale durata annuale del gelo. Quanto complesso sia poi l'apprezzamento del valore di un fattore climatico di questo genere come indice delle cause che provocano la persistenza o la scomparsa di una specie in una determinata stazione, appare anche dai dati riferiti da Gradmann (Schäb. Alb., l. c., pp. 359-62) e tratti da osservazioni, tanto sue che di Focke (1893), sulla resistenza al clima invernale dimostrata dal *Cytisus scoparius* sul limite della sua penetrazione orientale. Focke rileva che la porzione aerea, e principalmente i rami verdi della pianta, vengono danneggiati dai venti secchi dell'est, quando cessa l'afflusso acqueo dal suolo, reso fisiologicamente secco dal gelo; e Gradmann (l. c.) si chiede se, indipendentemente dalla accertata ripugnanza di questa specie e della maggior parte delle altre atlantiche per il substrato aloide dei settori calcarei, la ragione della preferenza che le specie atlantiche dimostrano, tanto più spiccatamente quanto più ci avanziamo verso il loro limite orientale, per i substrati sabbiosi, non dipenda sopratutto dalla facilità colla quale le loro radici possono, attraverso il terreno sciolto, raggiungere falde acquee relativamente profonde.

Digitized by Google

scettibili anche oggigiorno di mantenersi nella zona silvatica montana, esse presentino una insofferenza per il gelo che le esclude completamente dalla zona alpina; esse sono sempre anzitutto delle mesofite, non tanto sotto l'aspetto dell'umidità, quanto sotto quello della temperatura. Le condizioni climatiche poi, accompagnanti le glaciazioni, implicando un forte dilavamento dello sfatticcio superficiale e l'abbondante umificazione del suolo forestale, dovettero piuttosto facilitare, anche a specie gelicole come le nostre, la diffusione lungo le foreste submontane rivestenti la fascia esterna calcarea delle Alpi occidentali; ma non la penetrazione in profondità nella catena alpina, almeno in corrispondenza delle Alpi Graie e delle Alpi Pennine, occupate, durante il periodo di espansione delle glaciazioni, dagli enormi apparati glaciali, ed invece, nei periodi interglaciali, dalla più o meno ampia zona xerica (1) che anche oggi caratterizza la zona alpina centrale e che non è certamente propizia alla diffusione di piante preferenti un clima oceanico. La distribuzione delle precipitazioni nelle Alpi occidentali presenta del resto anche oggi due accentuazioni (2), una in corrispondenza del settore settentrionale, più accentuata e tale da far pensare che, in corrispondenza di essa, le specie atlantiche, attraversata la Francia centrale, si siano avviate verso l'Europa media, contornando a nord il massiccio alpino che, come s'è detto, in questo punto non potevano attraversare; l'altra meridionale, in corrispondenza ed in continuazione dell'Appennino settentrionale, irrorati sul versante meridionale dalle pioggie portate dai venti provenienti dal mare. Questo centro di maggiore piovosità è separato dal precedente da un settore xerico rappresentato dalle Alpi Cozie; ed io non conosco, come penetrate sicuramente nella pianura padana pei colli di questo tratto alpino, quantunque esso sia mediamente meno elevato e meno profondo dei settori Graio

---

(1) Braun-Blanquet Jos., *Die Föhrenregion der Zentral-alpentäler insbesondere Graubündens in ihre Bedeutung für die Florengeschichte*, " Verhandl. der Schweiz. Naturforsch. Gesellsch. „ 98. Jahresversamml. Schuls, 1916.

(2) Blanchard R., *Les Alpes françaises*, Paris, 1925. Cfr. *Le climat et la végétation*, pp. 21-31.

Digitized by Google

e Pennino, che tre specie atlantiche, *Quercus Toza*, *Brassica monensis* e *Linaria monspessulana*, specie che, del resto, si distinguono ecologicamente dalle altre del componente atlantico, per un carattere di minore mesofitismo, anche se la loro distribuzione le fa considerare come specie atlantiche (1).

Le Alpi Marittime invece e tanto più l'Appennino settentrionale, possiedono passi scendenti in piena zona silvatica e sfuggiti, anche durante il quaternario, alle glaciazioni relativamente poco estese. Questi colli possono quindi considerarsi come la via maestra di penetrazione del componente atlantico della flora piemontese (2). Le specie atlantiche, diffuse nei boschi montani mesofiti e passate sul versante interno, debbono aver ripreso, a ritroso e sempre mantenendosi nella zona silvatica, il cammino verso l'estremità superiore del bacino padano e contornandolo sulla traccia del cingolo boscoso pedemontano del quale abbiamo parlato, salvo ad assumere una quota sempre più bassa man mano che l'influenza del mite clima prealpino andava accentuandosi e rendendo possibile la loro diffusione alla pianura diluviale.

---

(1) Negri G., *L'Acer Opalus Mill. nel bosco submontano di Valle di Susa*, Ann. della R. Acc. di Agricoltura di Torino „, LXIV, 1921.

(2) Un argomento complementare di valore non trascurabile in favore del transito delle specie atlantiche attraverso la catena meridionale alpina ed appenninica verso il bacino padano è costituito dalla presenza in Liguria di quasi tutte le specie del componente atlantico piemontese. Al componente atlantico ligure appartengono infatti, per quanto sappiamo a tutt'oggi, le specie seguenti: *Mibora minima* P. B., *Rhynchospora fusca* Ait., *Carex Mairii* Coss. et Germ., *Hypericum Helodes* Huds., *H. Desetangsii* Lamte, *H. humifusum* L., *H. pulchrum* L., *Astrocarpus purpurascens* Duby, *Barbarea praecox* R. Br., *Brassica monensis* Huds., *Helleborus foetidus* L., *Sedum hirsutum* All., **Ulex europaeus* L., *Cytisus scoparius* Lk., *Genista pilosa* L., *Ornithopus perpusillus* L., *Hydrocotyle vulgaris* L., *Conopodium denudatum* Koch, *Petroselinum segetum* Koch, *Apium repens* Rchb., *Meum athamanticum* Jacq., *Oenanthe peucedanifolia* Poll., *O. crocata* L., **Euphorbia hyberna* L., var. *insularis* Boiss. e var. *Canuti* Parl., *Anagallis tenella* L., **Erica cinerea* L., *Linaria monspessulana* Mill., *Simbuleta bellidifolia* Wettst., *Scrophularia aquatica* L., *Digitalis lutea* L., *Orobanche Rapum-Genistae* Thuill., *Teucrium Scorodonia* L., *Lonicera Periclymenum* L. L'arrivo sino in Liguria di alcune specie euatlantiche (indicate con *) sottolinea l'importanza di questa via d'immigrazioi e

Digitized by Google

Rimane a determinare, nella misura del possibile, la data relativa dell'invasione. S'è detto che la penetrazione di specie atlantiche nel bacino padano non appare possibile oggi, ma è senza dubbio avvenuta a più riprese dopo l'inizio del quaternario e durante fasi climatiche opportune del medesimo e verificatesi in dipendenza dell'alternarsi delle crisi glaciali. Braun-Blanquet ha (l. c.) pure osservato che mentre le specie dell'attuale componente atlantico dell'Europa centrale e settentrionale rappresentano il contingente di un'unica invasione relativamente prossima a noi, senza escludere che esso sia stato preceduto da altre immigrazioni interglaciali completamente distrutte dalla espansione delle inlandsis successive, lo stesso non può dirsi del componente atlantico penetrato nella zona mediterranea. Esso rappresenterebbe piuttosto la somma di specie immigratevi a parecchie riprese, talune assai antiche, approfittando dei ripetuti periodi pluviali verificativisi durante il quaternario. Questa presunzione si appoggia sul numero notevole delle specie atlantiche che incontriamo nella regione mediterranea, distribuite piuttosto nella zona montana, ma scendenti anche, in qualche settore ed evidentemente in seguito a diffusione secondaria, sino alla zona costiera (boschi freschi, paludi, ecc.); sulla profondità della loro penetrazione nella regione; sulla disgiunzione delle loro stazioni, molte delle quali sono oggi insulari e risalgono quindi necessariamente ad un periodo antecedente alla sistemazione odierna del bacino mediterraneo; e finalmente sul numero notevole degli endemismi neogenici, che queste specie hanno originato. Ma anche il Piemonte possiede alcuni di questi endemismi — l'*Euphorbia Gibelliana* varietà della *E. hyberna*, le due forme *brachiloba* e *glabrescens* della *Quercus Toza* — e la maggior parte delle aree delle sue specie atlantiche hanno del resto subìta una evidente frammentazione; e bisogna dunque far risalire la prima comparsa del componente atlantico della nostra regione ad un periodo abbastanza lontano del quaternario. Che le sue specie abbiano potuto resistere alle condizioni climatiche delle glaciazioni successive al loro arrivo, non costituisce una obiezione, prima di tutto a cagione del loro precedente adattamento ad un clima atlantico, che deve aver rese per esse sufficientemente ospitali

Digitized by Google

le estese aree coperte dí foreste mantenutesi nel bacino padano all'infuori dei limiti raggiunti dai ghiacciai nella loro massima espansione (Andersson, l. c.); poi perchè la possibilità di persistenza di specie, specialmente se igro od idrofite, sugli stessi altipiani diluviali, durante il quaternario è stata chiaramente dimostrata da Mattirolo nel suo studio su quell'interessante relitto terziario che è l'*Isoetes Malinvernianum Ces. e De Notrs* (1). Più difficile è spiegare come queste specie abbiano invece superato le fasi di clima continentale intercalate fra le glaciazioni, fasi che dovettero modificare profondamente le condizioni d'ambiente e la corrispondente fisonomia della vegetazione. Ma è verosimile che isole e striscie di vegetazione forestale ed acquitrinosa si siano mantenute lungo i corsi d'acqua ed in depressioni vallive prealpine favorite da particolare umidità, fornendo alle specie mesofite in genere stazioni di rifugio eustatiche; probabile d'altra parte che parecchie di queste specie siano scomparse e reimmigrate più volte. Certamente però l'ultima invasione è avvenuta in una fase climatica post-wurmiana, innanzi tutto, perchè anche una ridiffusione locale spiegherebbe difficilmente la generale frequenza che mantengono oggidì parecchie specie atlantiche quali *Hypericum humifusum, Cytisus scoparius, Teucrium Scorodonia*; ma sopratutto pei caratteri particolari presentati dall'accantonamento di talune delle specie atlantiche più caratteristiche in seno ad una stazione che non può essere che assai recente: quella dei sabbioni dell'alta pianura padana.

Si tratta dei già citati residui di dune continentali un tempo certamente assai diffuse, perchè possiedono specie caratteristiche e comuni, quantunque la loro disseminazione non possa essere spiegata che in condizioni di notevole contiguità. Oggi queste stazioni sono quasi completamente distrutte dall'estendersi delle colture, ma qualche lembo rimastoci nella pianura Lomellina ed anche in quella Torinese (dossi di Gambolò-Mortara, sabbioni di

---

(1) Mattirolo O., *Sull'endemismo dell'Isoetes Malinvernianum di Cesati e De Notaris.* "Annali di Botanica „, X (Roma, 1912) p. 129.

Digitized by Google

Troffarello) (1) alberga parecchie delle specie alle quali ci interessiamo, innanzi tutto il *Corynephorus canescens* dominante e comune alle varie stazioni, poi *Cytisus scoparius, Ornithopus perpusillus, Simbuleta bellidifolia.* Che la poca profondità della falda acquea permetta di spiegare oggi il mantenersi di queste specie nella stazione, grazie all'umidità permanente diffusa alla zona della espansione delle radici in modo da costituirvi un substrato geloide (sabbia) e, del resto, anche nell'atmosfera sotto forma di persistente ed elevata umidità relativa, è facilmente ammissibile; ma è più difficile ammettere che, durante eventuali fasi di tipo steppico, il medesimo habitat abbia convenuto alle medesime specie, perchè la contemporanea presenza nei sabbioni di altre entità strettamente mediterranee (per es. *Alyssum campestre* L.), componente che oggi normalmente non si mescola con l'atlantico, basta a farci riflettere quanto poco occorrerebbe mutare nelle condizioni ambientali odierne per rendere impossibile la persistenza dei rappresentanti del componente atlantico nei sabbioni. Siccome d'altra parte la *Simbuleta bellidifolia* possiede in Piemonte, all'infuori dell'Appennino, le sole stazioni sabbiose del Novarese ed il *Corynephorus canescens* e l'*Ornithopus perpusillus* non s'incontrano che in qualche altra stazione della pianura piemontese orientale edaficamente affine a quelle citate ed esse non dimostrano alcuna tendenza ad acclimatarsi od a diffondersi nelle abbondanti ed estese stazioni arenose che sarebbero loro offerte dalle alluvioni contemporanee, non rimane che da pensare per queste specie ad una immigrazione avvenuta in un tempo in cui le stazioni psammiche erano ancora abbastanza numerose ed il clima evolveva definitivamente verso le condizioni di mesofitismo attuale; in un tempo insomma in cui le crisi climatiche più intense del quaternario erano conchiuse (2).

---

(1) Negri G., *Contributo allo studio della vegetazione dei Sabbioni dell'alta pianura Padana,* "Atti della Soc. Italiana per il progresso delle Scienze „, XIX, Pavia, 1925.

(2) Eichler, Gradmann, Meigen, *l. c.*, p. 314, riassumono la loro opinione sul comportarsi del componente atlantico in rapporto colle oscillazioni climatiche, rilevando come le sue specie, costituitesi sotto l'influsso di un

Digitized by Google

È da augurarsi che anche nelle torbiere così frequenti lungo il margine meridionale della catena alpina vengano eseguite ricerche analoghe a quelle che, in altre regioni d'Europa, si sono dimostrate assai feconde in documenti sulle oscillazioni climatiche che hanno preceduto immediatamente l'epoca attuale. Sarà anzi interessante vedere quale contributo lo studio dei pollini delle torbiere italiane, porterà nella dibattuta questione dell'età delle successioni forestali, dimostratavi dall'ordinata comparsa di tipi pollinici ben caratterizzati, nonchè su quella dei loro eventuali rapporti con gli stadi di retrazione o di arresto verificatisi durante la ritirata della glaciazione wurmiana (1). Qua-

---

clima marittimo, abbondantemente piovoso, con estati fresche ed inverni miti ed adattatesi ad un terreno corrispondentemente povero di calcare, perchè profondamente dilavato e riccamente umificato, hanno necessariamente dovuto guadagnare terreno verso l'interno del continente nelle fasi climatiche più miti intercedenti fra i punti culminanti di due glaciazioni consecutive o durante il declinare della glaciazione wurmiana, e, nel settore povero di calcare del Württemberg, raggiungere il limite normale della loro espansione orientale in corrispondenza del minimum invernale $-23°$ C. (osservato per molti anni consecutivi). Siccome, anche al di là di questo limite, esistono aree sporadiche di clima più mite le quali non presentano attualmente specie atlantiche, si dovrebbe concludere che fra il periodo attuale, che non è rigido, e il periodo di diffusione (o per lo meno dell'ultima diffusione) della flora atlantica, sia interceduta un'ultima fase climatica rigida, in corrispondenza della quale le aree accennate a clima attualmente favorevole si sono spopolate delle loro specie atlantiche. Naturalmente in questo ragionamento bisogna riservare la possibilità dell'eliminazione delle specie oceaniche da qualche stazione da parte di qualche altro fattore altrettanto possibile, quale la brusca variabilità termica, la frequenza di gelate tardive primaverili, l'azione di venti secchi, ecc.

(1) Gams H., *Die Ergebnisse des pollenanalytischen Forschung in Bezug auf di Geschichte der Vegetation und des Klimas von Europa.* In fatto di torbe italiane non possediamo assolutamente altro che le ricerche sommarie di Andersson (*G. A. Beiträge zur Kenntniss des spätquartären Klimas Norditaliens,* XI, Intern. Geologen Kongress, Stokholm, 1910; *Die Veranderungen des Klimas usw.*), concludenti (p. 95) che l'autore non conosce alcun reperto proveniente dalle torbiere italiane, che gli permetta di affermare o di negare con sicurezza l'esistenza di un periodo più caldo dell'attuale verso la fine del quaternario. Inoltre l'A. non si sente autorizzato a nessuna conclusione sulla sincronizzazione delle formazioni torbose con giacimenti qua-

Digitized by Google

lunque possano essere poi i resultati di indagini così desiderabili, essi dovranno accordarsi con le importantissime particolarità messe in luce appunto sul versante piemontese della catena alpina dallo studio dei depositi morenici post-wurmiani. Prima nella Valle d'Aosta infatti e recentemente nel bacino del Verbano (1), Novarese, non solo ha ordinatamente ritrovati gli stadi di ritirata dei ghiacciai Wurmiani descritti dal Penck, ma è stato in-

---

ternari di altra natura, nè dei periodi del pino silvestre e della quercia, che in esse si possono mettere in evidenza, coi periodi caratterizzati dalla presenza di queste stesse specie nelle torbiere svedesi. La tecnica dello studio delle torbe ha fatta molta strada in quest'ultimo quinquennio, come può vedersi appunto dalla memoria riassuntiva di Gams, ed ora, dopo avere riconosciuto, mediante l'analisi dei pollini, anche nelle torbe dell'Europa centrale, l'esistenza dei periodi boreale, atlantico, subboreale e subatlantico, distinti dagli studiosi svedesi, si discute se, nei riguardi delle Alpi, questi periodi coincidano con gli ultimi stadi della glaciazione wurmiana — stadii di Gschnitz e di Daun — o se siano addirittura posteriori alla chiusura del quaternario; e questa seconda ipotesi, alla quale recentemente ha aderito anche il Gams, sembra prevalere. Sarebbe insomma molto desiderabile che anche le torbiere italiane venissero esplorate, e ciò indipendentemente dai risultati che possono sperarsi dalla conferma delle indagini interessantissime sulla attribuzione dei depositi morenici abbandonati dai ghiacciai in ritirata ed ancor più dei depositi fillitiferi che si avesse la fortuna di scoprire in sicuro rapporto con essi.

Nell'ormai ricca letteratura dell'argomento particolare interesse presenta per noi una memoria di Firbas (*F. F. Pollenanalytische Untersuchungen Einiger Moore der Ostalpen*, Lotos, " Naturwissenschaftl. Zeitschrift „, LXXI, Prag, 1923) per la vicinanza del territorio oggetto degli studi dell'A. alla nostra frontiera alpina orientale. Anch'egli è favorevole a collocare i periodi climatici degli autori scandinavi immediatamente dopo la chiusura del quaternario, perchè, secondo lui, i periodi interstadiali postwurmiani non avrebbero posseduto per un tempo abbastanza lungo condizioni climatiche tali da favorire, nell'ambiente delle Alpi orientali, la reimmigrazione e la ridiffusione delle foreste respinte fuori dal territorio dall'ultima grande glaciazione.

(1) Novarese V., *Il quaternario in Val d'Aosta e nelle valli del Canavese*, " Boll. del R. Ufficio Geologico d'Italia „, XLII (1912), XLIV (1915), XLV (1916), Roma; Id., *Gli apparati morenici wurmiani del Lago Maggiore e del Lago d'Orta*, " Ibidem „, LII (1927); Id., *L'età delle filliti di Re in Val Vigezzo (Ossola)*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, LXII, 1927.

Digitized by Google

dotto, dall'accurato rilievo della loro distribuzione, a spostare la data di deposizione del noto deposito fillitifero di Re in Val Vigezzo, sino all'oscillazione di Achen, la quale rappresenterebbe quindi una fase post wurmiana di optimum climatico, una vera fase interglaciale in fondo (Wurm-Buhl), abbastanza pronunciata e prolungata per consentire la costituzione, in seno alle valli alpine, di consorzi di piante comprendenti specie ad esigenze termofile ed oceaniche quali il *Rhododendron ponticum*. Non è necessario insistere sull'importanza di questa constatazione per la spiegazione di una quantità di fenomeni di distribuzione della nostra flora e in particolare per la giustificazione dell'esistenza in Piemonte di specie atlantiche piuttosto delicate.

E per finire, poco può essere detto sull'elemento o sugli elementi nei quali si potrebbero classificare le specie del nostro componente atlantico (migranti sud-alpino ed appenninico, nonchè quaternario). L'esame delle affinità e della distribuzione delle specie congeneri e dei generi parenti consente soltanto di prospettare, in una forma molto generale, l'esistenza di una reale e sostanziale differenza di origine tra il gruppo delle specie eu e sub atlantiche e quello delle specie euriatlantiche, cioè delle specie dotate di attitudini e di esigenze per una condizione climatica oceanica senza particolare limitazione territoriale della loro distribuzione al distretto atlantico. Le prime infatti, quasi senza eccezione, rientrano facilmente nel quadro di quell'elemento paleo-africano del quale il Christ ha tentato così felicemente la definizione; mentre nel componente euriatlantico predominano rappresentanti indubbi dell'elemento arcto-terziario, tanto fra le specie dominanti o largamente diffuse, quanto fra le specie attualmente disgiunte.

Firenze, R. Istituto Botanico - Novembre 1927.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 4 Dicembre 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Majorana, Pochettino, Boggio, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza che risulta approvato dopo alcune osservazioni del Socio Guidi, relative al fatto che la Commemorazione del Socio Naccari venne fatta presenti i soli Soci della Classe di Scienze e non a Classi unite, come era stabilito dalla consuetudine.

Il Socio D'Ovidio si associa all'osservazione del Socio Guidi, ricordando che tale disposizione, se ben rammenta, fu stabilita durante la sua Presidenza.

Il Presidente ringrazia il Socio Guidi che ha ricordata l'antica consuetudine stata frustrata nella adunanza precedente per pura dimenticanza.

Non essendovi presentazioni di omaggi, il Presidente dà la parola al Socio Guidi, che riferisce intorno alla pubblicazione della traduzione della sua Nota sulle Costruzioni in *Béton* armato

Digitized by Google

pubblicata nel 1927 negli *Atti* della nostra Accademia, ed ora ripubblicata col titolo: *Études expérimentales sur des constructions en béton armé.*

Terminata l'adunanza ordinaria si procede alla votazione per la nomina della Commissione incaricata di riferire intorno al Premio Vallauri per gli anni 1923-26, secondo il disposto del Regolamento. Riescono eletti i Soci SOMIGLIANA, PARONA, POCHETTINO e GRASSI.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 4 Dicembre 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci D'Ovidio, Peano, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Majorana, Pochettino, Boggio, Repossi e il Segretario Mattirolo;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci Schiaparelli, Luzio, Bertoni e il Segretario Vidari.

Scusano l'assenza diversi Soci occupati in una cerimonia universitaria in commemorazione del compianto Senatore Chironi.

Letto e approvato il verbale della seduta precedente, il Presidente, in relazione con quanto in esso verbale è stato letto circa la seduta solenne dell'anno accademico, informa che il Consiglio d'Amministrazione in sua recente seduta ha deliberato di stanziare in bilancio la somma necessaria per la detta cerimonia, la quale acquisterà una speciale significazione perchè inizierà la serie delle cerimonie cittadine celebrative del Duca Emanuele Filiberto. Quanto all'oratore, il Presidente dichiara che, trattandosi di un discorso storico rivolto a illustrare la figura e l'opera del grande principe, la persona indicata all'uopo è indubbiamente il Socio Luzio, insigne ricercatore e ricostruttore di uomini e di avvenimenti della nostra storia.

Digitized by Google

Ma il Socio Luzio interpellato ha creduto di dovere, per gravi impegni di studio che assorbono la sua attività, declinare l'incarico. Allora il Presidente dichiara di aver pensato a proporre per l'ufficio il Socio Vidari, che già ha dovuto e deve tuttora occuparsi, con speciali indagini, di stendere intorno alla figura del Principe sabaudo una monografia per il volume che sarà pubblicato per iniziativa dell'Università. Soggiunge che di tale designazione il Socio Luzio si è mostrato lieto, dichiarandosi anche pronto ad aiutare il consocio Vidari nelle sue eventuali ricerche d'archivio.

Il Socio Luzio conferma quanto il Presidente ha esposto ne' suoi riguardi.

Il Socio Vidari ringrazia il Presidente della designazione e il Socio Luzio del consenso e della gentile profferta, e si dichiara per suo conto disposto ad assumere l'onorifico, per quanto non lieve, incarico, confidando di poter degnamente rispondere alla fiducia dei colleghi e di far cosa non impari all'altezza del tema e alla solennità della cerimonia.

Messa ai voti la proposta del Presidente, essa è accolta alla unanimità.

Rimane inteso che la seduta solenne avrà luogo tra la fine di gennaio e i primi di febbraio.

Gli Accademici Segretari:
Oreste Mattirolo
Giovanni Vidari

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIII, DISP. 4ª, 5ª E 6ª, 1927-1928

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1928

Digitized by Google

DISTRIBUZIONE DELLE ADUNANZE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1927-928

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1927 - 6 novembre	1927 - 13 novembre
» - 20 »	» - 27 »
» - 4 dicembre	» - 11 dicembre
» - 18 »	1928 - 8 gennaio
1928 - 15 gennaio	» - 22 »
» - 29 »	» - 5 febbraio
» - 12 febbraio	» - 19 »
» - 26 »	» - 4 marzo
» - 11 marzo	» - 18 »
» - 25 »	» - 1 aprile
» - 15 aprile	» - 22 »
» - 29 »	» - 6 maggio
» - 13 maggio	» - 20 »
» - 27 »	» - 10 giugno
» - 17 giugno	» - 24 »

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 18 Dicembre 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, GUIDI, PANETTI, PONZIO, SACCO REPOSSI e il Segretario MATTIROLO.

Scusano la loro assenza i Soci POCHETTINO e BOGGIO.

Il Segretario legge il verbale della precedente adunanza, che risulta approvato dopo osservazioni del Socio GUIDI il quale accenna che la traduzione del suo lavoro non è stata condotta, come è riferito nel verbale della precedente adunanza, sulla Nota pubblicata negli *Atti* dell'Accademia nostra; ma invece sopra un Rendiconto delle Esperienze da lui fatte sulle costruzioni in béton armato. Rendiconto che costituiva un fascicolo intiero, di cui una parte solamente fu pubblicata negli *Atti* dell'Accademia.

Il Socio SACCO presenta in omaggio alla biblioteca Accademica il Numero 1° dell'annata XVI del Giornale *Urania*.

Segue quindi il Socio PANETTI che presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota dell'Ing. Carlo FERRARI, *Sul problema dell'Elica con vento laterale.*

Digitized by Google

L'Ing. Carlo Ferrari tratta il problema dell'Elica con vento laterale, che oggi è oggetto di studio per la importanza che esso presenta, sia per l'apparecchio *La Cierva*, nel quale grandi eliche ad asse verticale hanno l'ufficio di Ali portanti, sia per il comportamento degli ordinari propulsori ad Elica operante in deriva.

La ricerca del Ferrari viene a dare un fondamento preciso alla geniale analogia del Glauert, il quale dalle relazioni fra la velocità indotta dall'ala e dall'elica portante, desume che questa deve sviluppare un'azione sostentatrice della stessa importanza dell'Ala di apertura uguale al diametro dell'Elica.

Il risultato è ottenuto considerando gli incrementi di velocità che l'elica, colpita dal vento laterale, produce non solo nella colonna d'aria costituente la scia, ma anche nell'aria circostante, il cui concorso al fenomeno è determinato per mezzo del campo Euleriano, eccitato dalla componente verticale del moto dell'aria racchiusa nella scia.

Il Ferrari conchiude il suo lavoro, esaminando la relazione che nel caso dell'Elica autorotante nasce fra gli incrementi longitudinali e trasversali della velocità in conseguenza all'annullamento della velocità rotatoria indotta nella scia.

Digitized by Google

LETTURE

Sul problema dell'elica con vento laterale.

Nota dell'Ing. CARLO FERRARI
presentata dal Socio nazionale residente M. Panetti.

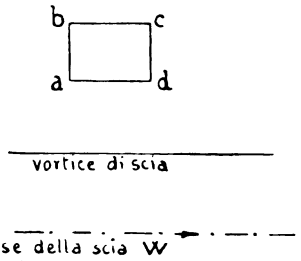
1. — Il problema della determinazione teorica dei coefficienti caratteristici di funzionamento di un'elica colpita da vento laterale è, come noto, complicato dal fatto che la massa d'aria influenzata non è più, come nel caso del vento assiale, soltanto quella che passa attraverso il disco d'elica. Per tener conto di ciò il Glauert (1) fece l'ipotesi, basata su pure considerazioni d'analogia, che la quantità di aria influenzata fosse quella che attraverserebbe il disco con una velocità normale al disco stesso uguale alla velocità effettiva dell'aria. Più recentemente e con maggiore rigore logico il prof. Pistolesi (2) considerando il campo di velocità eccitato dai vortici di scia giunse a stabilire alcune formole, le quali se concordano coll'ipotesi di Glauert per quanto riguarda gli incrementi assiali, ne differiscono molto per quanto si riferisce agli incrementi laterali. Nella presente Nota mi propongo di determinare la massa d'aria effettivamente influenzata e di indicare quindi il procedimento da seguire per ricavare le caratteristiche di funzionamento dell'elica in deriva.

(1) H. Glauert, *The Theorie of the Autogiro.* " The Journal of the Royal Aeronautique Society „, giugno 1927, n. 198.

(2) E. Pistolesi, *Contributo allo studio dell'elica in un vento laterale.* " Comunicazione al IV Congresso Internazionale di Navigazione Aerea „. Roma, ottobre 1927, e " L'Aerotecnica „, ottobre 1927.

Digitized by Google

2. — I vortici, che sfuggono dalle pale dell'elica e che coincidono colle linee di corrente relative all'elica stessa, inviluppano un tubo, che, trascurando le velocità incrementali come piccole a fronte della velocità d'arrivo dell'aria, suppongo indeformabile e di sezione costante. Considero una sezione di tale tubo fatta con un piano normale all'asse della scia all'infinito a valle ed indico l'incremento normale alla velocità W della corrente nei punti interni della scia con x, che suppongo costante, e nei punti esterni con x'; con w e con w' i corrispondenti incrementi nella direzione di W. È facile dimostrare che $w' = 0$ mentre x non può essere ovunque nullo. Infatti, considerando un circuito elementare rettangolare $(a\,b\,c\,d)$ di cui due lati sono paralleli alle generatrici della scia e due lati hanno la direzione di x' se ne deduce che la circuitazione è nulla non concatenandosi detto circuito con alcun vortice; e poichè il contributo dei lati $(a\,b)$ e $(c\,d)$ è nullo per ipotesi se ne deduce che l'incremento w è costante: ma esso è certamente nullo all'infinito e quindi è nullo ovunque. Ne segue che se fosse x' nullo ovunque si avrebbe la velocità indisturbata W_0: ossia in corrispondenza della scia la velocità delle particelle fluide ammetterebbe una componente in direzione normale alla scia stessa, il che non può essere dovendo i vortici essere linee di corrente.

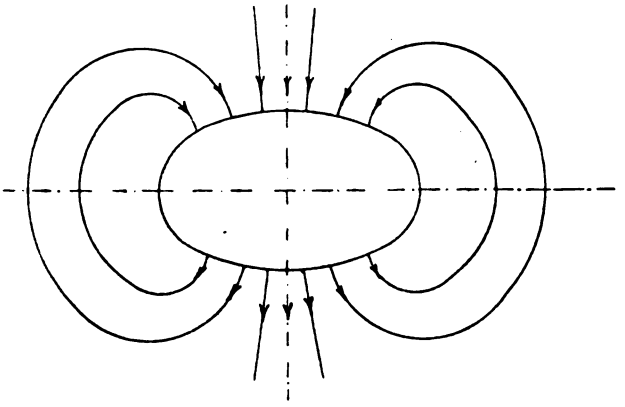


Chiamo massa equivalente d'aria la massa fluente nell'unità di tempo che avendo un incremento costante x uguale all'incremento entro la scia equivale agli effetti della portanza alla massa effettiva che ha l'incremento variabile x'. Per calcolare una tal massa considero ancora la sezione con un piano normale all'asse della scia ed il flusso in tale piano (1): in esso

(1) Il procedimento seguìto è sostanzialmente analogo a quello usato da M. Munk per le ali di apertura finita (Vedi: *A resumé of the advances in theoretical Aeronautics made by* Max. M. Munk. Report n. 213 del "National Adoisory Committee for Aeronautics „).

Digitized by Google

una ellissi (sezione retta della scia) si sposta con la velocità x nella direzione dell'asse minore. Un tal moto (1) è definito dalla funzione potenziale $\varphi = b\,x \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{1/2} e^{-\xi_0} \cos\eta$ dove b è l'asse dell'ellisse che ha la direzione dello spostamento, a è l'altro asse, ξ e η sono coordinate ellittiche. Se κ è la massa apparente dell'ellisse è per definizione F (forza viva del fluido) $= \frac{1}{2}\kappa x^2$ e quindi la quantità di moto complessiva nella direzione dello spostamento $q = \frac{dF}{dx} = \kappa x$. Ma è (2) $\kappa = \frac{\pi}{4} a^2 \rho$ uguale cioè



alla massa di un cilindro di lunghezza unitaria e di diametro uguale all'asse dell'ellisse normale alla direzione di traslazione. E poichè l'elica nell'unità di tempo avanza di W_0 la quantità di fluido che viene contemporaneamente ad assumere l'incremento x risulta κW_0, e quindi il relativo contributo di portanza è $\rho\pi \frac{a^2}{4} W_0 x$; se ne deduce che la massa equivalente è $\rho\pi \frac{a^2}{4} W_0$ uguale cioè alla massa che attraverserebbe un disco di area uguale al disco d'elica supposta la velocità *normale* al disco uguale alla velocità della corrente.

---

(1) LAMBS, *Hydrodynamics*.
(2) LAMBS, *Hydrodynamics*.

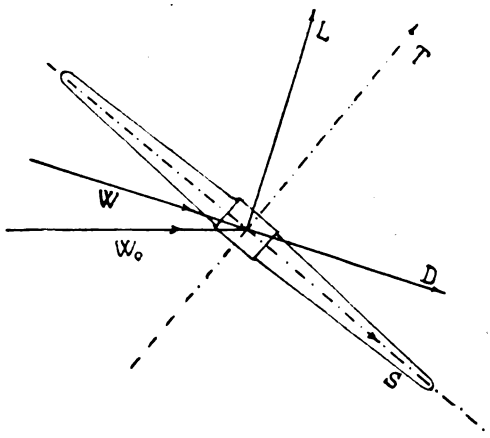
Digitized by Google

3. — Quanto si è esposto nei numeri precedenti permette di scrivere le equazioni della quantità di moto proiettate nella direzione della velocità effettiva e in direzione normale [1]; e precisamente si ha:

$$L = \pi R^2 \rho W_0 (1 + \operatorname{sen} \alpha_0) x \tag{1}$$

$$D = \pi R^2 \rho W_0 \operatorname{sen} \alpha_0 w \tag{2}$$

dove R è il raggio dell'elica, α_0 l'incidenza effettiva $= \alpha$ (incidenza apparente) $+ \alpha_i$ (incidenza indotta), L la portanza, D la resistenza, ρ la densità dell'aria, $\pi R^2 \rho W_0 \operatorname{sen} \alpha_0 x$ è il contributo



di portanza dovuto all'aria contenuta entro la scia, $\pi R^2 \rho W_0 x$ quello dovuto alla massa equivalente.

Per un'ala la sezione retta della scia si ridurrebbe a un segmento di lunghezza $2R$ e la (1) e la (2) si ridurrebbero quindi a $L = \pi R^2 \rho W_0 x$, $D = 0$ che sono le note formole valevoli per un'ala di apertura $2R$ con ripartizione ellittica della portanza.

---

[1] In ciò che segue gli incrementi x e w si supporranno così piccoli che si possa ritenere $W = W_0$ e si possano trascurare i termini come $\frac{x^2}{W_0^2}$.

Digitized by Google

4. — Risulta ora di facile applicazione il procedimento degli incrementi medi per dedurre i coefficienti caratteristici di funzionamento dell'elica. Si ha, indicando al solito con T la forza nella direzione dell'asse dell'elica, con S la forza laterale

$$T = L\cos\alpha_0 + D\,\mathrm{sen}\,\alpha_0 = \pi R^2 \rho W_0 [x\cos\alpha_0 (1 + \mathrm{sen}\,\alpha_0) + w\,\mathrm{sen}^2\alpha_0]$$

$$S = D\cos\alpha_0 - L\,\mathrm{sen}\,\alpha_0 = \pi R^2 \rho W_0 [w\,\mathrm{sen}\,\alpha_0\cos\alpha_0 - x\,\mathrm{sen}\,\alpha_0 (1 + \mathrm{sen}\,\alpha_0]$$

E poichè

$$v = x\cos\alpha_0 + w\,\mathrm{sen}\,\alpha_0$$
$$u = w\cos\alpha_0 - x\,\mathrm{sen}\,\alpha_0$$

se v ed u sono gli incrementi rispettivamente assiali e laterali all'infinito a valle, si deduce

$$T = \pi R^2 \rho W_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0 \,.\, v + \pi R^2 \rho W_0 (v\cos\alpha_0 - u\,\mathrm{sen}\,\alpha_0)\cos\alpha_0 = \pi R^2 \rho W_0 v (\mathrm{sen}\,\alpha_0 + \cos^2\alpha_0) - \pi R^2 \rho W_0 u\,\mathrm{sen}\,\alpha_0\cos\alpha_0 = \tau_0 \rho R^4 (\Omega - \omega)^2$$

$$S = \pi R^2 \rho W_0 u (\mathrm{sen}\,\alpha_0 + \mathrm{sen}^2\alpha_0) - \pi R^2 \rho W_0 v\,\mathrm{sen}\,\alpha_0\cos\alpha_0 = \sigma_0 \rho R^4 (\Omega - \omega)^2$$

e pertanto essendo $W_0 = \dfrac{V_0}{\mathrm{sen}\,\alpha_0} = \dfrac{U_0}{\cos\alpha_0}$

$$\frac{v}{V_0}(\mathrm{sen}\,\alpha_0 + \cos^2\alpha_0) - \frac{u}{U_0}\cos^2\alpha_0 = \frac{\tau_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0}{\pi\gamma_0^2}$$

essendo $\gamma_0 = \dfrac{V_0}{R(\Omega - \omega)}$,

$$\frac{u}{U_0}(\mathrm{sen}\,\alpha_0 + \mathrm{sen}^2\alpha_0) - \frac{v}{V_0}\mathrm{sen}^2\alpha_0 = \frac{\sigma_0\cos\alpha_0}{\pi\gamma_{0u}^2}$$

essendo $\gamma_{0u} = \dfrac{U_0}{R(\Omega - \omega)}$,

da cui si ricava

$$\frac{u}{U_0} = \frac{\cos\alpha_0}{\mathrm{sen}\,\alpha_0 + \mathrm{sen}^2\alpha_0}\,\frac{\sigma_0}{\pi\gamma_{0u}^2} + \frac{\mathrm{sen}\,\alpha_0}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha_0}\,\frac{v}{V_0}$$

$$\frac{v}{V_0} = \frac{\tau_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0}{\pi\gamma_0^2} + \frac{\cos^3\alpha_0}{\mathrm{sen}\,\alpha_0 + \mathrm{sen}^2\alpha_0}\,\frac{\sigma_0}{\pi\gamma_{0u}^2}\,.$$

Digitized by Google

Dall'equazione del momento della quantità di moto si ricava

$$M = 2 J \omega = \pi R^4 \rho W_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \omega$$

essendo M il momento motore, J il momento d'inerzia della massa fluida che passa attraverso il disco d'elica rispetto all'asse dell'elica stessa, ω l'incremento della velocità angolare al disco. È quindi $\pi R^4 \rho W_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \omega = \kappa_0 \rho R^5 \Omega_0^2$ essendosi posto per brevità $\Omega_0 = \Omega - \omega$. Si ricava

$$\frac{\omega}{\Omega_0} = \frac{\kappa_0}{\pi \gamma_0}.$$

Si ricavano infine i rapporti di funzionamento apparenti

$$\gamma = \frac{V_0 + \frac{v}{2}}{R(\Omega + \omega)} = \gamma_0 \frac{1 + \frac{v}{2 V_0}}{1 + \frac{\omega}{\Omega}}; \qquad \gamma_u = \frac{U_0 + \frac{u}{2}}{R(\Omega_0 + \omega)} = \gamma_{0u} \frac{1 + \frac{u}{2 U_0}}{1 + \frac{\omega}{\Omega_0}};$$

l'angolo d'incidenza apparente

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma}{\gamma_u} = \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{1 + \frac{v}{2 V_0}}{1 + \frac{u}{2 U_0}}$$

ed i coefficienti τ, κ, σ dell'elica

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right)^2 = \tau_0 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0 + \omega}\right)^2 = \tau_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{\omega}{\Omega_0}}\right)^2;$$

$$\kappa = \kappa_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{\omega}{\Omega_0}}\right)^2; \qquad \sigma = \sigma_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{\omega}{\Omega_0}}\right)^2.$$

Immediata è l'applicazione delle formole scritte per la determinazione dei coefficienti di portanza e di resistenza di un'elica autorotante. Supposte trascurabili le resistenze d'attrito si ha $M = 0$ e quindi $\omega = \kappa_0 = 0$, equazione che permette di ricavare terne di valori corrispondenti di γ_0, γ_{0u} e $\operatorname{tg} \alpha_0$ [1];

---

[1] E. Pistolesi, *Considerazioni sull'autogiro.* "L'Aerotecnica", ott. 1926.

Digitized by Google

da questi si ricavano i corrispondenti valori di τ_0 e σ_0 e quindi di γ, γ_u e tg α. In particolare si ha $\sigma = \sigma_0$; $\tau = \tau_0$. Si ottengono infine i coefficienti c_y e c_x mediante le note formole

$$c_y = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\pi \gamma^2} (\tau \cos \alpha - \sigma \operatorname{sen} \alpha)$$

$$c_x = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\pi \gamma^2} (\sigma \cos \alpha + \tau \operatorname{sen} \alpha).$$

Per quanto riguarda l'espressione dei coefficienti τ_0, σ_0, κ_0 in funzione delle caratteristiche geometriche dell'elica e di γ_0, γ_{0u} rimando senz'altro all'articolo del prof. Pistolesi citato nella nota (1) a pagina precedente.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Gennaio 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente, nel nome del Socio corrispondente Alfredo Lacroix, fa omaggio alla Biblioteca Accademica di un suo lavoro dal titolo: *La Constitution Lithologique des Iles volcaniques de la Polynésie Australe*, e nel nome del Prof. Peter Christof di Cernàuti in Rumenia un opuscolo dal titolo: *Le Problem de Fermat et sa solution.*

Segue il Socio Tesoriere Panetti, il quale presenta e fa omaggio all'Accademia di N° 6 pubblicazioni relative a varii problemi di areonautica, rappresentanti altrettanti lavori stati eseguiti nel Laboratorio di Areonautica della R. Scuola di Ingegneria di Torino. Autori ne sono il Socio Panetti e gli Ingegneri Carlo Ferrari e G. Gabrielli.

Il Socio Felice Garelli fa quindi dono alla Biblioteca di due suoi recenti lavori coi quali ha dato termine alla *Nuova*

Digitized by Google

Enciclopedia di Chimica del compianto nostro Socio Icilio Guareschi. I due lavori trattano il 1° della Industria degli Zuccheri in rapporto specialmente a quanto finora si è fatto in Italia; il 2° è invece dedicato alla memoria di Icilio Guareschi fondatore della *Nuova Enciclopedia di Chimica*, la quale si chiude oggi colla 2ª parte del volume XIII.

L'Accademia si interessa quindi di determinare e di fissare il giorno nel quale, a *Classi riunite*, si dovrà addivenire alla prima relazione relativa al Premio Bressa. Questa adunanza viene fissata per il giorno 22 corr.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 22 Gennaio 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono intervenuti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: D'Ovidio, Peano, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: De Sanctis, Brondi, Einaudi, Patetta, Prato, Cian, Faggi, Luzio, Jannaccone, Solari, Bertoni e Vidari che funge da Segretario.

Scusano l'assenza i Soci: Mattirolo e Schiaparelli.

Letto e approvato il verbale della seduta precedente, il Segretario comunica la lettera del Ministero dell'Economia nazionale, in data 11 gennaio, la quale, accompagnando copia di circolare diramata ai Prefetti circa le Istituzioni di carattere tecnico, scientifico ed economico che debbono designare le terne per la nomina dei componenti i Consigli provinciali dell'Economia, designa, fra le altre, la Reale Accademia delle Scienze di Torino.

Il Presidente propone che sia messa all'ordine del giorno di una prossima seduta la formazione della terna. L'Accademia approva.

Il Presidente riferisce quindi circa l'opera della Commissione per l'aggiudicazione del premio Bressa, enuncia i nomi dei con-

Digitized by Google

correnti spontaneamente presentatisi e quelli degli altri proposti da Soci; interroga quindi i presenti se abbiano altre proposte da fare, e poichè nessuno prende la parola, egli dichiara definitivo l'elenco delle proposte, e invita il relatore PANETTI a dare lettura della prima relazione.

Il Socio PANETTI legge, fra l'attenzione generale e continua di tutti i presenti, l'ampia ed elaborata relazione che analizza ad una ad una le pubblicazioni e le proposte d'indole scientifico-sperimentale che si presentano per il premio.

Finita la lettura, il Presidente chiede all'Accademia che voglia procedere senz'altro ad integrare (secondo la prescrizione dell'art. 4 del Regolamento) la Commissione aggregandole due nuovi membri per ciascuna Classe. E, per dar modo ai Soci di prendere gli opportuni accordi, sospende per qualche minuto la seduta.

Riaperta la seduta, si procede alla votazione. Votano prima i membri della Classe di scienze fisiche: raccolte le schede, risultano eletti i Soci GARELLI e PONZIO. Votano in seguito i Soci della Classe di scienze morali: raccolte le schede, risulta eletto il Socio CIAN, e in una seconda votazione il Socio DE SANCTIS.

Gli Accademici Segretarii:
ORESTE MATTIROLO
GIOVANNI VIDARI.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Gennaio 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Herlitzka, Pochettino, Boggio, Garelli, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Presidente Senatore Ruffini.

Il Segretario legge il verbale dell'adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica all'adunanza un numero dell'*Illinois Law Review* nel quale si contiene un lavoro del signor John H. Wigmore e del Presidente Francesco Ruffini relativo alla *Proprietà Scientifica* (*Scientific Propriety*). Il lavoro è presentato a titolo di omaggio e di esso si riserva di intrattenere l'Accademia uno degli Autori.

Il Socio Grassi fa quindi omaggio di N. 5 volumi dei " Rendiconti delle Riunioni annuali della Associazione Elettrica italiana ". I volumi contemplano le annate 1922-23-24-25-26.

Il Socio Boggio presenta quindi, nel nome del Sig. Filippo Odone, una Nota sulla *Trattazione vettoriale di alcune proprietà delle vibrazioni luminose*. Il lavoro del Sig. Odone viene accolto per gli *Atti*.

Digitized by Google

LETTURE

Trattazione vettoriale di alcune proprietà delle vibrazioni luminose.

Nota di FILIPPO ODONE
presentata dal Socio nazionale residente T. Boggio.

L'uso del calcolo vettoriale (*) permette, in generale, delle semplificazioni notevoli nella trattazione analitica delle proprietà delle vibrazioni luminose.

Questa Nota, in cui si fa uso dei procedimenti vettoriali, non contiene risultati essenzialmente nuovi, ma indica invece un modo nuovo molto semplice per ottenerli.

1. — Espressioni analitiche d'una vibrazione.

Ricordiamo che si suole rappresentare analiticamente una vibrazione mediante un vettore della forma

$$(1) \qquad \boldsymbol{w} = a\cos(\omega t - \alpha)\,\boldsymbol{i} + b\cos(\omega t - \beta)\,\boldsymbol{j},$$

dove a, b, α, β, ω sono numeri reali costanti; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ vettori unitari costanti e t la variabile tempo.

Posto

$$P = O + \boldsymbol{w},$$

con O punto fisso, la traiettoria di P è un'ellisse di centro O, che, in casi particolari, può essere un cerchio o un segmento

(*) Vedi C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale*, 2ª ediz., Zanichelli, 1920.

Digitized by Google

di retta. A seconda del caso che si verifica, la vibrazione corrispondente si suole chiamare ellittica, circolare o rettilinea.

Si può allora dire che la (1) dà w come risultante dei vettori di due vibrazioni rettilinee.

Se introduciamo gli operatori complessi, relativi alla giacitura della vibrazione, ponendo

$$j = e^{i\gamma} i,$$

e nella (1) esprimiamo il coseno mediante gli esponenziali, si ottiene

$$(2) \qquad w = e^{i\omega t}[a e^{-i\alpha} i + b e^{i(\gamma-\beta)} i]/2 + \\ + e^{-i\omega t}[a e^{i\alpha} i + b e^{i(\gamma+\beta)} i]/2,$$

che dà w come risultante di due vettori rotanti uniformemente in senso inverso, cioè, come diremo brevemente, dei vettori di due vibrazioni circolari inverse.

La forma (2) è particolarmente utile quando si tratti di determinare l'*ellitticità*, ossia il rapporto tra l'asse minore e l'asse maggiore dell'ellisse descritto dal punto imagine P, e l'*orientazione*, ossia le direzioni degli assi della stessa ellisse.

2. — Ellitticità.

Scriviamo la (2) sotto la forma

$$w = e^{i\omega t} u + e^{-i\omega t} v,$$

con

$$u = [a e^{-i\alpha} + b e^{i(\gamma-\beta)}] i\, 2, \qquad v = [a e^{i\alpha} + b e^{i(\gamma+\beta)}] i\, 2.$$

Ponendo

$$m = \mathrm{mod}\, u, \qquad n = \mathrm{mod}\, v,$$

si trova subito

$$4m^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos[\gamma - (\beta - \alpha)],$$
$$4n^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos[\gamma + (\beta - \alpha)].$$

Per quei valori di t, per i quali i vettori delle vibrazioni circolari componenti hanno la stessa direzione e lo stesso verso,

Digitized by Google

il vettore della vibrazione risultante ha il valore massimo $m + n$, e quindi $m + n$ è la lunghezza del semiasse maggiore dell'ellisse descritta da P.

Invece per quei valori di t, per i quali i vettori delle vibrazioni circolari componenti sono paralleli, ma di verso opposto, il vettore della vibrazione risultante ha il modulo minimo, dato da mod $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$, che dà perciò la lunghezza del semiasse minore.

Sia, per esempio, mod $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = m - n$. Allora l'ellitticità vale

$$(m - n)/(m + n).$$

Posto

$$(m - n)/(m + n) = \operatorname{tg} \psi, \qquad b/a = \operatorname{tg} \epsilon,$$

ed osservando che

$$\sin 2\epsilon = 2ab/(a^2 + b^2),$$

si ricava (*)

$$\sin 2\psi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = [2ab\} \cos [\gamma - (\beta - \alpha)] - \cos [\gamma + (\beta - \alpha)]\{]$$
$$/[2(a^2 + b^2) + 2ab\} \cos [\gamma - (\beta - \alpha)] + \cos [\gamma + (\beta - \alpha)]\{] =$$
$$= [\sin 2\epsilon \sin \gamma \sin (\beta - \alpha]/[1 + \sin 2\epsilon \cos \gamma \cos (\beta - \alpha)],$$

da cui si può risalire al valore dell'ellitticità.

3. — Orientamento d'una vibrazione ellittica.

Conserviamo le notazioni del numero precedente. Siccome le vibrazioni circolari componenti hanno egual velocità angolare, ma versi di rotazione opposti, le direzioni degli assi dell'ellisse, sono, come si vede subito, quelle delle bisettrici degli angoli formati dai vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

Conviene porre

$$\boldsymbol{u} = m e^{i\mu} \boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{v} = n e^{i\nu} \boldsymbol{i};$$

allora la minima rotazione λ (nel verso positivo delle rotazioni)

(*) Vedi MASCART, *Traité d'optique*, tome premier, pag. 226 (Gauthier-Villars, Paris, 1889).

Digitized by Google

da dare al vettore $\boldsymbol{i}$, per portarlo nella stessa direzione dell'asse maggiore della solita ellisse, è

$$2\lambda = \mu + \nu .$$

Inoltre, detto $\boldsymbol{u}_1$ il simmetrico di $\boldsymbol{u}$ rispetto ad $\boldsymbol{i}$, si ha

$$\boldsymbol{u}_1 = me^{-i\mu}\,\boldsymbol{i} = [ae^{i\alpha} + be^{-i(\gamma-\beta)}]\,\boldsymbol{i}/2 ,$$

ed è chiaro che 2λ è la rotazione che si deve dare al vettore $\boldsymbol{u}_1$ per portarlo nella stessa direzione e verso del vettore $\boldsymbol{v}$. Ne segue

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\lambda = \frac{\operatorname{mod}(\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{v})}{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{v}} &= [ab\{\sin[\gamma + (\beta-\alpha)] + \sin[\gamma - (\beta-\alpha)]\} + \\ &+ b^2 \sin 2\gamma]/[a^2 + b^2 \cos 2\gamma + ab\,\{\cos[\gamma + (\beta-\alpha)] + \\ &+ \cos[\gamma - (\beta-\alpha)]\}] = [2b \sin\gamma\,[a\cos(\beta-\alpha) + b\cos\gamma]] \\ &/[a^2 - b^2 + 2b\cos\gamma\,[b\cos\gamma + a\cos(\beta-\alpha)]] = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 2\epsilon \sin\gamma\,[\cos(\beta-\alpha) + \operatorname{tg}\epsilon\cos\gamma]}{1 + \operatorname{tg} 2\epsilon\cos\gamma\,[\cos(\beta-\alpha) + \operatorname{tg}\epsilon\cos\gamma]} \quad (*). \end{aligned}$$

4. — Applicazione del metodo esposto alla doppia rifrazione ellittica.

Un fascio cilindrico, di luce polarizzata, cade normalmente su una lamina birifrangente, a facce piane e parallele. Il fascio di luce emergente è, in generale, polarizzato ellitticamente; si tratta di calcolarne gli elementi caratteristici, cioè ellitticità ed orientazione, facendo le seguenti ipotesi:

a) la vibrazione, che rappresenta la perturbazione luminosa incidente, si decompone:

o in due vibrazioni rettilinee ortogonali (doppia rifrazione ordinaria),

o in due vibrazioni circolari inverse (doppia rifrazione circolare),

---

(*) Credo che questa formula, come quelle del numero seguente, non siano ancora state assegnate.

Digitized by Google

o in due vibrazioni ellittiche coniugate, cioè in due vibrazioni ellittiche di egual rapporto d'assi, di senso di circolazione inverso e con gli assi omologhi ortogonali (doppia rifrazione ellittica);

b) tali componenti si propagano nell'interno della lamina con velocità diverse;

c) in tale decomposizione si deve avere conservazione dell'energia (*).

Faremo il calcolo per il caso della doppia rifrazione ellittica, in cui rientrano gli altri.

Siano $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{ii}$ i vettori unitari, paralleli alle direzioni principali della lamina, e sia h il rapporto degli assi delle vibrazioni ellittiche coniugate, in cui si scinde la vibrazione incidente.

Prendiamo il vettore di questa, nella sua forma più generale,

$$\boldsymbol{t} = (1 + h^2)\,[a \cos(\omega t - \alpha)\, e^{i\mu}\, \boldsymbol{i} + b \cos(\omega t - \beta)\, e^{i(\gamma+\mu)}\, \boldsymbol{i}].$$

Sviluppiamo gli esponenziali e le funzioni circolari. Se poniamo

$$\begin{aligned} A &= a \cos\alpha \cos\mu + b \cos\beta \cos(\gamma + \mu) \\ B &= a \sin\alpha \cos\mu + b \sin\beta \cos(\gamma + \mu) \\ C &= a \cos\alpha \sin\mu + b \cos\beta \sin(\gamma + \mu) \\ D &= a \sin\alpha \sin\mu + b \sin\beta \sin(\gamma + \mu), \end{aligned}$$

si trova, aggiungendo e togliendo dei vettori in cui compare h al 1° grado,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t} = {} & (h^2 A \cos\omega t \cdot \boldsymbol{i} + h A \sin\omega t \cdot i\boldsymbol{i}) + \\ & + (A \cos\omega t \cdot \boldsymbol{i} - h A \sin\omega t \cdot i\boldsymbol{i}) + \\ & + (h^2 B \sin\omega t \cdot \boldsymbol{i} - h B \cos\omega t \cdot i\boldsymbol{i}) + \\ & + (B \sin\omega t \cdot \boldsymbol{i} + h B \cos\omega t \cdot i\boldsymbol{i}) + \\ & + (-h C \sin\omega t \cdot \boldsymbol{i} + C \cos\omega t \cdot i\boldsymbol{i}) + \\ & + (h C \sin\omega t \cdot \boldsymbol{i} + h^2 C \cos\omega t \cdot i\boldsymbol{i}) + \\ & + (h D \cos\omega t \cdot \boldsymbol{i} + D \sin\omega t \cdot i\boldsymbol{i}) + \\ & + (-h D \cos\omega t \cdot \boldsymbol{i} + h^2 D \sin\omega t \cdot i\boldsymbol{i}). \end{aligned}$$

(*) Sull'importanza di tale osservazione vedi Bouasse, *Polarisation rotatoire*, pag. 6 e 88 (Delagrave, Paris, a. 1925).

Digitized by Google

La vibrazione incidente è così decomposta in otto vibrazioni ellittiche, quattro sinistrorse e quattro destrorse, di rapporto e direzioni d'assi voluti (*).

Componendo fra loro le quattro vibrazioni sinistrorse e fra loro le quattro destrorse, è realizzata la decomposizione della vibrazione incidente in due vibrazioni ellittiche coniugate (**).

Supponiamo che la vibrazione sinistrorsa subisca, nell'attraversare la lamina, un ritardo *relativo* di fase Δ. All'emergenza la vibrazione destrorsa e quella sinistrorsa, ritardata di Δ, si comporranno in un'unica vibrazione, di cui vogliamo calcolare l'ellitticità e l'orientazione.

Per questo ci conviene conservare tutte le otto vibrazioni ellittiche sopra ottenute, imponendo il ritardo Δ a ciascuna delle quattro vibrazioni sinistrorse ausiliarie, perchè così resta ritardata di Δ anche la vibrazione sinistrorsa loro resultante.

Riuniamo in uno i termini che contengono la stessa funzione circolare. Ponendo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= h(hA + D)\,\boldsymbol{i} + (C - hB)\,\boldsymbol{ii} \\
\boldsymbol{b} &= (hA + D)\,\boldsymbol{ii} + h(hB - C)\,\boldsymbol{i} \\
\boldsymbol{c} &= (A - hD)\,\boldsymbol{i} + h(B + hC)\,\boldsymbol{ii} \\
\boldsymbol{d} &= h(hD - A)\,\boldsymbol{ii} + (B + hC)\,\boldsymbol{i},
\end{aligned}$$

per il vettore $\boldsymbol{w}_1$ della vibrazione emergente si trova

$$\boldsymbol{w}_1 = \cos(\omega t - \Delta)\,\boldsymbol{a} + \sin(\omega t - \Delta)\,\boldsymbol{b} + \cos\omega t \cdot \boldsymbol{c} + \sin\omega t \cdot \boldsymbol{d}.$$

(*) Vedi Bouasse, *Polarisation rotatoire*, pag. 162.

(**) Effettuando il calcolo si trova subito:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t} = {} & [hM\cos(\omega t - \eta)\,\boldsymbol{i} + M\sin(\omega t - \eta)\,\boldsymbol{ii}] + \\
& + [N\cos(\omega t - \theta)\,\boldsymbol{i} - hN\sin(\omega t - \theta)\,\boldsymbol{ii}],
\end{aligned}$$

con

$$M^2 = (hA + D)^2 + (hB - C)^2, \qquad \operatorname{tg}\eta = \frac{hB - C}{hA + D};$$

$$N^2 = (A - hD)^2 + (B + hC)^2, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{B + hC}{A - hD}.$$

Digitized by Google

Applicando le formule di Eulero si ha

$$w_1 = e^{i\omega t}[e^{-i\Delta}(a - ib) + (c - id)]/2 + \\ + e^{-i\omega t}[e^{i\Delta}(a + ib) + (c + id)]/2\ (*) = (e^{i\omega t}u + e^{-i\omega t}v)/2\,,$$

con

$$(3) \qquad u = [h(1+h)e^{-i\Delta} + (1-h)](A - iB)\,i + \\ + [(1+h)e^{-i\Delta} - h(1-h)](D + iC)\,i.$$

$$(4) \qquad v = -[h(1-h)e^{i\Delta} - (1+h)](A + iB)\,i + \\ + [(1-h)e^{i\Delta} + h(1+h)](-D + iC)\,i.$$

Per il simmetrico u_1 di u, rispetto ad i, si ha

$$(5) \qquad u_1 = [h(1+h)e^{i\Delta} + (1-h)](A + iB)\,i - \\ - [(1+h)e^{i\Delta} - h(1-h)](-D + iC)\,i.$$

Conservando a ψ e λ lo stesso significato dei numeri precedenti, sappiamo che

$$\sin 2\psi = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}\,, \qquad \operatorname{tg} 2\lambda = \frac{\operatorname{mod}(u_1 \wedge v)}{u_1 \times v}\,,$$

essendo u, v, u_1 i vettori definiti dalle formole (3), (4), (5).

Si trova facilmente (**)

$$u^2 = (A^2 + B^2)[h^2(1+h)^2 + (1-h)^2 + 2h(1+h^2)\cos\Delta] + \\ + (C^2 + D^2)[(1+h)^2 + h^2(1-h)^2 - 2h(1-h^2)\cos\Delta] + \\ + 2(AD - BC)[4h^2 + (1-h^2)^2\cos\Delta] + \\ + 2(AC + BD)(1-h^4)\sin\Delta\,;$$

(*) Si può scrivere anche

$$2w_1 = e^{i(\omega t - \Delta/2)}[e^{-i\Delta/2}(a - ib) + e^{i\Delta/2}(c - id)] + \\ + e^{-i(\omega t - \Delta/2)}[e^{i\Delta/2}(a + ib) + e^{-i\Delta/2}(c + id)] = \\ = \cos(\omega t - \Delta/2)\,x + \sin(\omega t - \Delta/2)\,y\,,$$

e la vibrazione emergente è così decomposta in due vibrazioni rettilinee coniugate, come fa il MASCART nel suo *Traité d'optique*, tome 1r, pag. 237.

(**) Per l'esecuzione rapida del calcolo vedi C. BURALI-FORTI, *Geometria analitico-proiettiva*, 2ª ediz., pag. 36 (Petrini, Torino, a. 1926).

Digitized by Google

$$v^2 = (A^2 + B^2)\,[(1+h)^2 + h^2(1-h)^2 - 2h(1-h^2)\cos\Delta] +$$
$$+ (C^2 + D^2)\,[h^2(1+h)^2 + (1-h)^2 + 2h(1-h^2)\cos\Delta] -$$
$$- 2(AD - BC)\,[4h^2 + (1-h^2)^2\cos\Delta] -$$
$$- 2(AC + BD)(1-h^4)\sin\Delta;$$

$$\mathrm{mod}\,(u_1 \wedge v) = 2(A^2 + B^2 - C^2 - D^2)\,h(1+h^2)\sin\Delta +$$
$$+ 2(AD - BC)(1-h^4)\sin\Delta - 2(AC + BD)(1+h^2)^2\cos\Delta;$$

$$u_1 \times v = (A^2 + B^2 - C^2 - D^2)\,[(1-h^2)^2 + 4h^2\cos\Delta] +$$
$$+ 4(AD - BC)\,h(1-h^2)(\cos\Delta - 1) +$$
$$+ 4(AC + BD)\,h(1+h^2)\sin\Delta.$$

Perciò

$$(6)\quad \sin 2\psi = 2\,[h(1-h^2)(\cos\Delta - 1)(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) +$$
$$+ [4h^2 + (1-h^2)^2\cos\Delta](AD - BC) +$$
$$+ (1-h^4)\sin\Delta\,(AC + BD)]$$
$$/[(1+h^2)^2(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)].$$

$$(7)\quad \mathrm{tg}\,2\lambda = 2\,[h(1+h^2)\sin\Delta(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) +$$
$$+ (1-h^4)\sin\Delta(AD - BC) - (1+h^2)^2\cos\Delta(AC + BD)]$$
$$/[[(1-h^2)^2 + 4h^2\cos\Delta](A^2 + B^2 - C^2 - D^2) +$$
$$+ 4h(1-h^2)(\cos\Delta - 1)(AD - BC) +$$
$$+ 4h(1+h^2)\sin\Delta\,(AC + BD)].$$

Ricordando i valori di A, B, C, D si trova

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)\cos\gamma$$
$$A^2 + B^2 - C^2 - D^2 = a^2\cos 2\mu + b^2\cos[2(\gamma + \mu)] +$$
$$+ 2ab\cos(\alpha - \beta)\cos(\gamma + 2\mu)$$
$$AD - BC = ab\sin(\beta - \alpha)\sin\gamma$$
$$AC + BD = a^2\cos\mu\sin\mu + b^2\cos(\gamma + \mu)\sin(\gamma + \mu) +$$
$$+ ab\cos(\beta - \alpha)\sin(\gamma + 2\mu).$$

Digitized by Google

Sostituendo questi valori nelle espressioni precedenti (6), (7), risultano delle formule, che non stiamo a scrivere, perchè eccessivamente lunghe; esse danno tutte le formule particolari finora note per il calcolo degli elementi caratteristici d'una vibrazione, che abbia subìto la doppia rifrazione ellittica (*).

5. — Intensità d'una vibrazione.

Sarà conveniente dare l'espressione di quel che si chiama *intensità* d'una vibrazione, quando il vettore di questa abbia la forma generale (1).

Poniamo, come nel n. 1,

$$P = O + w$$

e calcoliamo l'energia meccanica totale del punto P, pensato come punto materiale, di massa unitaria, in moto.

Si ha:

$$\text{energia totale} = \text{energia cinetica} + \text{energia potenziale};$$

e siccome

$$\text{energia cinetica} = P'^2/2,$$
$$\text{energia potenziale} = \omega^2 (P - O)^2/2 \quad (**),$$

risulta subito

$$\text{energia totale} = \omega^2 [a^2 + b^2 + 2ab \cos(\beta - \alpha)\, i \times j]/2.$$

(*) Vedi Bouasse, *Polarisation rotatoire*, cap. VIII e IX.

(**) Vedi C. Burali-Forti e T. Boggio, *Meccanica Razionale*, pag. 272. Che l'energia totale debba essere costante, risulta da ciò: da $P = O + w$ si ottiene $P'' + \omega^2 (P - O) = 0$; moltiplicando internamente per dP, si si ricava

$$d(P'^2/2) + d[\omega^2 (P - O]^2/2] = 0,$$

ossia

$$P'^2 + \omega^2 (P - O)^2/2 = \text{cost.}$$

Digitized by Google

Il numero

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos(\beta - \alpha)\, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} \tag{8}$$

è, per definizione, l'intensità della vibrazione, rappresentata dal vettore $\boldsymbol{w}$.

Tale numero è dunque proporzionale all'energia meccanica totale del punto imagine P, pensato come punto materiale in moto (*).

È possibile assegnare, per il valore dell'intensità, un'espressione semplice, ed utile in molti casi.

Osserviamo intanto che si può scrivere

$$\boldsymbol{w} = \cos \omega t \cdot \boldsymbol{a} + \sin \omega t \cdot \boldsymbol{b},$$

essendo

$$\boldsymbol{a} = a\cos\alpha \cdot \boldsymbol{i} + b\cos\beta \cdot \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{b} = a\sin\alpha \cdot \boldsymbol{i} + b\sin\beta \cdot \boldsymbol{j}.$$

Ponendo ancora

$$P = O + \boldsymbol{w} = O + \cos \omega t \cdot \boldsymbol{a} + \sin \omega t \cdot \boldsymbol{b} \quad (**),$$

si ha, in modo analogo al precedente,

$$\text{energia totale} = P'^2/2 + \omega^2 (P - O)^2/2 = \omega^2 (\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2)/2;$$

l'intensità è quindi data da

$$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 \quad (***).$$

(*) Alla (8) si giunge anche in quest'altro modo. Essendo sempre

$$P = O + \boldsymbol{w},$$

calcoliamo il valor medio di $P'^2/2$ nell'intervallo di un periodo, cioè da 0 a $T = 2\pi/\omega$. Si trova:

$$\left(\int_0^T P'^2\, dt\right)/(2T) = \omega^2 [a^2 + b^2 + 2ab\cos(\beta - \alpha)\, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}]/4,$$

che, a meno della costante $\omega^2/4$, coincide con la (8).

(**) Quest'eguaglianza prova nel modo più semplice che, in generale, la traiettoria di P è un'ellisse. Vedi T. Boggio, *Calcolo differenziale*, pag. 248 (Lattes, Torino, a. 1921).

(***) Un tipo curioso di movimento centrale è il seguente. Il punto $\boldsymbol{P}$

Digitized by Google

sia attratto da n centri O_r, con forze proporzionali alle distanze da questi. L'equazione del movimento di P è

$$P'' = -\Sigma \omega_r^2 (P - O_r).$$

Poniamo

$$\Sigma \omega_r^2 O_r = (\Sigma \omega_r^2) \cdot O,$$

cioè sia O il baricentro dei punti O_r con masse ω_r^2. Allora

$$P'' = -\Sigma \omega_r^2 \cdot (P - O),$$

e quindi, posto

$$\omega^2 = \Sigma \omega_r^2, \qquad P = O + \cos \omega t \cdot x + \sin \omega t \cdot y,$$

ossia P descrive un'ellisse attorno al punto O, con una frequenza ω definita da $\omega^2 = \Sigma \omega_r^2$.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 5 Febbraio 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci D'Ovidio, Peano, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Ponzio, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli e Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci De Sanctis, Stampini, Brondi, Einaudi, Patetta, Prato, Cian, Faggi, Luzio, Jannaccone, Solari e Vidari che funge da Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Panetti, Schiaparelli e Bertoni.

Letto e approvato il verbale della seduta precedente, il Presidente apre la discussione sulla Relazione per il conferimento del premio Bressa, distribuita ai Soci, la quale conclude lasciando all'Accademia la scelta fra due scienziati, segnalati come particolarmente degni di attenzione. Avverte che, a termini dell'art. 10 del Regolamento, il premio è indivisibile, e che riesce, a termine dell'art. 7, vincitore del premio chi raccoglie la maggioranza assoluta col maggior numero di voti.

Nessuno prende la parola.

Il Presidente indice quindi la votazione. Raccolte le schede dei 25 votanti, e fatto dal Presidente, con la scorta del Segretario e del Socio Luzio, lo scrutinio, si ha il seguente risultato: al Dr. G. A. Blanc, voti 22; all'altro proposto dalla Commissione, voti 2; schede bianche 1.

Digitized by Google

Il Presidente proclama vincitore del 24° premio Bressa il sig. Dr. G. A. Blanc.

Il Presidente comunica quindi all'Accademia la lettera con la quale il generale E. Montasini, primo aiutante di campo di S. A. R. il Duca d'Aosta, ringrazia dell'invito rivolto al Duca di voler onorare di sua presenza la prossima solenne seduta inaugurale, e promette l'intervento medesimo. La cerimonia è fissata, come si ricorderà, per domenica 12, a ore 10,30, in conformità del desiderio espresso da S. A. il Duca.

Il Presidente dà quindi lettura di una lettera di S. E. il Capo del Governo, con la quale, annunciando la costituzione di un'Unione mondiale per lo studio dei problemi internazionali della popolazione, si invita la nostra Accademia a far parte del Comitato italiano per lo studio medesimo, e a sottoscrivere, all'uopo, una quota annua di contributo con un impegno non inferiore al quinquennio.

Il Presidente, mentre esprime il compiacimento dell'Accademia per il lusinghiero invito, avvisa che si debba anzitutto rispondere a S. E. il Capo del Governo ringraziando d'aver chiamata l'Accademia a partecipare a un'opera di tanta importanza politica e morale nonchè scientifica; ma soggiunge che, quanto alla fissazione del contributo, converrà prima tener presenti le condizioni finanziarie dell'Accademia. A questo proposito si trattiene a informare i Soci circa le ottime disposizioni dimostrate più volte dall'attuale Ministro della P. I. on. Fedele, di venire in aiuto al bilancio accademico, e circa gli affidamenti avuti al riguardo anche da S. E. il Ministro del Tesoro.

Il Socio De Sanctis propone che il Presidente nomini una Commissione da lui presieduta e costituita di due membri per ciascuna Classe perchè studii il modo e le forme di partecipazione all'opera cui l'Accademia è chiamata.

Il Socio Stampini riferendosi in particolare all'ultima parte delle comunicazioni del Presidente, propone che si faccia appello

Digitized by Google

al Podestà del Comune, perchè voglia anch'egli far concorrere il Municipio a migliorare le condizioni finanziarie dell'Accademia, che è il primo Istituto scientifico della Città e del Piemonte.

Il Socio VIDARI, citando l'esempio dell'Istituto lombardo di scienze e lettere, propone che, analogamente ad esso che è sussidiato da Enti locali, si ricorra pure alla Cassa di risparmio, la quale ha mostrato più volte di avere in pregio l'Accademia, e che suole esercitare la sua azione benefica in appoggio di Enti di cultura del Piemonte.

Il Presidente accoglie le varie proposte, e dichiara che ne farà oggetto di deliberazioni.

Passa infine a comunicare la lettera di S. E. Bodrero, Sottosegretario di Stato per la P. I., il quale annunciando l'erezione presso la Columbia University di New York della *Casa di cultura italiana*, invita l'Accademia a voler inviare ai generosi promotori di quella Istituzione, che è promessa di nuovo e più efficace orientamento della nostra penetrazione culturale nella grande Repubblica americana, un messaggio di adesione e plauso.

La notizia è accolta con vivo compiacimento dall'Accademia, la quale delibera di esprimere al Presidente della Casa di cultura italiana il proprio più cordiale plauso ed augurio.

Il Presidente, ricordando l'invito, pervenuto dal Ministero della Economia nazionale, alla designazione di una terna per la nomina dei componenti i Consigli provinciali dell'Economia, invita l'Accademia a procedere alla votazione.

Raccolte le schede, risultano eletti i Soci: PRATO, JANNACCONE, EINAUDI.

Gli Accademici Segretari:
ORESTE MATTIROLO
GIOVANNI VIDARI

Digitized by Google

***Relazione** della Commissione per il 24° Premio Bressa*
(quadriennio 1921-24).

Il 24° Premio Bressa si deve conferire allo scienziato Italiano che, durante il quadriennio 1921-24, abbia fatto la più insigne ed utile scoperta o prodotta l'opera più celebre in fatto di scienze fisiche e sperimentali, storia naturale, matematiche, chimica, fisiologia e patologia, non escluse la geologia, la storia, la geografia e la statistica.

La Commissione incaricata delle indagini preliminari e delle proposte definitive all'Accademia, dopo la integrazione dei suoi componenti nella seduta a Classi riunite del 22 gennaio, è risultata costituita dei Soci che firmano la presente Relazione, con la quale essa si onora di esporre le sue conclusioni.

Gli aspiranti al premio per propria iniziativa sono due: Alberto Pirovano col suo volume sulla *Mutazione elettrica delle specie botaniche e la disciplina della eredità nella ibridazione*, edito dall'Hoepli a Milano nell'anno 1922, e il Dr Mariano Lepore con un gruppo di *Pubblicazioni varie su argomenti diversi di patologia medica.*

Le proposte fatte dai Soci furono pure due:

Quella del Socio Panetti, appoggiata dal Socio Sacco, a favore di uno studioso dei problemi di aerodinamica.

Quella dei Soci Garelli e Ponzio per l'opera del Dottor G. A. Blanc sui *Metodi industriali per la utilizzazione integrale della leucite.*

Il libro del signor Alberto Pirovano dal titolo: *La mutatazione elettrica delle specie botaniche e la disciplina dell'eredità nella ibridazione*, Milano, Hoepli, 1922, con 114 illustrazioni, al suo apparire ebbe successo notevolissimo, come quello che pareva aprisse nuovi e non ancora sospettati orizzonti, non solo alla Scienza ma anche alla pratica, e perciò fu salutato con ammirazione e simpatia.

Digitized by Google

Oggi però, dopo quattro anni, il giudizio sopra quest'opera si presenta un po' differente. I metodi e gli istrumenti, adoperati dall'Autore per provocare la *jonolisi*, ossia lo *smembramento molecolare della materia viva organizzata dal plasma genitale* furono oggetto di critica, e non poche sue osservazioni sono discutibili.

La Commissione quindi, pur ritenendo il libro del Pirovano degno di molto riguardo, non stima che esso possa, nel momento presente, essere preso in definitiva considerazione per il premio Bressa, e ciò fino a tanto che la critica siasi definitivamente affermata sulla reale importanza dei fatti e dei risultati ottenuti da questo sperimentatore.

Il Dr Mariano Lepore presenta una serie di 15 pubblicazioni riguardanti casi patogeni svariati, la cui trattazione non si coordina ad alcuno speciale indirizzo di studi ed appare di carattere semplicemente informativo anzichè analitico e scientifico.

La sua attività si limita dunque alla casuistica medica, e non può essere considerata nei riguardi di un premio destinato a segnalare l'operosità scientifica.

Hanno invece nettamente tale carattere i lavori e le ricerche dei due studiosi segnalati dai Soci, quantunque in campi fondamentalmente diversi. Il giudizio sui lavori segnalati dal Socio Panetti viene qui omesso in osservanza al disposto dell'ultimo capoverso dell'art. 5 del Regolamento interno della fondazione Bressa, non essendo stato assegnato dall'Accademia il premio all'autore di tali lavori.

Con carattere cospicuo di scoperta di segnalata utilità per l'economia nazionale si presenta l'opera del Prof. Dr. G. A. Blanc per la quale esso viene qui segnalato dalla Commissione. Il Blanc, già noto nel mondo scientifico per interessanti ricerche sui fenomeni radioattivi, rivolse, nel dopo guerra, la sua attività alla soluzione dell'importante problema di utilizzare integralmente la leucite (silicato di alluminio e potassio) al fine di ricavarne sali di potassio, allumina e silice, e ne trovò una soluzione razionale e completa che già si è affermata vittoriosamente nella pratica industriale.

La leucite è uno dei minerali più importanti e diffusi delle masse laviche eruttate da alcuni vulcani e assai abbondante

Digitized by Google

nelle zone vulcaniche dell'Italia. Calcolano i Geologi che le riserve di potassa accumulate in queste roccie raggiungano in Italia complessivamente circa 100 miliardi di tonnellate di ossido di potassio, quantità poco distante da quella totale contenuta nei due giacimenti riuniti di Stassfurt e dell'Alsazia. L'allumina è all'incirca nella stessa proporzione.

Era anzitutto necessario arricchire in leucite le roccie vulcaniche, ed il Blanc, valendosi delle conoscenze sul magnetismo permanente delle lave, ha trovato un procedimento elettromagnetico razionale ed economico per separare, in modo praticamente perfetto, la leucite dalla ganga in cui essa è contenuta. Ricavato così il minerale allo stato di notevole purezza (95 %), ne studiò il trattamento con acidi minerali forti, dimostrando che era possibile ottenere in soluzione tutta la potassa e l'allumina del composto senza trascinarvi altresì, allo stato colloidale, la silice gelatinosa che avrebbe inquinato i sali e resa assai difficile, se non impossibile, la separazione.

Riducendo la leucite in forma granulare sabbiosa, adottando ingegnosi dispositivi meccanici ed opportuna concentrazione degli acidi (cloridrico e nitrico) la ganga silicea rimane allo stato di scheletro a struttura microporosa (idrogel) che costituisce un eccellente filtro. Si ottengono così soluzioni pure e calde di sali potassici e di alluminio, dalle quali si hanno separati e cristallizzati, mercè successivi raffreddamenti e saturazioni a caldo con acido cloridrico gassoso, o acido nitrico, il cloruro o nitrato di potassio ed il cloruro o nitrato di alluminio. L'allumina che si ricava successivamente dalla scomposizione del cloruro e del nitrato di alluminio è, previo riscaldamento a 150°, direttamente utilizzabile per la fabbricazione dell'alluminio per via elettrotermica.

È così risolto per l'Italia il problema dei sali potassici, indispensabili fertilizzanti, che finora eravamo obbligati ad importare, in quantità sempre maggiori ogni anno, dalla Germania e dalla Francia.

Nello stesso tempo il processo Blanc fornisce una fonte quasi inesauribile di materia prima per la produzione dell'alluminio, metallo che, di per sè e per le sue leghe, ha oggidì parte principalissima nella costruzione di oggetti di uso comune, di

Digitized by Google

numerosi apparecchi per industrie chimiche, di motori a scoppio ed altri organi destinati specialmente all'aviazione; ed appunto per questo in Italia si intensifica la produzione dell'alluminio facendo sorgere nuovi grandiosi impianti. È certo che mettendo la materia prima, cioè l'allumina di grande purezza e allo stato anidro, ottenuta col processo Blanc, a disposizione delle fabbriche elettrometallurgiche di alluminio, la nostra industria verrà a trovarsi in condizione di superiorità rispetto a quella estera, che deve ricorrere alla lavorazione chimica lunga e dispendiosa delle bauxiti.

La Relazione completa sulla *utilizzazione integrale della leucite come fonte di allumina, di potassa e di silice* è pubblicata negli Atti del Congresso Nazionale di Chimica industriale tenutosi a Milano dal 13 al 18 aprile del 1924.

Una successiva pubblicazione (estensione della precedente) è quella dal titolo: *Il trattamento della leucite con acido nitrico*, pubblicata negli Atti del II Congresso Nazionale di Chimica tenutosi a Palermo nel maggio 1926. Agli effetti della assegnazione del premio questa viene considerata come prova che l'Autore continua nell'opera intrapresa.

Ma i brevetti che proteggono i processi di lavorazione appartengono entrambi al periodo del 24° premio Bressa e sono il N. 199449 del 14 giugno 1921 ed il N. 219671 del 4 aprile 1923. L'attuazione industriale del processo appare ormai assicurata: a Sessa Aurunca (Napoli) esiste l'impianto minerario della Società Italiana Potassa per l'estrazione della leucite, che tratta già oggi circa 200 tonn. al giorno di lava leucotepitica del vulcano spento di Roccamonfina, estraendone la leucite al 18 % di K_2O ed al 22 % di Al_2O_3.

Il primo impianto pel trattamento chimico della leucite col processo Blanc adoperando l'acido cloridrico, venne fatto a Bussi (Aquila) e produce da tempo, regolarmente, forti quantità di cloruro di potassio ed ossido di alluminio di particolare purezza. L'allumina quivi prodotta è da qualche tempo inviata allo Stabilimento della Società dell'Alluminio Italiano a Borgofranco (Ivrea) per produrre alluminio di ottima qualità. Sorgeranno presto altri due impianti pel trattamento chimico della leucite su vasta scala, uno a Napoli, della *Società prodotti chimici*

Digitized by Google

Napoli, l'altro a Civita Castellana (Vulcano di Vico) pel trattamento con acido nitrico allo scopo di produrre nitrato potassico oltre che allumina.

L'opera svolta in questo campo di chimica applicata dal prof. Blanc è frutto di coraggiosa iniziativa, di assiduo lavoro sperimentale condotto con rigore scientifico, di abilità tecnica, mercè la quale vennero superate difficoltà pratiche, causa di insuccessi in numerosi tentativi precedenti. Benefici incalcolabili possono derivare all'economia nazionale da quest'opera, giacchè essa mette in valore, per la prima volta, una materia prima abbondantissima in Italia, ricavandone fertilizzanti indispensabili per l'agricoltura e l'allumina per alimentare una delle più importanti e moderne elettrometallurgie.

La segnalazione del trovato era dunque doverosa per la R. Accademia di Torino nella circostanza dell'assegnazione del 24° Premio, che si intitola al nome del munifico dottore di Langosio.

La Commissione, riconoscendo che i due scienziati hanno titoli ampi e sicuri per aspirarvi, ha discusso a lungo sul loro merito relativo. Ma la difficoltà di stabilire un confronto fra titoli di studio essenzialmente e fondamentalmente diversi, la convinse a rimettere all'Assemblea il giudizio, poichè essa sola con la moltiplicità delle competenze dei Soci e col discernimento che una visione più larga dell'opera scientifica può sola assicurare è in grado di decidere con sicuro fondamento.

La Commissione ritiene quindi di avere compiuto il suo mandato, in osservanza all'art. 6 del Regolamento, segnalando due scienziati meritevoli del premio e lasciandone la scelta alla Accademia.

La Commissione:

Francesco Ruffini *Presidente*	Federico Patetta
Giuseppe Peano	Vittorio Cian
Federico Sacco	Alessandro Luzio
Giacomo Ponzio	Pasquale Jannaccone
Gaetano De Sanctis	M. Panetti e F. Garelli *relatori.*

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIII, DISP. 7ª E 8ª, 1927-1928

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1928

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSI UNITE

12 Febbraio 1928

SEDUTA INAUGURALE SOLENNE

ALLA PRESENZA

di S. A. R. il Duca d'Aosta Emanuele Filiberto di Savoia

La seduta solenne, deliberata dall'Accademia per celebrare, con l'inizio dell'anno accademico, il quarto centenario della nascita di Emanuele Filiberto Duca di Savoia, si apre alle dieci e mezza nella gran sala delle adunanze, alla presenza di S. A. R. il Principe Emanuele Filiberto Duca d'Aosta.

Siedono ai lati dell'augusto Principe, S. E. il conte Petitti di Roreto, generale comandante la prima Armata, S. E. il generale De Vita, prefetto di Torino, l'ill. sig. conte ing. Alessandro Orsi in rappresentanza del Podestà, S. E. il generale Montefinali, comandante della Divisione militare.

Sono inoltre presenti: S. E. Casoli Cav. Gr. Cr. Vincenzo, l'on. Senatore conte Rebaudengo, gli on. Deputati Olivetti e Bagnasco, il questore comm. Da Roma, il gr. uff. Lanza direttore generale dell'Ordine Mauriziano, e molte altre autorità militari e civili, molti cittadini e signore.

Hanno scusato inoltre la loro assenza, ringraziando dell'invito, S. E. il cardinale Gamba, arcivescovo di Torino, S. E. L. Tiscornia, generale comandante il Corpo d'Armata di Torino, il quale s'è fatto rappresentare dal colonnello Olivetti, il R. Prov-

Digitized by Google

veditore agli studi, che s'è fatto rappresentare dal dott. De Dominicis segretario capo, il v. Presidente e il Commissario generale delle Esposizioni, i quali si son fatti rappresentare dal Gr. Uff. C. Dogliotti, membro della Giunta Esecutiva.

Dei Soci dell'Accademia sono presenti, oltre il Presidente Senatore Fr. Ruffini,

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: sen. D'Ovidio, Peano, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Herlitzka, Pochettino, Boggio, Garelli;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: De Sanctis, Stampini, sen. Einaudi, Patetta, Prato, on. Cian, Faggi, Luzio, Jannaccone, Solari, Bertoni.

Il Presidente Ruffini, avuto da S. A. R. l'ordine di dichiarare aperta l'adunanza, legge il seguente discorso:

" Altezza Reale, Eccellenze, Signori,

" La Reale Accademia delle scienze avrebbe mancato — e gravemente mancato — a un suo chiaro dovere; e, al tempo stesso, avrebbe fatto getto di un suo raro privilegio, qualora non avesse deliberato, come subito deliberò, di dedicare la solenne seduta inauguratrice di quest'anno accademico a commemorare quell'eroico Principe della Casa di Savoia, che fu Emanuele Filiberto.

" Chiaro dovere, dico; poichè l'Accademia non fu mai immemore che essa ebbe vita, protezione ed assistenza munifica dalla Dinastia sabauda. Della quale essa si gloria di essere stata la più eccelsa e la più immediata creazione culturale. Onde non a semplice ornamento, ma come simbolo augusto, l'effigie del Sovrano, da cui ebbimo il regale riconoscimento, sta al posto di onore in quest'aula. Nè l'Accademia può neppure scordare che l'alta considerazione, di cui essa ha goduto sempre, oltre la cerchia medesima degli uomini di scienza (e basti ricor-

Digitized by Google

dare che fra i nostri soci volle essere iscritto Napoleone il Grande), le veniva non meno dalle opere insigni di alcuni de' suoi membri, che dal prestigio incomparabile, di cui il nome sabaudo — sopra ogni altro nome italico — fu ognora circondato nel mondo. E così del lustro della vostra Casa, Altezza Reale, un qualche raggio si è pure riflesso sopra di noi; e i vostri fasti furono in ogni tempo fasti del nostro sodalizio.

" Raro privilegio, ho pure detto; poichè appunto l'essere questa nostra Accademia la primigenia, preminente e prediletta fra le creature culturali della Dinastia sabauda ci consente oggi l'onore di poter aprire la serie di quelle cerimonie, con cui Torino si è proposto di far rivivere la figura dell'Eroe, non soltanto innanzi agli occhi degli Italiani, ma in conspetto del mondo intiero, poi che veramente Egli fu un fattore della storia mondiale. E cotesto nostro privilegio ci è tanto più prezioso, in quanto ad esso dobbiamo ancora la vostra presenza fra noi, Altezza Reale, che di quel gloriosissimo Antenato rinnovate il nome, e con il nome le virtù: — l'animo invitto nelle imprese della guerra, e lo zelo lungimirante nelle opere della pace. Così che nulla, quanto la vostra augusta presenza, avrebbe potuto crescere a questa nostra cerimonia solennità e significazione.

" Conscia de' suoi doveri, orgogliosa de' suoi privilegi, l'Accademia si è studiata anche nell'anno decorso di proseguire con fervore e con serietà le sue ricerche in ogni ramo delle scienze; siccome apparirà dalle relazioni, per quanto succinte, che dei lavori delle due Classi vi saranno lette dai rispettivi segretari, i Soci Mattirolo e Vidari.

" Per quel che si attiene alla attività delle Classi unite io mi limiterò ad annunciare che il premio di fondazione Gautieri fu assegnato al Prof. Pietro Torelli, dell'Università di Modena, per le sue fondamentali ricerche di diritto e diplomatica comunale; e il premio di fondazione Bressa all'onorevole Barone

Digitized by Google

Alberto Blanc per le sue scoperte sulla utilizzazione integrale della leucite come fonte di allumina di potassa e di silice, dalle quali benefici incalcolabili possono derivare all'economia nazionale.

" Mi è gradito pure di annunciare che un nuovo premio per le scienze fisiche e chimiche fu recentemente istituito presso la nostra Accademia, grazie ad un lascito del Commendatore Ravani: — segno evidente della immutabile fiducia che nell'Accademia universalmente si ripone.

" Altezza Reale,

" Nelle RR. Lettere-Patenti del 1783, Vittorio Amedeo III diceva (e la sua parola non potrà mai uscirci dal cuore) di voler prendere la nostra Accademia " sotto l'immediata e speciale *sua* protezione „. Voi, degnandovi di accogliere il nostro fervido invito, mostraste di voler continuare questa bella tradizione della vostra Casa. Dell'altissimo favore l'Accademia Vi esprime, per la mia bocca, la sua infinita gratitudine „ (*Applausi vivissimi*).

Il Presidente dà quindi la parola al Socio Mattirolo, Segretario della Classe di Scienze fisiche, il quale così riferisce intorno ai lavori della propria Classe durante l'anno accademico decorso:

" Altezza Reale, Eccellenze, Signori,

" La Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, conscia e orgogliosa dei doveri che una tradizione nobilissima e ultra-centenaria impone agli accademici, ha nell'anno testè decorso, in N. 15 adunanze ordinarie, discussi e approvati per la pubblicazione nei suoi *Atti* N. 22 lavori interessanti, si può dire, tutti i campi di scienza concessi alla sua attività, e dei quali esatto conto è tenuto nei verbali delle singole adunanze.

Digitized by Google

" Di argomenti che hanno riguardo alle Matematiche e alla Fisica intese nel senso più largo, anche cioè nelle loro applicazioni pratiche, occuparono l'Accademia i seguenti Autori:

" Il Socio Direttore della Classe Carlo SOMIGLIANA, con uno studio: *Sulla determinazione delle costanti del geoide, mediante misure di gravità.*

" Il Socio Quirino MAJORANA con: *Una rappresentazione geometrica del trascinamento della luce per parte dei mezzi in moto.*

" Mario BOSSOLASCO discusse: *Le medie aritmetiche delle funzioni di un sistema ortogonale.*

" Filippo ODONE studiò: *I numeri reali definiti mediante le grandezze e successioni di interi.*

" Ugo CASSINA, *I limiti delle funzioni plurivoche.*

" Giorgio VALLE, *Le onde stazionarie nei sistemi in moto ad effetto Doppler.*

" Soluzioni di problemi demografici con metodi matematici furono presentate da varii Autori: Francesco TRICOMI, Francesco CANTELLI e Filadelfo INSOLERA.

" Della importante questione della Riforma del Calendario, alla quale tutte le nazioni si appassionano, trattò colla nota competenza il Socio PEANO.

" Luigi VOLTA determinò con una serie di osservazioni: *La differenza di longitudine dell'Osservatorio Universitario di Pino Torinese da Greenwich, servendosi della radiotelegrafia.*

" Gino CASSINIS presentò uno studio *Sulla determinazione dello schiacciamento terrestre mediante valori della gravità.*

" Di argomento riguardante la nuova Scienza areonautica si occupò Carlo FERRARI con una Nota: *Sulla rotazione non uniforme di un cilindro illimitato in un fluido viscoso indefinito.*

" Di meccanica tecnica e di applicazione alle costruzioni si occuparono:

Digitized by Google

" Il Socio Camillo Guidi riferendo sopra *Esperienze termiche fatte sopra una diga a volta.*

" Ottorino Sestini sopra il *Calcolo semplificato di solidi elastici scomponibili in tronchi prismatici.*

" La Chimica fu oggetto di varii lavori:

" Il Socio Felice Garelli col Dr. Ernesto Monath interessò l'Accademia con: *Determinazioni crioscopiche sopra soluzioni di gaz.*

" Michele Giua e Giulio Reggiani presentarono i loro studi sull'*Azione degli alcali sull'α-trinitrotoluene.*

" Lo stesso Giua trattò della *Tautomeria dell'etere etilico dell'acido α-etil-β,β-diacetilpropionico.*

" Nel campo della Geologia presentarono lavori:

" La D.ssa Rosina Zuffardi che si occupò dei *Corallari pliocenici dell'Isola di Rodi.*

" Vittorio Novarese che interessò l'Accademia sulla *Età delle Filliti di Rè in Val Vigezzo (Ossola).*

" Giambattista Dal Piaz che descrisse un nuovo sottogenere di un gigantesco *Anthracotherium isodattilo*, scoperto nei depositi dell'*oligoceno medio profondo* in Liguria e in Calabria.

" Il primo Centenario della morte di Alessandro Volta, del Sodalizio nostro membro insigne e venerato, fu degnamente commemorato dalla nostra Accademia nella Adunanza solenne inaugurale onorata dall'augusta presenza di S. A. R. il Principe del Piemonte.

" In tale occasione il Socio Carlo Somigliana, pronipote del Volta, rievocò brillantemente la figura del grande comasco, al quale l'umanità deve i fondamentali principii di quella scienza e la scoperta della nuova forma di energia che oggi regola e domina tutto il progresso umano.

" In tale occasione il Socio Federico Patetta faceva di pubblica ragione 12 importantissime lettere dirette dal Volta

Digitized by Google

al nostro illustre Socio il fisico Padre Beccaria e a Vincenzo Antinori, cimelii questi scientificamente del più vivo interesse, che rispecchiano l'altissima figura morale del grande italiano e illuminano il valore delle sue scoperte meravigliose „ (*Applausi*).

Il Presidente dà infine la parola al Socio VIDARI, il quale, nella sua qualità di Segretario della Classe di Scienze morali, così riferisce intorno ai lavori durante l'anno accademico '26-27:

" ALTEZZA REALE, ECCELLENZE, SIGNORI,

" Nelle regolamentari sedute della Classe di Scienze morali si ebbero, nell'anno accademico decorso, oltre le consuete recensioni orali sulle pubblicazioni scientifiche inviate all'Accademia o ad essa presentate da Soci, diverse letture d'argomento storico, filosofico, filologico e giuridico.

" Furono d'argomento storico-filosofico l'ampia lettura del Socio Presidente sen. RUFFINI sulla *Morale dei Giansenisti*; quella del Socio FAGGI su *L. Vives e la psicologia*, e l'altra, pure del FAGGI, sul *Realismo trasfigurato nello Spencer e nel Romagnosi*; le due del Socio VIDARI: una sul *Metodo del Pestalozzi* studiato nell'opera di M. A. JULLIEN, antico Socio dell'Accademia, e l'altra su l'*Aporti* studiato in *Alcune lettere inedite di illustri Piemontesi* a lui dirette, e in documenti pure inediti di Re Carlo Alberto e di Re Vittorio Emanuele II.

" Di argomento di storia politica e civile furono le letture del Socio LUZIO, in collaborazione col prof. SELLA, su *Sisto V e Carlo Emanuele I alla luce di nuovi documenti*; le due del Socio PATETTA: una sopra *Alcune genealogie*, e l'altra sopra *Alcune lettere inedite di A. Volta*; e due infine del Socio RONDOLINO: una sopra una *Cronachetta senese del sec. XIII*, e l'altra sulle *Cittadelle medioevali di Torino*.

" D'argomento filologico fu la lettura del Socio BERTONI sopra

Digitized by Google

Varie etimologie, e d'argomento giuridico quella del Socio Brondi sopra il concetto di *Autarchia*.

" Si accolsero anche: una lettura del Socio corrispondente Boffito sopra *L'occhiale e il cannocchiale di papa Leone X*, e diverse letture di estranei all'Accademia presentate da Soci, quelle cioè dei sigg. Furlani, Levi Attilio, Passerin d'Entrèves e Ruffini Avondo.

" La Classe ha infine proseguito nel suo programma di cooperazione scientifica con altre Accademie italiane e straniere, accogliendo nei suoi *Atti* la *Relazione Ussani* sui lavori della U. A. N. 1925-26, e la Relazione pure Ussani fatta alla *Commissione bibliografica del Comitato internazionale di Scienze storiche* „ (*Applausi*).

Lo stesso Socio Vidari, nella sua qualità di oratore designato dall'Accademia, continua leggendo il discorso commemorativo del Duca Emanuele Filiberto. L'orazione è seguita attentamente da S. A. R., dalle autorità e dal pubblico, ed è salutata alla fine da unanimi calorosi applausi.

Il Duca si degna di esprimere all'oratore il suo vivo compiacimento, e si rallegra col Presidente per la splendida riuscita della cerimonia.

Autorità e Soci si stringono intorno all'oratore esprimendogli i proprii rallegramenti.

Il Principe si avvia quindi verso l'uscita salutato da riverenti e caldi applausi di tutti i convenuti, e viene accompagnato dal Presidente, dal Tesoriere e dai due Segretari di Classe, nonchè dalle principali autorità, fino all'automobile.

Gli Accademici Segretarii:
Oreste Mattirolo
Giovanni Vidari.

Digitized by Google

EMANUELE FILIBERTO

Discorso del Socio nazionale residente GIOVANNI VIDARI

ALTEZZA REALE, ECCELLENZE, SIGNORI,

Gran ventura è per me, cui già toccò l'onore di rievocare davanti a Vostra Altezza la figura del Re Galantuomo, Padre della Patria (1), di potere oggi in questa Accademia, che alla munificenza di Vostra Casa deve le sue origini, illustrare il Vostro magnanimo avo, onde l'Italia va giustamente orgogliosa.

Felicissima fu l'idea di associare in un solo pensiero, in una sola pubblica nazionale commemorazione, il IV centenario della nascita di Emanuele Filiberto e il decennale della nostra grande Vittoria: l'alba e il meriggio del medesimo astro, che, sorto in un angolo oscuro della penisola, doveva, rotte le caligini del mattino, ascendere, pur tra lampi e tuoni, l'arco del cielo fino al pieno meriggio di Vittorio Veneto.

Quando l'8 luglio 1528 Emanuele Filiberto nasceva, al di là delle Alpi, nell'avita terra di Savoia, a Chambéry, l'Italia, al colmo de' suoi splendori civili artistici e letterarii, era ormai sulla china fatale della dissoluzione politica. Se Roma e Firenze, Milano e Venezia, Mantova e Ferrara e Urbino vantavano le glorie delle corti sontuose, dei principi magnifici, degli artisti, dei poeti, dei dotti, che illustravano con opere immortali castelli e reggie, tempii e sepolcri, e allietavano di canti e di novelle e di rappresentazioni sceniche le radunate eleganti e fastose, e celebravano in sottili ragionamenti pieni di finezze e

Digitized by Google

soffusi di dottrina quel vivere lieto e sapiente, amabilmente epicureo, classicamente composto; nel medesimo tempo si andavano seminando in quelle corti e da quei principi, in quelle cittadinanze e da quei condottieri e ammiragli e mercanti i germi di un rapidissimo sfacelo, a cui, d'altra parte, le vicende esterne della penisola dovevano recare un formidabile impulso.

Se da un lato le ambizioni e le invidie delle maggiori potenze, di Roma e di Venezia, di Milano e Firenze, intorno alle quali si componevano in mobili costellazioni i minori principi, corrodevano in gare meschine e in un febbrile moto di congiure, di guerre e di diserzioni la fibra italica, e fomentavano le più audaci ambizioni degli stranieri, e ne attizzavano le ire sanguinose qui sulle nostre terre; d'altro lato, i grandi avvenimenti extra-italiani, come lo spostarsi degli interessi commerciali e marittimi dal Mediterraneo all'Oceano verso le lontane terre pur ora scoperte dal genio d'un Italiano, e il sommuoversi di tutta la gente germanica al possente grido ribelle d'un uomo di fede e di passione, e il costituirsi di forti nuclei nazionali, uscenti dalla decaduta feudalità, intorno ad alcune case principesche, segnavano nel loro assieme l'ora della ineluttabile decadenza italiana.

L'Italia dell'Umanesimo e del Rinascimento, l'Italia, a cui avevano data ricchezza Venezia e Genova coi commerci nell'Oriente, e splendori di gloria mondiale il Papato con il suo incontrastato dominio, e varietà infinita e meravigliosa di manifestazioni civili le repubbliche comunali e le signorie, quell'Italia non poteva più reggere di fronte alla rivoluzione scientifica e commerciale, religiosa e politica, che essa pure, col suo stesso genio, aveva per gran parte o provocata o iniziata, e che ormai procedeva per la sua strada senza di lei e, peggio, contro di lei.

Orbene, in tali condizioni di cose fu gran ventura e, direi, nuovo segno di quell'assistenza provvidenziale onde l'Italia è privilegiata nei secoli, fu gran ventura, dico, che una regione della penisola fosse rimasta quasi al di fuori, o appena lambita, da quella gran fiamma splendente e divoratrice dell'Umanesimo e del Rinascimento (2).

Digitized by Google

Nelle più remote terre pedemontane, dal Canavese al Monregalese, essa non era giunta: la costituzione sociale e la vita del popolo vi eran rimaste avvolte in un'aura di semplicità rozza ma forte, un po' angusta, ma seria, dalla quale si potevan trarre a suo tempo sudditi devoti, soldati impavidi, cittadini incorrotti. La terra attendeva la sua ora per destarsi alla vita; attendeva il suo seminatore.

Ed ei venne. Venne quando nell'urto formidabile delle nuove potenze, la francese e la spagnola, che si gettavano avide sull'Italia fulgida di ricchezza e di coltura, un giovine principe trentenne gettò la sua spada vittoriosa, ricompose in forte unità di stato le terre degli avi e si assise accanto ai principi della rinnovantesi Europa, erede, esso, della forza italica disfatta a Fornovo, gloriosamente arresasi a Gavinana, e iniziò di qui, da Torino, piccola capitale del piccolo ducato, le nuove vie della storia.

I.

Emanuele Filiberto nasceva da un principe ridotto, un po' dalla sua imperizia e debolezza, e molto dalle avverse vicende, dalle violenze e fellonie altrui allo stremo della impotenza, se non anche della miseria. E il piccolo Emanuele, unico superstite di una prole numerosa, debole e malaticcio, pareva recasse in sè i segni di una fatale estinzione della sua casa; talchè i potenti della terra già s'argomentavano, avviando il tenero rampollo per la carriera ecclesiastica, di compensare con un cappello cardinalizio la perdita di una corona.

Ma " vedi giudizio uman, come spesso erra „. Il Cardinalino, come usavasi chiamare l'erede di Carlo III, riscoteva nel cuore e nella mente il genio dei suoi avi; e doveva dall'imo stesso della prostrazione, dallo spettacolo e dall'esperienza delle angustie politiche militari e finanziarie, entro cui si dibatteva la sua casa e la sua terra, trarre gli stimoli a una fiera e diritta rivendicazione del proprio prestigio e della propria potenza.

Educato, come narrava il Tonso (3) nel 1596, cioè pochi anni dopo la morte di lui, negli esercizi fisici e militari come

Digitized by Google

negli studii letterarii e scientifici, Emanuele fin dai primi anni dimostrò una vivacità inquieta e operosa. Ancor fanciullo odiava i pigri e gli oziosi, e in ogni cosa a cui si accingesse portava intelligenza e alacrità di spirito.

La lotta, la caccia, l'equitazione, continua il Tonso, erano i suoi esercizi favoriti, tantochè più tardi nessuno stava a cavallo e con maggior decoro di lui: " ut postea nemo aptius maioreve cum venustate equo insideret „. Gli studii letterarii coltivò, ma non a fondo; trascurò il greco, nè curò molto la poesia, sebbene sia stato dei poeti estimatore: " in poeticae studio non admodum versatus est, quamvis poetarum sui temporis amator „; coltivò invece molto la storia, la morale, la politica e più ancora la matematica: " mathematicis impensius operam dedit, eorum studia unquam intermittens „ (4).

Doveva essere, dunque, un giovinetto arrobustito ormai di corpo e di spirito quando, a tredici anni, presentato in Genova all'Imperatore Carlo V, gli si dimostrò conscio della sua dignità principesca, e smanioso di seguirlo, sia pure in qualità di paggio o di scudiero, nelle imprese di guerra a cui il possente imperatore si accingeva in Germania, e che dovevano presentarsi alla fantasia del piccolo Emanuele con tutto il fascino del meraviglioso e dell'eroico. A lui forse tardava di uscire da quella povera corte, già orbata della luce irraggiante dalla duchessa, la bella Beatrice di Portogallo (sorella della moglie di Carlo V), morta quando Emanuele Filiberto aveva dieci anni, da quella corte umiliata in Savoia e in Piemonte da Svizzeri, Spagnoli e Francesi depredatori di quasi tutto lo Stato (5). Ma soltanto nel 1545, quand'era sui diciotto anni, il giovine principe potè uscire per il mondo a conquistarsi con l'ingegno e con il volere la nuova fortuna.

Da Vercelli per Milano, Brescia e Trento egli si avviava nella primavera di quell'anno verso la Germania a raggiungervi in Worms l'imperatore. Al quale infatti il Principe di Piemonte (così Emanuele Filiberto era salutato) presentò nel luglio, a nome del padre suo, il duca Carlo III, un ampio memoriale sulle infelicissime condizioni del ducato e sulla necessità urgente di venire in soccorso dei sudditi ridotti dalle devastazioni solda-

Digitized by Google

tesche, dalle contribuzioni di guerra e dalle inclemenze del cielo allo stremo di ogni risorsa. Il cuore del giovine principe ne era vivamente commosso e preoccupato; ed egli stesso sentiva le punture di quelle distrette finanziarie, che lo obbligavano a ridurre al minimo le spese del seguito, e perfino a ricorrere ai prestiti per procedere nel viaggio accanto all'Imperatore. Non si leggono senza emozione e meraviglia alcune lettere sue e dei suoi consiglieri al duca, datate da Colonia, nel 1545, da Mästricht, da Ratisbona e da Ulma nel 1546, che sono nella ricchezza dei loro particolari e nella cruda ingenuità delle espressioni una eloquente pittura dello stato miserabile del Piemonte in quegli anni (6).

Si comprende quindi come la coscienza del giovine principe, lontano dal padre e dalla patria, e fatto partecipe ormai di una vita aperta a tutte le possibilità di brillante azione militare, dovesse essere agitata da ambizioni ed emozioni diverse. Da una parte il dolore del suo popolo, l'umiliazione della sua casa, la sua stessa mortificazione personale; dall'altra il senso della propria energia giovanile e della propria dignità ducale, la precisa intuizione dei grandi avvenimenti di guerra che s'andavano svolgendo intorno a lui, l'esperienza ormai raccolta della importanza che avevano in quell'età, come hanno, del resto, sempre, accanto al valore personale, le alte relazioni, le amicizie e le parentele, per restituire o sollevare le fortune di un uomo, dovevano tumultare nello spirito di lui, rendendolo insofferente di quello stato, smanioso di opere ardue e gloriose, in cui la sua forza potesse provarsi, ambizioso sopra tutto di riconquistare egli, con le armi e la virtù, un'alta e salda posizione morale e politica per sè, per la sua casa, per il suo popolo. La conferma di questo stato d'animo di lui si ha nel suo comportamento di fronte, per un lato, al re di Francia, per l'altro, all'Imperatore. Al primo, che nel 1546 lo sollecitava con lusinghiera promessa ad abbandonare il servizio di Carlo V, egli, rivendicando il titolo di Principe di Piemonte che il re non aveva con lui usato, fieramente rispondeva che anzitutto non poteva ascoltare offerte senza informarne il padre, da cui sentiva di dipendere, e che, d'altro lato, essendosi volontariamente

Digitized by Google

dato all'Imperatore, suo zio, non poteva senza viltà abbandonarlo (7): e al secondo, il quale, accingendosi alla dura guerra contro la lega smalkaldica, avrebbe voluto che, dati i pericoli dell'impresa, il duca Carlo III richiamasse presso di sè il figlio, egli rispondeva nel giugno 1546 pregando e supplicando il padre che gli fosse concesso di seguire le armi imperiali in quella guerra che, diceva con presago pensiero, doveva segnare l'inizio della reintegrazione dei suoi stati, e invocava l'accoglimento della sua domanda " pour l'honneur que me peut succeder, et le desir que j'ai d'avecque le temps vous fere par ce moyen service " (8). Il suo desiderio fu esaudito: ed egli continuò a seguire l'imperatore da Ratisbona ad Ulma, ad Augusta, a Spira, assumendo il comando della cavalleria alla battaglia di Mühlberg (13 aprile 1547) (9). Insieme egli manteneva con assidua corrispondenza il contatto con i suoi popoli di Piemonte, ai quali avrebbe voluto, come scriveva in una lettera al governatore d'Asti, mitigare le tristi condizioni e assicurare anzitutto la giustizia " sendo il principale et vero modo di conservare li popoli con soddisfare prima a Iddio qual ha eletto li principi a tal administratione " (10).

Così, sotto la dura lezione dell'esperienza e nella severa disciplina militare, il giovine principe si andava ritemprando nel carattere, arricchendo di viva coltura, addestrando alle opere di governo. E quando, nel 1553, venne a morire il padre suo, Emanuele Filiberto, fatto duca di Savoia, ormai nel fiore della sua giovinezza, era anche molto salito nella riputazione di principe e di capitano. Segnalatosi come generale dell'esercito imperiale, all'assedio di Hesdin, e alla liberazione di Renty (1554), egli avrebbe pur voluto spiegare il proprio genio militare qui nell'avito Piemonte, che continuava ad essere percorso e devastato in scaramucce e battaglie e assedii, da Ivrea a Cuneo, da Casale ad Aosta; ma la sua istanza all'Imperatore non ebbe successo. Forse le mene recondite di un suo rivale, il marchese don Ferrante Gonzaga di Mantova, nominato, nel 1546, luogotenente dell'Imperatore in Lombardia, contribuivano a tenerlo lontano dalle sue terre, e miravano a metterlo in cattiva luce nell'esercito e nella diplomazia. Alcuni dispacci da Londra

Digitized by Google

nell'agosto e settembre 1555 del conte Annibale Litolfi, uomo di fiducia di don Ferrante Gonzaga, segnalavano con gelosa preoccupazione il pericolo che Emanuele Filiberto di Savoia fosse nominato governatore di Inghilterra, e sposasse la futura regina Elisabetta, ed esprimevano la eventualità non sgradita che il duca fosse ammazzato in Alemagna (11).

Intuivano i Gonzaga, eredi orgogliosi di una grande casa e di una meravigliosa tradizione di fasto e di potenza civile, che il giovine principe, nipote dell'Imperàtore, onorato di fiducia e di stima, già insigne di vittorie militari, ricco di giovinezza e di ambizione era l'astro nuovo sorgente nel cielo d'Italia, che avrebbe ben presto con il suo splendore oscurato ogni altra stella ormai declinante. E infatti anche lontano, anzi appunto perchè lontano, il duca di Savoia potè, a dispetto dei suoi connazionali invidiosi ed emuli, raccogliere quei superbi allori, che dovevano aprirgli libera e luminosa la via del ritorno in patria. Nell'agosto del 1557 vinceva la battaglia di S. Quintino, una di quelle grandi battaglie storiche, che decidono per qualche secolo le sorti dei popoli. E dopo varie vicende d'armi, nelle quali andò languendo il già stanco e spossato vigore bellico delle parti contendenti, alfine, nell'aprile del 1559, si firmava quella pace di Castel Cambresi, che chiudeva circa mezzo secolo di guerre europee, in parte d'origine dinastica in parte d'origine religiosa, e segnava l'inizio d'una nuova età per l'Europa tutta, per l'Italia in ispecie.

II.

Emanuele Fillberto poteva ringuainare la vittoriosa spada, e, come lo rappresenta il meraviglioso monumento del Marocchetti, tornar caracollando sul suo bel destriero nelle terre degli avi, dal suo genio riacquistate. Ma come le trovava deserte sconvolte mutilate impoverite! Francesi e Spagnoli non cessavano di tenervi occupate o presidiate le principali città: Torino, Chivasso, Villanova d'Asti, Chieri, Pinerolo, dovevano rimanere nelle mani dei Francesi finchè non fossero definite alcune minori vertenze col Duca; Asti e Santhià dovevano accogliere presidii di

Digitized by Google

Spagnoli finchè i Francesi non sgombrassero le cinque piazze loro consentite (12). D'altra parte lo stato di guerra che da tanti anni vi aveva durato, le calamità della pestilenza e delle intemperie e della fame, le ire civili tra fazioni entro le mura di una stessa città e tra città vicine, i dissidii e contrasti religiosi o già latenti o rinfocolati dalle infiltrazioni di pensiero luterano o calvinistico avevano prostrato le forze della regione piemontese: imboschita la terra e selvatica, abbruciate le case di campagna, demoliti o smantellati i castelli, dispersa e immiserita e mortificata la popolazione, abbandonato o negletto il culto cattolico, sconvolte e divise le coscienze dalla propaganda avversa, nulli gli studii e quasi barbara la coltura: tale il quadro della situazione tracciata dagli stessi contemporanei (13).

Che poteva fare un principe, fosse pure di coraggio e di avveduta esperienza, in tale condizione di autonomia limitata e sorvegliata, di prostrazione e dispersione quasi mortale delle orze civili? Arduo compito gli si presentava innanzi; ma egli vi si accinse con propositi ben maturati, che si andavano sempre meglio determinando e precisando nel corso degli eventi; assumere fortemente nelle proprie mani le redini dello stato e del governo, destreggiarsi con vigile prudenza tra le forze avverse, comporre intorno a sè, in fascio vigoroso e saldo, le energie migliori del paese, eccitare indirizzare e disciplinare le energie languenti e le promettenti. Ma quel che mi sembra costituisca ai nostri occhi la peculiare e più insigne benemerenza di quel principe-statista, di quell'uomo di guerra trasformatosi in uomo di governo, di quel giovine assurto da una educazione, veramente internazionale, compiuta tra Francesi e Spagnuoli, Svizzeri e Fiamminghi, Inglesi e Tedeschi, al reggimento nazionale di un piccolo principato della ormai asservita Italia, è l'avere egli, più che intuito, sentito e vissuto, con vigoria e dirittura la missione italiana del suo stato e della sua casa (14). In un tempo, in cui i grandi stati unitarii si costituivano e si rafforzavano per opera di monarchi, che raccoglievano nelle proprie mani la somma del potere, e che le forze militari, come la civile e la religiosa, rivolgevano ai fini dello stato nazionalmente costituito, Emanuele Filiberto comprese che analoga funzione, sia

Digitized by Google

pure in più modeste proporzioni, a lui spettava in Italia. Epperò la politica interna e l'estera, la militare e l'ecclesiastica, la giudiziaria e la culturale egli informò di quel pensiero, o almeno accese di quella passione. E per venti anni, da quando nel novembre 1560, dopo d'avere toccato nel suo viaggio di ritorno Nizza e Cuneo, Savigliano e Cherasco, Racconigi e Moncalieri, pose stanza in Vercelli fra le feste del popolo, fino a quando nell'agosto 1580 veniva a morire, poco più che cinquantenne, nella riconquistata capitale, fu tutta una intensa e fervida vita rivolta a realizzare, per quanto era possibile in mezzo a molteplici difficoltà, quel suo programma.

Il primo pensiero che dovette occuparlo, appena tornato in Piemonte, fu la liberazione dei suoi stati d'ogni traccia di dominio straniero. E giovandosi molto, e con sagacia, della parentela contratta con la casa regale di Francia per il suo matrimonio con Margherita di Valois, sorella di Enrico II; e poi, nel 1562, fatto più forte dal fortunato evento che, recandogli l'erede della corona, lo metteva al sicuro contro le ambizioni lungimiranti de' suoi avversari ed emuli, egli riuscì ad ottenere, in seguito a lunghe e difficili trattative, lo sgombro delle piazze occupate, Villanova, Chieri, Chivasso, Torino, e potè nel febbraio del 1563, celebrare con la duchessa, tra le feste della corte e del popolo, il suo ingresso nella ricuperata capitale.

Ma Pinerolo e Savigliano rimanevano ancora nelle mani dei Francesi, Asti e Santhià avevano presidii Spagnoli: bisognava quindi dall'una e dell'altra parte insistere con abilità e con energia, perchè la liberazione dallo straniero fosse completa. Ora, più che dieci anni durò l'opera diplomatica accorta insinuante alacre tenace, condotta da Emanuele Filiberto, per mezzo di taluni suoi abili ministri, presso le corti di Madrid e di Parigi, dove le difficoltà create dalla potenza politica, dai pregiudizi, dagli interessi, dalla corruttela, dall'astuzia erano grandissime, e ad ogni passo risorgenti. Alfine, la fortunata circostanza del viaggio compiuto dal nuovo re di Francia Enrico III, che, giungendo dalla Polonia a Venezia, dovette di là attraversare l'Italia superiore per recarsi ne' suoi stati, diede modo a Emanuele Filiberto di conquistarsi, con la magnifica accoglienza fatta

Digitized by Google

al Sovrano Francese, con la dimostrazione della propria forza e con l'abilità del proprio contegno, la promessa d'immediata cessione delle due piazze di Pinerolo e di Savigliano, che il duca ben giustamente diceva essere le *chiavi di casa*. La consegna infatti accadde nel dicembre del 1574; e un anno dopo, per effetto dei patti stipulati a Castel Cambresi, anche Asti e Santhià erano sgombrate dagli Spagnoli.

Così la gloria di San Quintino, sapientemente tesoreggiata e sfruttata dal valoroso principe, produceva, pure a distanza di quasi vent'anni, tutte le sue benefiche conseguenze.

Rimanevano tuttavia due spine nel cuore del Piemonte: quella di Saluzzo nelle mani dei Francesi, e quella del Monferrato, che dagli Aleramidi era passato ai Paleologhi e da questi, nel 1536, ai Gonzaga di Mantova, protetti fortemente dall'Imperatore e dal re Filippo di Spagna. L'animosità invidiosa dei Gonzaga verso Emanuele Filiberto s'era già manifestata quando il giovine principe combatteva in Germania e nelle Fiandre; e questi a sua volta, diventato padrone de' suoi stati e della sua capitale, vedeva nella casa rivale un ostacolo formidabile alla fremente ambizione di principe piemontese (15). Ma a lui non conveniva allora, per complessi motivi di politica militare ed ecclesiastica, inimicarsi nè la congiunta Francia nè il potente sovrano che stringeva l'Italia nella sua morsa fra Milano e Napoli; ed egli dovette quindi lasciare intatte le due grosse questioni, al suo forte e ben degno successore, a Carlo Emanuele I, al quale esse dovevano presentarsi più tardi come i problemi immanenti e urgenti della sua varia e battagliera, ardimentosa e indomita azione di governo.

Emanuele Filiberto per altra via, con maggior fortuna e gloria continuava la sua politica di espansione italiana. Verso il mare egli comprendeva doversi rafforzare lo stato, verso il mare che da Nizza a Villafranca, già sue, lambendo i suoi stati, gli si distendeva dinanzi con amenità di poggi e di riviere, e gli si apriva come la gran via, su cui ormai dovevano ricercarsi le nuove fortune (16). Onde, se per un lato egli afforzava lo stato di terraferma con la creazione della milizia nazionale munita di buone artiglierie, e con le fortificazioni, da lui stesso

Digitized by Google

in parte escogitate, e poi eseguite dall'architetto Pacciotto, di Vercelli, di Torino, di Cuneo, di Savigliano, per un altro lato gettava in mare da quattro a dieci galere, a cui preponeva come generale Andrea Provana signore di Leynì; e teneva gli occhi aperti sopra Savona, dominata da Genova, e sul Finale in signoria prima dei Del Carretto poi degli Spagnoli; e concludeva negli ultimi anni la sua politica marinara con l'acquisto di Tenda e di Oneglia (1576). Ma la maggior gloria in questo campo egli raccolse con la partecipazione delle sue galere, guidate dal Provana, alla impresa crociata che terminò con la celebre giornata di Lepanto. In quelle acque, dove la veneta repubblica raccoglieva uno de' suoi ultimi trionfi, il duca di Savoia cimentava per la prima volta la sua piccola flotta, quasi ad attestare che pure in quel modo il nuovo stato aspirava ad affermare il nome italiano, raccogliendo l'eredità glòriosa delle repubbliche marinare.

III.

E intanto egli attendeva instancabile e multanime alle opere di pace. Fare la giustizia e accrescere le ricchezze del paese furono per Emanuele Filiberto i segni, cui egli rivolse costantemente l'attenzione nella sua politica interna: fare la giustizia, per quanto gli era possibile in tempi di grandi disuguaglianze sociali, di privilegi sfacciati in favore di alcune classi, di leggi o incerte o complicate, di procedimenti giudiziarii dominati di spesso dall'arbitrio, qualche volta dalla crudeltà; accrescere le ricchezze del paese, nel quale le fonti della produzione, l'agricoltura e l'industria, erano primitive nella tecnica, poverissime di mezzi e di materie prime, impacciate da vincoli e da restrizioni. Eppure in ambo i campi molto operò con quella tenacia inflessibile che gli meritò il nome di " Testa di ferro „; e se non tutto conseguì, impigliato egli stesso nei pregiudizi del tempo e quasi compresso da esigenze molteplici, nuove vie additò e soluzioni propose, che nei secoli si maturarono.

" Volendo noi, diceva in un suo decreto del 20 marzo 1561, il buon reggimento della giustizia, così anche che sia levata l'occasione a quelli, nelle cui mani l'abbiamo rimessa, di torcere

Digitized by Google

dal diritto sentiero „ (17), provvide anzitutto a rendere i giudici indipendenti dal vile e pericoloso emolumento delle sportule, assegnando loro stipendio fisso sul bilancio dello stato; volendo d'altra parte, che i suoi sudditi avessero possibilità di uguale e chiaro trattamento giudiziario, vietò loro di ricorrere a tribunale straniero, e impose che gli atti giuridici venissero stesi, non più in latino, ma in lingua volgare (segno eloquente e importante del suo spirito d'italianità); volendo infine rendere la giustizia pronta e precisa, obbligò i senatori a compensare del proprio i danni delle indebite dilazioni, e regolò mediante un codice il procedimento delle cause civili (18). Ma quel che mi sembra singolarmente importante nei riguardi della giustizia e dell'assetto giuridico dello stato è l'editto del 25 ottobre 1561, col quale il duca si proponeva, con motivazioni in parte ideali, in parte finanziarie, di giungere all'abolizione di quella servitù della gleba, che inceppava persone e sostanze. " Poichè piacque a Dio, diceva il Duca nel suo Editto, restituire l'umana natura nella sua piena libertà, e tutti i principi cristiani hanno da lungo tempo estinto nelle loro terre l'odioso nome di servitù,..... pur ne rimane ancora certa specie..... le cui persone sono dette *tagliabili*, caricate d'insopportabili legami, e incapaci di testare..... Noi sentiamo la giusta doglianza di coloro che desiderano di uscire di tanta miseria, e preferendo il sollievo loro a qualunque nostro profitto, mossi da pietà, abbiamo voluto rimediarvi. Perchè è proprio d'un buon principe usare clemenza e magnificenza verso i sudditi, nè crediamo potere acquistare migliore fama, che nel sollevare i nostri sudditi e loro beni tagliabili da tal servile condizione, rendendoli liberi e franchi in perpetuo „. E seguivano le indicazioni delle somme per l'affrancamento dei beni, e le regole secondo cui esso si doveva compiere. Ma la buona volontà del principe urtò contro la stessa povertà di molti sudditi, che erano nella impossibilità di versare la somma richiesta per l'affrancamento, e contro l'inerzia delle tradizioni e del costume, che sono talvolta i più duri ostacoli al rinnovamento e miglioramento della vita. L'opera di Emanuele Filiberto, commenta il Ricotti, sgombrò sì la strada, ma non fu compiuta se non in capo a due secoli (19).

Digitized by Google

Analoghe difficoltà si opposero anche all'azione sua rivolta al miglioramento delle condizioni economiche del paese. Il suo programma era vasto vario e vivo: abbracciava la coltivazione del suolo, il regime delle acque, lo sfruttamento delle miniere, l'impianto delle industrie; mirava a stimolare le energie latenti, a suscitare l'emulazione fra i produttori, a richiamare dall'estero abili artieri; ma gli dava travaglio l'inerzia dei sudditi, i quali, secondo quanto riferivano gli ambasciatori veneti acutissimi osservatori, non sapevano avere desiderio d'altra cosa che di godere i piaceri del corpo, e del resto poco curavansi (20). Tuttavia parecchie iniziative assunse il Duca e promosse: famoso è fra gli altri l'impulso dato alla coltivazione del gelso nel podere detto la Margarita presso Tronzano; provvida fu l'idea di far scavare un canale dalla Stura di Cuneo al Po, e di ridurre coll'irrigazione i pascoli demaniali presso Barge e gli sterminati pascoli dei comuni; sagge le concessioni di derivazioni d'acqua dal Tanaro, dalla Dora, dall'Orco, dal Cervo, dall'Elvo, e per l'impianto di mulini sul canale di Ceva, sulla Dora, sulla Sesia; numerosi i privilegi, i premi, le esenzioni concesse a maestri d'arti, a inventori o costruttori sia piemontesi che forestieri per fabbriche e industrie, come dei vetri, del sapone, dei panni, della carta, della seta. Curioso è fra gli altri il privilegio concesso per vent'anni a certo Bizozzero " inventore d'artifizi a levare acque e innalzarle perpetuamente a qualsivoglia altezza, e altre sue invenzioni, e tra esse una lucerna di metallo e d'argento che fa chiarissimo lume, senza ombra se non sotto il piede, la quale tiene olio per cinquanta ore „ (21).

Ma lo spirito realistico e pratico del Duca, che già da queste concessioni si manifesta, appare confermato in modo, direi anche più interessante, dal fervore largamento conferito da lui a tutte le iniziative rivolte allo sfruttamento della ricchezza mineraria del suolo, nelle valli di Luserna, di Lanzo, di Brosso, e sulle spiagge di Nizza per l'estrazione del sale. C'era indubbiamente in questa tendenza del Duca il riflesso di quella preoccupazione finanziaria, che fu prepotente in tutto il suo governo (22), stretto fra le angustie del tesoro pubblico ereditate dalle guerre, e i bisogni del nuovo stato che si andava creando; ma c'era

Digitized by Google

anche, io penso, un po' di quella segreta e inquieta curiosità della natura e dei suoi misteri, che allora, in pieno cinquecento, fermentava in molti cervelli, ed esplodeva in ricerche tra alchimistiche e magiche, dirette alla soluzione dei grandi problemi scientifici e tecnici dell'epoca (23).

IV.

Un ultimo aspetto, sotto il quale va considerata la figura di Emanuele Filiberto, è quello dei suoi rapporti con le questioni religiose e, in genere, con i problemi dello spirito.

Che egli fosse stato educato nella più severa ortodossia cattolica, nessun dubbio; che egli fosse per sentimenti, per convinzioni e per pratica di vita sinceramente e profondamente attaccato, come figlio fedele, alla Chiesa, nessun dubbio del pari.

È nota, ed è stata pubblicata integralmente dallo Sclopis, una preghiera del Duca, che merita d'essere riportata, sia pure riassunta e tradotta dal suo antico rubesto francese, come documento insigne della fede di Lui.

" Mio Dio, mio Creatore e Redentore, che sei morto per me e per tutti coloro che ti confesseranno, e che crederanno ciò che la Santa Chiesa cattolica e apostolica comanda; io ti supplico umilmente e con tutta la sommissione che deve la creatura al Creatore, e il nulla al Tutto, e particolarmente io, a cui tu hai fatte tante grazie non meritate e che non mai meriterò, affinchè ti piaccia perdonarmi i miei enormi peccati, e la grande ingratitudine che ho avuto per i grandi e innumerevoli benefizii e onori ricevuti dalla tua divina bontà, e per l'avvenire tenermi sotto la tua protezione, aiutandomi a non più offenderti per potere governare il popolo che mi hai commesso, nella tua santa Fede e in buona giustizia „ (24).

Ma egli aveva anche trascorsi gli anni della sua giovinezza, fra i diciotto e i trenta, quelli nei quali si raccolgono le esperienze forse più decisive per la vita, e si formano gli ideali, destinati a realizzarsi nella maturità, aveva, dico, trascorsi quegli anni nel gran tumulto sollevato dalla questione religiosa.

Digitized by Google

nel centro d'Europa. E, se, tenendo fede alle nobili tradizioni della sua casa e del suo popolo, aveva vigorosamente combattuto per l'integrità della Chiesa e della credenza cattolica, aveva pur esperimentato con quale ardore appassionato di convinzioni altri combatteva per i proprii principii, e come la norma della libertà di coscienza e della tolleranza dei culti dissidenti si andasse a mano a mano imponendo nei governi civili. D'altra parte egli aveva pure esperimentato che, se grande forza di coesione per lo Stato e prestigio al Principe derivava dall'appoggio leale dato alla Chiesa e da essa ricambiato, a consolidare poi la sua autorità e a realizzare il suo programma di incremento civile, conveniva del pari a lui, come agli altri principi suoi contemporanei che andavano corroborando le monarchie assolute, affermare nettamente il proprio potere sovrano di fronte alle eventuali invadenze di un qualsiasi estraneo potere. Da questo complesso di motivi, che confluivano, ora urtandosi, ora componendosi, nella coscienza e nella vita del Duca, e che lo caratterizzano in modo così evidente di fronte agli altri principi italiani del suo tempo, sono derivate le norme direttive della sua politica religiosa, che mi pare si possano riassumere così: come cattolico favorire lealmente la Chiesa, come principe resisterle là dove essa sembrasse minacciare il suo potere; e ad un tempo, come uomo, rispettare la libertà di coscienza e di culto, ma come cattolico impedire energicamente il dilagare delle eresie. A comprendere questo aspetto così interessante della vita di Emanuele Filiberto, che gli dà un posto eminente fra gli stati italiani e lo avvicina ai monarchi d'oltr'alpe, giova tenere presente un'altra considerazione, cioè l'influenza che doveva esercitare sull'animo di lui la consorte, Margherita di Valois.

Già discepola di un maestro dallo spirito largo e tollerante, il cancelliere Michele De l'Hôpital, la Duchessa era donna di fine ingegno, di buona cultura, di animo pietoso e soccorrevole (25); e alla corte di Francia, ond'era partita sposa nel 1559, e poi sempre nelle fortunose vicende di quella casa regale aveva avvertito il tristo peso dei contrasti religiosi mescolati agli odii politici. Ella era, e rimase, cattolica, ma forse per pietà, forse per larghezza d'animo, forse anche per accorgimento politico,

Digitized by Google

accoglieva alla corte e proteggeva Ugonotti e Valdesi, talchè più volte venne sospettata e denunciata presso la corte di Roma come infetta di eresia (26), o almeno pericolosa per la Chiesa. Quanto ci sia di vero nelle accuse che le si muovevano è difficile dire. Certo è che il duca, pur col suo carattere forte e altero, deferiva molto al consiglio della duchessa, della quale riconosceva la nobiltà intellettuale, e per mezzo della quale egli sentiva di poter mantenere i rapporti, che gli eran necessari, con la corte di Francia.

Che se ora allarghiamo lo sguardo a considerare tutto il grande quadro dei meravigliosi avvenimenti, di cui Emanuele Filiberto fu o partecipe o spettatore: da una parte le guerre di Germania fra luterani e cattolici, le guerre civili e religiose di Francia, l'eresia anglicana, i contrasti fra i cantoni svizzeri, la propaganda valdese; dall'altra la Contro-riforma cattolica, la fondazione della Compagnia di Gesù, il Concilio di Trento, il papato di Pio V, ci renderemo conto dell'appassionato groviglio di correnti spirituali e di interessi mondani, di resistenze accanite e di torbide inquietudini, in cui doveva muoversi quel principe. Onde il sapersi equilibrare in esso, sceglierv la propria strada, e muoversi abilmente verso le proprie mete, costituiva, soprattutto per un piccolo stato, in una posizione geograficamente e politicamente difficile come il Piemonte, un problema di eccezionale gravità. L'averlo affrontato e in certo modo risolto, sia pure, qualche volta, con eccessi di potere e con mobilità di atteggiamenti, costituisce, a mio giudizio, uno dei maggiori meriti di quel principe.

Dalla vertenza col cantone svizzero di Berna, fino alla vertenza più lunga e meno fortunata per il riacquisto di Ginevra, e a quella più dura e, in un certo senso, più grave con i Valdesi, Emanuele Filiberto, pur proponendosi sempre di fare argine al diffondersi delle eresie e di tutelare insieme gli interessi dello Stato, cercò, per quanto gli fu possibile, di rispettare la libertà di coscienza e di astenersi da eccessi di persecuzioni e di fanatismo. La vertenza col cantone di Berna, che aveva usurpate alla corona ducale le terre al di là del Rodano e del lago di Ginevra introducendovi e imponendovi il culto protestante,

Digitized by Google

si concluse, dopo molte discussioni e tergiversazioni, con quella pace di Losanna del 30 ottobre 1564, con la quale il duca riconosceva nelle terre del Genevese e del Ciablese, a lui restituite, la libertà di coscienza e di culto (27). Nella vertenza con Ginevra è caratteristica prova dell'animo di Emanuele Filiberto il contegno da lui tenuto, di fronte alla proposta che gli venne fatta nel 1560 da un suo antico e venerato maestro, l'Alardet, di consentire, seguendo, del resto, le consuetudini politiche del tempo, alla soppressione di quel Lucifero (così era chiamato) di Calvino, per giungere al riacquisto di Ginevra: il duca vi si rifiutò nettamente, e su Ginevra non potè nè allora nè poi far valere la propria signoria. Uno storico moderno, il Kramer, commenta quell'atto di Emanuele Filiberto con queste parole, che amo riportare: " D'un geste qui lui fera honneur devant la postérité, le vainqueur de Saint-Quentin refusa de souiller sa glorieuse épée, en écoutant la sollicitation de son ancien précepteur „ (28).

Più complicato e più aspro fu il contrasto con i Valdesi. Contro di essi che, rafforzati dalle relazioni con Zuinglio e con Calvino, avevano da parecchi anni intensificata ed estesa la loro propaganda religiosa dalle valli dell'Angrogna e del Pellice a quelle del Po, della Maira e della Varaita, già con eccidii e roghi si erano scatenate le ire dei Francesi, quando questi ancora tenevano Torino (29). Ma la diffusione delle nuove credenze continuò in Piemonte, favorite dal pessimo costume e dalla crassa ignoranza del clero cattolico; basti dire che il cardinale Cibo dichiarava di avere trovato nelle sue visite pastorali " molti parrochi e rettori di anime non solo ignoranti affatto della disciplina ecclesiastica ed incapaci di predicare la parola di Dio, ma di più talmente negligenti del proprio dovere, oziosi e mancanti di libri, che possono chiamarsi alberi sterili, i quali occupano invano la vigna del Signore „ (30). Bisognava, quindi, agire con prontezza e con energia. Su questa via si mise Emanuele Filiberto appena si accinse, dopo il 1559, a riprendere le redini dello stato. Ma gli ordini da lui impartiti, che erano, certo, per un immediato arginamento della propaganda valdese, la quale doveva contenersi entro le valli originarie, furono dai suoi ese-

Digitized by Google

cutori, principalmente da Giorgio Costa signore della Trinità, applicati con la ferocia propria dei momenti di più forsennata passione; finchè il Duca stesso, consigliato e incuorato dalla Duchessa, fece cessare la persecuzione, riconobbe ai Valdesi libertà di coscienza e di culto, confermò le loro franchigie, largì perdono, e diede licenza ai proscritti di rimpatriare e di riavere i beni caduti nel fisco (31).

Ma egli comprendeva bene che in un contrasto essenzialmente spirituale, le armi di combattimento dovevano essere del pari spirituali; che soprattutto entro la cerchia dei sudditi cattolici bisognava agire per rafforzarne ed elevarne la coscienza religiosa, migliorarne e accrescerne la coltura. In questa parte di programma di governo si rivelano bensì la pietà e la fede di Emanuele Filiberto, ma anche il suo largo senso politico. Se da una parte deve essere ricordata la solenne cerimonia da lui voluta, onde fu, nel 1578, trasportata da Chambéry a Torino la *Sacra Sindone,* a cui venne in pio pellegrinaggio da Milano San Carlo Borromeo, accolto con grandi onori dal Duca e dalla Corte (32); per un'altra parte deve essere ricordata la cura costante rivolta da Emanuele Filiberto alla sistemazione e all'incremento degli studi, e in modo particolare la protezione ripetutamente accordata a quella Compagnia di Gesù, che, sorta da pochi anni e riconosciuta poi da papa Paolo III (Farnese) nel 1540, si presentava allora, nella freschezza e purezza delle sue aspirazioni ed energie, come il grande organismo atto a rinnovare e corroborare la coltura cattolica. Infatti uno dei primi provvedimenti presi da Emanuele Filiberto appena tornato nei proprii stati fu quello, non solo di istituire un pubblico studio generale nella città allora più insigne del Piemonte, in Mondovì, ma anche di chiamarvi i Gesuiti con un assegno annuo di quattrocento scudi d'oro, e di affidar loro l'insegnamento della rettorica e della lingua greca. I due decreti di fondazione attestano, con la prossimità delle loro date, essendo l'uno dell'8 dicembre 1560 e l'altro del 4 gennaio 1561, l'intimo rapporto fra le due istituzioni (33). E quando, sgombrate dai Francesi le città e terre del Piemonte prima occupate, Torino ritornò in possesso del duca, e questi successivamente, cioè

Digitized by Google

nell'ottobre del 1566, concludendo una lunga controversia sorta fra Mondovì e Torino, assegnò a questa ultima, ridiventata capitale del ducato, la sede unica dell'Università, egli credette necessario (luglio 1567) di ripetere per essa una concessione analoga a quella già fatta per il Collegio dei Gesuiti di Mondovì e di Chambery (34). Il documento originale, finora inedito, che io, agevolato dalla gentile larghezza del socio Luzio, ebbi la fortuna di trovare nel R. Archivio di Stato, dice testualmente così: " Perchè et dalla consideratione degli esempi de passati et dalla isperienza de presenti conosciamo chiaramente non essere modo nessuno migliore nè via più certa per la sicura conservatione et augumento de stati ch'il trattener li sudditi nel timore santo d'Iddio et confirmatione de la santa fede catholica et l'instituir la gioventù nei buoni costumi et disciplina christiana et nelle buone lettere (essendo la gioventù come seminario di quelli che di poi fanno costituiscono et governano le terre et città); et vedendo che li religiosi della compagnia di Giesù sono molto atti a procurare tutte queste cose come lodevolmente fanno nelle mie terre et città di Chiamberi in Savoia et del Monteregale di qua dai monti; per queste cause havemo pensato et con maturo consiglio determinato di aiutare ancora qui in questa nostra città di Turino il Collegio della detta Compagnia di Giesù, accio possa trattenervi si sufficiente numero di persone di essa, che possano oltre li loro soliti esercitii che fanno in utilità dei prossimi, insegnare di più et instituire la gioventù nelle lettere greche et latine et negli studii di humanità et rettorica, et nel timore d'Iddio, buoni costumi et christiana disciplina etc. „ (35).

D'altra parte la larghezza di spirito propria del Duca e il suo gusto della coltura lo inducevano ad attrarre alla Corte e adornare l'Università di tutti quegli intelletti che, in ogni campo del sapere, gli sembrassero o gli fossero consigliati come i più adatti, per mantenere alta la fama dello studio di fronte agli altri d'Italia, specialmente a quello di Padova. Così accadde che accanto ai giureconsulti insigni di fede cattolica quali il Menocchio e il Cravetta chiamati a Mondovì, egli invitò e trattenne per alquanto tempo presso l'Università di Torino il grande

Digitized by Google

Cuiacio (1522-1590) di fede non ortodossa (36), e, secondo alcuni, giunse fino ad offrire una cattedra a quel Celio Secondo Curione, che passò alla storia come uno dei più famosi eretici d'Italia (37). E con munificenza chiamava e accoglieva letterati e poeti quali Cinzio Giraldi professore a Mondovì prima, a Torino dopo (38), e Torquato Tasso, che, qui fuggendo sdegno di principe e avversità di fortuna, trovò per quattro mesi ospitale dimora (39) e promoveva gli studii con l'appoggio a tipografi insigni quali il Torrentino chiamato da Firenze a Mondovì (40), e il Bevilacqua da Venezia a Torino (41); e riordinava, infine, ingrandiva e abbelliva la capitale che, con nuove chiese e palazzi e ville e con il parco magnifico, incominciatosi nel 1568, si avviava a diventare una delle più belle e signorili città italiane, e degna sede del nuovo principato, a cui l'avvenire riservava meravigliosa fortuna.

ALTEZZA REALE, ECCELLENZE, SIGNORI!

Che cosa rappresenta, che posto occupa Emanuele Filiberto nella storia, non dico del Piemonte, ma d'Italia? Di fronte ai magnifici signori e principi del Rinascimento, agli Aragonesi, ai Medici, agli Sforza, ai Montefeltro, ai Gonzaga, agli Estensi, come sta il Duca di Savoia? Egli è veramente un principe nuovo: si direbbe quasi il Principe dal Machiavelli auspicato: la sua apparizione nel mondo della politica italiana, la sua opera di ristauratore dello Stato, sono determinate da esigenze e informate da principii e da finalità che rispondono a un nuovo indirizzo della vita nazionale. Egli non riconquista lo Stato nè lo difende nè lo conserva con le compagnie di ventura o con le sottili e agili avvedutezze dell'uomo d'affari o con il fasto e la corruttela d'una Corte magnifica, ma bensì rientra nei suoi possessi con la forza e il prestigio di una propria vittoria militare di portata europea, organizza una propria milizia nazionale, arma una propria marina, instaura nella Corte un ordine di signorilità austera. Egli non concepisce e non considera il principato come un istrumento della propria personale grandezza, ma come il mezzo di realizzare con il suo assoluto diritto uno

Digitized by Google

Stato forte e potente, capace di difendersi da sè contro ogni pericolo esterno, atto a entrare nel giuoco delle forze circostanti come un elemento attivo e di peso. E non concepisce la popolazione a lui soggetta come la platea degli spettatori che stanno ad ammirare ed applaudire la *virtù* del principe o lo splendore della corte, ma come la massa, a cui bisogna provvedere le condizioni fondamentali del vivere civile, la giustizia e la prosperità economica.

Egli infine non vede tanto i rapporti che legano il suo Stato agli altri Stati italiani, quanto quelli che lo legano agli Stati maggiori d'Europa, dai quali le sorti stesse d'Italia dipendono; e, mirando a Saluzzo o a Savona o al Monferrato, e trattando coi cantoni Svizzeri o inviando navi a Lepanto, egli in fondo fa sempre della politica europea. Ed è, pur nella sua schietta, vigorosa e ostinata italianità, un principe europeo: parla correntemente, come l'italiano, così lo spagnolo, il francese, il tedesco e il fiammingo; conosce la Spagna per avervi a lungo viaggiato, la Germania per avervi condotte campagne militari, i Paesi Bassi per avervi combattute le sue più belle battaglie, e averli poi governati, la Francia per esservi stato più volte e averne tratta la sposa. Egli è, dunque, il nuovo principe italiano, quale poteva prodursi in quei tempi di trasmutazioni profonde, di declinazione completa e fatale del primato civile d'Italia e d'insorgenza della nuova Europa.

Ed egli era l'unico principe italiano che potesse, affermando vittoriosamente ed energicamente la propria italianità, inserire lo Stato e la politica nel groviglio degli interessi europei. Un acuto ambasciatore veneto, Andrea Boldù, riferiva al doge nel 1561 che il Duca considerava il suo Stato " un bastione all'Italia, per conseguenza, egli diceva, allo stato della repubblica „; onde soggiungeva: " se si lasciasse perdere un bastione tale della fortezza di questa Italia, ne resteria tanto più debole „ il serenissimo dominio di Venezia; ed egli vedeva ben giusto. In Italia ormai, tra la Spagna dominatrice e la Francia perturbatrice, non esistevano più stati liberi fuorchè il Ducato di Savoia e la Repubblica veneta. Ma questa ultima era dallo stesso spostamento geografico della grande politica portata al

Digitized by Google

margine dei conflitti da cui potevano dipendere le sorti d'Italia; il Ducato di Savoia invece si trovava ad essere proprio. nel cuore. Esso era veramente, come diceva Emanuele Filiberto, il bastione d'Italia, o anzi, io direi, la cittadella, che bisognava tenere ben munita e pronta, non pure a ribattere ogni assalto, ma anche ad estendere sempre più la propria azione. La monarchia di Savoia diventava quindi, per necessità di cose, la monarchia d'Italia.

Emanuele Filiberto lo intuì, se non lo comprese appieno. Ma lo dovevano a mano a mano, e sempre meglio, comprendere non solo i suoi successori, ma gli stessi Italiani. Non poteva essere monarchia d'Italia nè la medicea sottratta al giuoco vivo delle forze europee, decadente e corrotta, nè più tardi la borbonica, importata di recente, senza tradizione nazionale, senza prestigio militare o politico o civile; nè un'altra qualsiasi, o murattiana o napoleonica, d'origine, di legami, di sentimenti straniera; l'unica monarchia d'Italia non poteva essere che la Sabauda.

Noi, celebrando oggi la figura di Emanuele Filiberto, celebriamo, in lui, non pure la dinastia, della quale egli è uno degli astri più alti e più fulgenti, ma l'Italia, che egli dal suo baluardo protesse, e che i successori suoi, attraverso ai fumi delle battaglie e ai fulgori delle vittorie, videro delinearsi sempre più precisa e affascinante, finchè la trassero un giorno dall'umiliazione del servaggio alla gloria della libertà, e la drizzarono infine davanti agli occhi stupefatti del mondo alta e bellissima nella luce inestinguibile di Vittorio Veneto.

Digitized by Google

NOTE

(1) Commemorazione di Re Vittorio Emanuele II pubblicata in: *Educazione nazionale,* vol. I, Torino, Paravia.

(2) Cfr. Lodovico Sauli, *Sulla condizione degli studii nella monarchia di Savoia sino all'età di Emanuele Filiberto,* in " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, serie II, tomo VI (Torino, 1894), p. 182 e sgg.

(3) Giov. Tonso, *De vita Emanuelis Philiberti Allobrogum ducis et subalpinorum principis,* libri duo, Augustae Taurinorum, 1596, p. 22-23.

(4) Cfr. Morosini, *Relaz.*e in Alberi, *Relazioni degli ambasciatori veneti,* serie II, vol. II, p. 157; Molino Fr. in Alberi, serie II, vol. II, p. 238 sgg.

(5) Claretta, *Intorno alla vita ed ai tempi di Beatrice di Portogallo duchessa di Savoia,* Torino, 1863.

(6) Ricotti, *Degli scritti di Emanuele Filiberto duca di Savoia,* Torino. 1857. Cfr Vaccarone, *E. F. alla corte di Carlo V* in " Miscell. di st. it. „, s. III, t. V.

(7) Guichenon, *Histoire généalogique de la royale maison de Savoie,* tomo second, p. 254 (Turin, 1778).

(8) Ricotti, *Degli scritti di Emanuele Filiberto duca di Savoia,* 1857; Doc. 9, p. 56: " Monseigneur, ayant toujours desir de veoir m'exerciter et acquerir telle reputation et experience que je puisse ung jour vous servir et donner contentement et consolation a vos subgetz ... je me suis enhardy vous suplyer très humblement qu'il vous plaise m'accorder la requeste de me laisser suyvre et servir Sa Majesté ... (1546). (Billet) Monseigneur, je vous supplie m'accorder la requeste que dessus pour l'honneur que m'en peult succeder et le desir que j'ai d'avecque le temps vous fere par ce moyen service „.

(9) Guichenon, *Histoire généalog. etc.,* p. 235-236.

(10) Ricotti, *Degli scritti ecc.,* doc. 15, p. 62.

(11) Luzio, *La corrispondenza famigliare amministrativa e diplomatica dei Gonzaga,* Verona, 1922, pp. 116 e 123.

(12) Ricotti, *Storia della monarchia piemontese,* Firenze, 1861, II, pp. 90, 91, 106.

(13) Ricotti, *Storia* cit.; cfr. Morosini Giov. Fr., *Relazione* (1570) in Alberi, serie II, vol. II, p. 123: " È tutto questo paese non molto abitato, perchè nell'ultima descrizione che fu fatta l'anno del sessantanove per causa della carestia, non furono più che centocinquanta mila civili persone tra piccole e grandi... Sono quei popoli, per la maggior parte, inclinati alla crapula e all'ozio, nemici d'ogni sorta di fatica, salvo che di quella che fanno ballando, in che non si stancano mai; non hanno alcuna industria, contentandosi quasi ogn'uno di quello che ha „.

Digitized by Google

(14) Cfr. quel che riferisce il Boldù, *Relaz.* in Alberi, serie II, vol. I, p. 464: " dice (il duca) che essendo lo stato suo un bastione all'Italia e per conseguenza allo stato di vostra serenità (Venezia), se si lasciasse perder un bastione tale della fortezza di questa Italia, ne resteria tanto più debole questo serenissimo dominio; e soggiunse poi con un lungo sospiro: Io so bene che sarei il primo divorato da questi, che ad altro non pensano che ad inghiottire questa Italia „. E il Lippomano, *Relaz.* in Alberi, serie II, vol. II, p. 204: " egli è nato italiano, e tale vuole la ragione, e vuole lui che sia tenuto „.

(15) Cavalli Sig.°, *Relaz.* in Alberi, serie II, vol. II, p. 46-7: " quando sua eccellenza si trovi in essere, ed abbia animo di fare guerra ad alcuno, questa del Monferrato mi credo certo che sia quella a cui più egli pensi, sì per le vive ragioni che vi ha sopra, come per le facilità e comodità dell'impresa; e crederei non tardasse molti anni a principiarla, quando non fosse la dipendenza che ha quel signor duca con l'imperatore e con il re di Spagna „. Cfr. anche p. 53: " Sua eccellenza non è senza qualche pensiero di provare, con l'occasione che possa portare il tempo, d'ottenere dal re, con qualche partito, il marchesato di Saluzzo... Non dico già che per ora il duca abbia questo pensiero di Saluzzo per prossimo e fattibile; ma in vero non è in tutto fuori di questa opinione „. V. anche Morosini, *Relaz* in Alberi, serie II, vol. II, p. 144; Boldù, *Relaz.* (1561) in Alberi, serie II, vol. I, p. 452-4.

(16) Cavalli Sig.°, *Relaz.* in Alberi, serie II, vol. II, p. 35: " Ha grandissima dilezione di parlare delle cose di mare, e se non fosse tenuto per molte cause di stare in Piemonte, faria buona parte di sua vita a Nizza, per essere alle marine „. Morosini Giov. Fr., *Relaz.* in Alberi cit, serie II, vol. II, p. 133: " tre (galere) ha sua eccellenza armate, una ne ha nel porto di Villafranca, che si può facilmente armare, un'altra ne ha fatta fare di nuovo, e tredici spera di avere dai Francesi in vendita ... di maniera che per fornire le venti non ne mancheranno se non due, delle quali farà provvisione per qualch'altro modo „. Alle ambizioni del duca di Savoia accenna il Morosini, *Relaz.* in Alberi, serie II, vol. II, p. 187. V. anche Boldù, *Relaz.* in Alberi, serie II, vol. I, pp. 423, 437, 467.

(17) Cit. da Ricotti, *Storia della monarchia piemontese*, II, 227, nota.

(18) Ricotti, *St. d. m. p.*, II, pp. 147, 148, 227.

(19) Ricotti, *St. d. m. p.*, II, pp. 237-239.

(20) Morosini, *Relaz.* in Alberi, serie II, vol. II, p. 123; cfr. Gallenga Ant., *Storia del Piemonte dai primi tempi alla pace di Parigi*, Torino, 1856, vol. II, p. 141.

(21) Ricotti, *St. d. m. p.*, II, Appendice VIII.

(22) Onde nasceva il grave sistema tributario: " Vi si aggiunge poi per ultimo l'intollerabile peso delle tasse, che ha poste sua eccellenza; il quale importa, pel Piemonte solo, cento ottantaquattro mila scudi all'anno;

Digitized by Google

peso veramente insopportabile a questo popolo, che è da se stesso povero e non ha alcuna industria „. Morosini, *Relaz.* in Alberi, serie II, vol. II, p. 125; cfr. pp. 145, 148, 151.

(23) Ricotti. *Degli scritti di E. F.*, p. 36. Il Bonardi, *Lo studio generale a Mondovì*, Torino, Bocca, 1895, dice (p. 7) che a E. F. " un monregalese, Giuseppe Daliano, dedicava nel 1560 un suo *Tractatus de prima lapidis philosophorum materia* „, che si conserva ms. nella Bibl. naz. di Torino. — Emanuele Filiberto credeva anche, secondo l'opinione prevalente, negli oroscopi e nell'astrologia, professata pure da quel matematico G. B. Benedetti veneto, chiamato nel 1556 alla corte del duca (Bonardi, cit., p. 6-7).

(24) Federico Sclopis, *Delle scritture politiche e militari composte dai principi di Savoia* in " Archivio storico italiano „, nuova serie, vol. II, p. I, p. 96 (Firenze, 1855).

(25) Ricotti, *St. d. m. p.*, vol. II, pp. 100, 182, 358; cfr. Bonardi cit, p. 13 e sgg.; Lippomano, *Relaz.* in Alberi, serie II, vol. II, p. 200 e sgg.; Cavalli Sig.°, *Relaz.* in Alberi, serie II, vol. II, p. 55; Morosini, *Relaz.*, p. 168; Boldù, p. 429.

(26) Ruffini, *La politica e la legislazione ecclesiastica di Emanuele Filiberto*, p. 393, nel vol. commemorativo di E. F. d'imminente pubblicazione.

(27) Ricotti, *St. d. m. p.*, vol. II, p. 264.

(28) Citato da Ruffini, cit., p. 400.

(29) Ricotti, *St. d. m. p.*, p. 173 sgg.

(30) Cfr. Tacchi Venturi, *Storia della Compagnia di Gesù*, vol. I (Roma, 1910), cap. II e III; v. anche Cibrario, *Origini e progresso delle istituzioni della monarchia di Savoia*, Torino, 1855, parte II; Id., *Storia di Torino*, Torino, 1846, vol. I, p. 381.

(31) Ricotti, *St. d. m. p.*, vol. II, p. 192; Gallenga, cit., vol. II, p. 138: " Per quanto era in potere d'un principe situato come era il duca di Savoia, è provato che egli rattemprò dappertutto i rigori di quell'esoso tribunale (dell'inquisizione), e si mostrò sempre restìo alle insaziabili domande di Roma „. Cfr. anche la recentissima dotta pubblic. di D. Jahier, *I Valdesi ed Emanuele Filiberto* (Soc. di st. vald.), 1928.

(32) A. Vesme, *T. Tasso e il Piemonte* in " Miscellanea di st. patria „, serie II, vol. XII, p. 78; cfr. Ricotti, cit., vol. II, p. 305.

(33) Bonardi, cit., Documenti I e XXVIII; G. Grassi, *Dissertazioni sopra l'Università degli studii e sopra la tipografia di Mondovì*, Mondovì, 1804.

(34) L. Cibrario, *Dei governatori, dei maestri e delle biblioteche dei principi di Savoia*, Torino, 1839, in " Memorie d. R. Accad. d. Scienze „.

(35) " Regio Archivio di Stato di Torino „, Regolari, Gesuiti. Cfr. Monti Alessandro, *La Compagnia di Gesù nel territorio della provincia torinese*, Chieri, 1914, vol. I, cap. II, III, IV; Tesauro, *Istoria della venerabile Compagnia della fede cattolica sotto l'invocazione di San Paolo*, Torino, 1701, p. 34 e sgg.

Digitized by Google

(36) Vallauri, *Storia dell'Università degli studii del Piemonte*, Torino, 1846, vol. II, p. 11.

(37) Gallenga, cit., vol. II, p. 139, il quale cita: Mc-Crie, *Reformation in Italy*, p. 339; cfr. Cantù, *Gli eretici d'Italia*, Torino, 1866, vol. II, p. 204.

(38) Bonardi, cit., p. 118 e sgg.

(39) A. Vesme, cit.; A. Solerti, *Vita di T. Tasso* (1895), vol. I, p. 293; Ricotti, cit., vol. II, p. 469; Vallauri, cit., p. 62.

(40) Bonardi, cit., p. 96; Ricotti, vol. II, p. 371.

(41) Ricotti, cit., vol. II, p. 467.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Febbraio 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, il V. Pres. Parona, Panetti, Sacco, Pochettino, Garelli e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Socio Somigliana.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica la notizia della morte dell'accademico straniero Enrico Lorentz, Professore di Fisica teoretica nell'Università di Leida; e ne tesse rapido cenno biografico, ricordando in modo speciale le facoltà armoniche del suo ingegno, la profondità delle sue vedute, e l'altissimo valore intellettuale e scientifico. Il Presidente, interpretando i sentimenti degli Accademici verso l'insigne collega, dà incarico al Socio Direttore della Classe Somigliana di tesserne l'elogio in una delle venture adunanze.

Il Lorentz era nostro accademico straniero, dal marzo 1922.

Il Presidente comunica inoltre la morte del Professore Paolo Emilio Groth, Socio corrispondente per la Mineralogia e la Geologia, nominato sino dal 18 febbraio 1898. Egli dà incarico

Digitized by Google

al Socio Repossi di rievocarne i meriti scientifici in una delle prossime adunanze.

Il Presidente dà quindi lettura di una lettera della signora S. L. Green di Granville (Ohio), la quale chiede all'Accademia la facoltà di pubblicare una traduzione in inglese delle *Opere scelte di Amedeo Avogadro*; traduzione che sarà edita sotto gli auspici del nostro Sodalizio. L'Accademia delibera di concedere alla signora Green tale facoltà, sotto la riserva che la detta Signora si obblighi a tacitare le difficoltà che eventualmente potessero ancora sorgere per parte degli Eredi del Conte Avogadro.

Terminate le comunicazioni, il V. Presidente Parona fa omaggio alla Biblioteca Accademica di un lavoro del Signor F. Hermann, che illustra lo: *Stereogramma strutturale delle Alpi occidentali*, già presentato dallo stesso autore.

Il Socio Mattirolo fa omaggio di un suo lavoro che ha riguardo all'azione dei Licheni sui vetri delle vetrate antiche, che riescono, dopo periodi secolari di azione, a scavare e a traforare rovinando col vetro anche le listerelle di piombo che servono a congiungere i vari membri cromatici delle vetrate. Il lavoro corredato da fotografie di vetrate antiche italiane ed estere, ammalate per l'azione dei Licheni, fu pubblicato sulle *Vie d'Italia* del T. C. I.

Vengono quindi presentati in omaggio i seguenti lavori:

1) Il volume XV degli *Annali della R. Scuola Normale Superiore Universitaria* di Pisa.

2) L'*Annuario della R. Scuola di Ingegneria* (R. Politecnico) di Torino.

3) I volumi I e II della *Collectanea aeronautica* pubblicati dal Ministero dell'Areonautica.

4) La descrizione dell'*Osservatorio del Ebro*, inviata dal Sotto-Direttore P. Ignacio Puig S. J.

5) La *Biografia* del nostro Socio corrispondente G. Mittag-Leffler dettata dal Sig. N. E. Nörlund.

Digitized by Google

6) *La causa della luce solare e del calore del Sole* dal Dr. Gerhard Nilsson.

7) Dal Socio Vice-Presidente Parona due suoi lavori pubblicati nel Rendiconto della *Spedizione italiana De Filippi nell'Himalaia Caracorùm e Turchestan Cinese* (1913-14).

Il 1° di detti lavori, porta il titolo: *Faune cretacee del Caracorùm e degli Altipiani tibetani.*

Il 2° quello di: *Faunette triassiche del Caracorùm e degli Altipiani tibetani.*

Terminata la presentazione degli omaggi, vengono accolti per la pubblicazione negli *Atti* i lavori seguenti:

Il Socio Sacco presenta e discorre brevemente di uno studio suo sul *Diluvio-glaciale nell'Alta Valle del Sangro* (*Abruzzi*), facendo rilevare l'importanza dell'argomento da lui studiato in due sue visite sulla località.

Il Socio Peano, nel nome del Prof. Ugo Cassina, presenta un lavoro dal titolo: *Nuova teoria delle grandezze.*

Il Socio Garelli riferisce quindi sopra ricerche fatte dal Dr. Guido Guastalla: *Sull'azione del miscuglio nitrico-solforico sull'Etere etilico dell'Acido paranitrocinnamico.*

Digitized by Google

LETTURE

Sull'azione del miscuglio nitrico-solforico sull'etere etilico dell'acido paranitrocinnamico.

Nota del Dottor GUIDO GUASTALLA
presentata dal Socio nazionale residente Felice Garelli

È noto che, nella maggior parte dei casi, il miscuglio degli acidi nitrico e solforico agisce sulle sostanze organiche come agente di nitrazione.

Accingendomi a nitrare ulteriormente l'etere etilico dell'acido p-nitrocinnamico, che mi doveva servire per alcune ricerche, ho potuto constatare invece un'azione ossidante del miscuglio nitrico-solforico, per cui, come prodotto della reazione di esso sull'etere p-nitrocinnamico, ho ottenuto l'aldeide p-nitrobenzoica.

Una reazione analoga era già stata notata fin dal 1883 da Basler (1), il quale però faceva agire sull'etere p-nitrocinnamico, sciolto in acido solforico concentrato, il nitrato potassico polverizzato.

L'azione ossidante del miscuglio acido che ho adoperato (61,3 % di H_2SO_4; 32,7 % di HNO_3; 6,0 % di H_2O) non è molto energica, poichè si potrebbe arrivare, anzichè all'aldeide, all'acido p-nitrobenzoico, come Beilstein e Kuhlberg (2) hanno ottenuto, ossidando con bicromato potassico e acido solforico, l'acido p-nitrocinnamico.

(1) B. *16*, 2714.
(2) A. *163*, 127.

Digitized by Google

La formazione della p-nitrobenzaldeide viene dimostrata chiaramente dai prodotti di condensazione ottenuti con le basi, e particolarmente dal fenilidrazone e dal semicarbazone, che erano stati già descritti rispettivamente da Reissert (1) e da Thiele e Stange (2). I prodotti da me ottenuti hanno le stesse proprietà descritte dai suddetti autori.

Ho creduto superfluo studiare l'azione dell'acido nitroso sull'etere p-nitrocinnamico; infatti esso è contenuto in così piccola quantità nell'acido nitrico (meno di 0,5 %) e inoltre, nel miscuglio nitrico-solforico, esso è presente sotto forma di acido nitrosil-solforico, per cui la sua azione ossidante può ritenersi affatto trascurabile.

Ho eseguito la nitrazione dell'etere etilico dell'acido cinnamico, per preparare gli eteri orto- e para-nitrocinnamico, per un lavoro che mi riservo di continuare; ma la separazione dei due isomeri orto- e para- è assai difficile e il rendimento in o-nitroderivato allo stato di purezza è eccessivamente scarso. Nè alcun risultato ho potuto ottenere eterificando l'acido o-nitrocinnamico con l'alcool etilico assoluto in presenza di acido solforico concentrato, oppure in corrente di gas HCl.

Frattanto ho creduto non privo d'interesse studiare la curva di solidificazione del sistema binario acido cinnamico/etere p-nitrocinnamico.

Queste sostanze non formano alcun composto molecolare di addizione, ma dànno luogo solo a una miscela eutettica che fonde a 103°, in corrispondenza di circa il 47 % di etere p-nitrocinnamico e 53 % di acido cinnamico.

PARTE SPERIMENTALE

Nitrazione dell'etere cinnamico. — Gr. 20 di etere cinnamico si versano a poco a poco (durante 10 minuti) in 50 gr. di acido nitrico fumante (d = 1,52), evitando che la

(1) B. *33*, 1304 (1900).
(2) A. *283*, 26 (1894).

Digitized by Google

temperatura oltrepassi i 25-30°. Il liquido si colora in rosso sempre più cupo. Dopo un'ora di riposo, si versa in $^1/_2$ litro d'acqua: precipita una sostanza gialla, che è la miscela dei due eteri isomeri orto- e para-nitrocinnamico. Questa miscela fonde fra 70° e 77°.

Separazione dei due isomeri orto- e para- (1). — La miscela (ottenuta nella nitrazione di gr. 60 di etere cinnamico) fu sciolta in cc. 400 di alcool etilico bollente. La soluzione risulta di colore aranciato e per raffreddamento deposita degli aghetti lunghi e sottili di etere p-nitrocinnamico, che fondono a 135°.

Azione del miscuglio nitrico-solforico sull'etere p-nitrocinnamico. — Gr. 10 di etere p-nitrocinnamico si versano a poco a poco in una miscela di gr. 40 di acido solforico concentrato (92 % di H_2SO_4) e gr. 20 di acido nitrico al 98 % di HNO_3, evitando che la temperatura oltrepassi i 25°. Dopo riposo, versando in acqua, si separa un prodotto oleoso, che lasciato a sè per 6-7 giorni, si solidifica in una sostanza gialla, pastosa. Questa sostanza greggia fonde fra 50° e 100° e odora di mandorle amare. Trattasi di aldeide p-nitrobenzoica, che fu caratterizzata attraverso i prodotti di condensazione seguenti:

Gr. 10 del prodotto greggio, sciolti in 100 cc. di alcool, si fanno reagire a caldo con gr. 8,12 di fenilidrazina. Si ha colorazione rosso-granata. Aggiungendo poca acqua si ottiene la precipitazione di un'abbondante sostanza rossa che, cristallizzata dall'alcool, si presenta in bei cristalli rossi con riflessi metallici azzurri, e fonde a 157° (2).

All'analisi: gr. 0,1967 di sostanza: cc. 29,4 di azoto (T = 16°; H = 747 mm.)

trovato %:	N 17,3;
per $C_{13}H_{11}O_2N_3$ calcolato %:	17,4.

(1) A. *212*, 127.

(2) Reissert, loc. cit.

Digitized by Google

Gr. 2,5 del prodotto greggio, sciolti in alcool, si trattano a caldo con gr. 1,4 di α-naftilamina. Si ha una colorazione rossa e subito un'abbondante precipitazione. Questo prodotto, cristallizzato dall'alcool, fonde a 161-162° (1).

All'analisi: gr. 0,2080 di sostanza: cc. 16,7 di azoto (T = 15°; H = 758 mm.)

trovato %: N 9,5;
per $C_{17}H_{12}O_2N_2$ calcolato %: 10,1.

Gr. 2,5 di prodotto greggio, sciolti in alcool, si trattano a caldo con gr. 1,1 di para-toluidina. Per raffreddamento precipita una sostanza che, cristallizzata dall'alcool, fonde a 124-124°,5 (2).

Con orto-toluidina e con xilidina asimmetrica si ottengono prodotti oleosi che non furono ulteriormente studiati.

Gr. 2,5 di prodotto greggio, sciolti in alcool, si trattano a caldo con gr. 2,5 di cloridrato di semicarbazide sciolti in poca acqua; si aggiunge ancora gr. 3 di carbonato sodico cristallizzato, e si fa bollire per mezz'ora. Per aggiunta di poca acqua e raffreddando, si separa una sostanza giallo-citrina fioccosa, che fu filtrata e lavata con acqua (p. f. 200-202°). Dal filtrato si separano col riposo dei cristalli aghiformi di color giallo-citrino (p. f. 205°). Cristallizzato dall'acqua, il prodotto fonde a 214° (3).

All'analisi: gr. 0,0595 di sostanza: cc. 13,9 di azoto (T = 17°; H = 739 mm.)

trovato %: N 26,7;
per $C_8H_8O_3N_4$ calcolato %: 26,9.

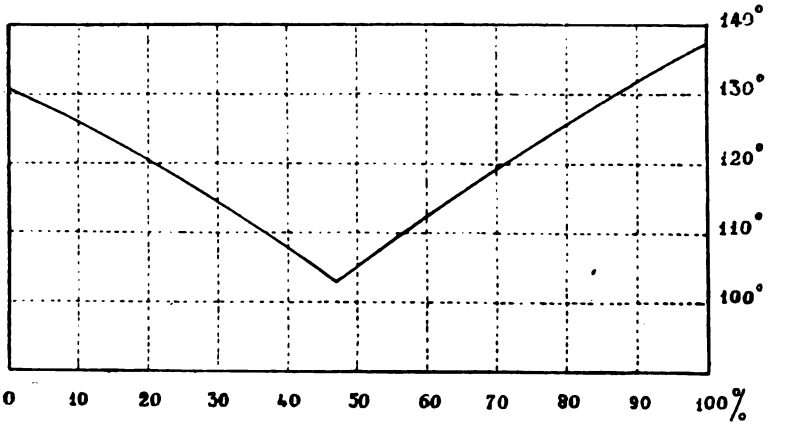
---

(1) Zenoni, G. *23*, II, 222, 519 (1893).
(2) B. *36*, 1022 (1903).
(3) Thiele e Stange, loc. cit.

Digitized by Google

Sistema: acido cinnamico/etere p-nitrocinnamico.

Quantità di ac. cinnamico	Quantità di etere p-nitroc.	% in peso di ac. cinnamico	% in peso di etere p-nitroc.	Inizio della solidificazione
7,0598	0	100	0	130°,5
„	0,8208	89,59	10,41	125°,3
„	1,3630	83,82	16,18	123°,0
„	2,2954	75,46	24,54	118°,5
„	3,2991	68,15	31,85	113°,0
„	4,2101	62,64	37,36	109°,0
„	5,3491	56,89	43,11	104°,0
„	6,2415	53,08	46,92	103°,3
0	6,0523	0	100	136°,5
0,4516	„	6,94	93,06	133°,2
1,3542	„	18,28	81,72	126°,5
1,9450	„	24,32	75,68	123°,0
2,5345	„	29,52	70,48	119°,0
3,7249	„	38,10	61,90	113°,5
4,5928	„	43,15	56,85	108°,5



Laboratorio di Chimica organica
della R. Scuola di Ingegneria di Torino.

Digitized by Google

Il Diluvio-glaciale nell'alta Valle del Sangro (Abruzzi).

Nota del Socio naz. resid. FEDERICO SACCO

(Con una tavola).

Nella sintetica Monografia che pubblicai nel 1907 sopra " Gli Abruzzi „, indicavo, a pag. 427, che il terreno morenico vi è abbastanza esteso, " fatto che è in rapporto sia coll'altitudine notevole di estese regioni abruzzesi, sia coll'abbondanza delle precipitazioni nevose causate dai venti umidi che vi giungono dal mare. Infatti anche oggi vaste regioni abruzzesi sono coperte di neve dalla fine di Ottobre al principio di Giugno e nel complesso la regione appenninica in esame ha molto del carattere alpino „ ; dopo di che accennavo, segnandone i principali nell'annessa Cartina geologica, i depositi morenici dei Monti Sibillini, dei Gruppi del Gran Sasso, del Sirente, della Meta, del Terminillo, del Velino, dei Monti della Majella, di Scanno, ecc. e " specialmente allo sbocco di taluni importanti Valloni su certi altipiani elevati „, ecc., come a monte di Castel del Sangro.

Ricerche posteriori hanno mostrato che il fenomeno è assai più esteso di quanto allora indicassi ed il suo studio meriterebbe quindi una speciale Monografia che consiglio vivamente a qualche giovane collega, perchè essa riuscirebbe certo interessantissima.

Intanto, siccome nel Settembre dello scorso anno (1927) ebbi occasione di passare tre giorni nell'alta Val di Sangro, in compagnia del collega ed amico Ing. C. Crema, per ricerche di Geoidrologia applicata, così non trascurai di osservare anche i resti dell'antico glacialismo e ne dò ora pochi cenni perchè servano come una piccola pietra nella costruzione del grande edificio della Glaciologia appenninica.

La regione in esame è spiccatamente montuosa, orogeneti-

Digitized by Google

camente tormentata in modo speciale da grandiose fratture con scorrimenti e forti trasgressioni.

L'ossatura rocciosa è costituita da potenti pile di calcari, spesso dolomitici verso la base, grigi o biancastri, giuraliasici o cretacei, coperti normalmente o trasgressivamente da calcari eocenici e da marne più o meno calcaree od argillose od arenacee ritenute mioceniche, ma che mi parvero ancora attribuibili all'Eocene superiore; seguono infine, in generale trasgressione, marne ed arenarie del Miocene superiore; il tutto ammantato, dove l'orografia lo consente, da depositi quaternari lacustri, diluviali, morenici, alluviali e da detriti di falda di varia potenza.

Orbene, se risaliamo la Valle del Sangro sino alle sue origini, la vediamo terminare assialmente in collette relativamente basse, cioè verso i 1360-1440 m. (ad Est ed Ovest del Marrone del Diavolo), cioè in condizioni altimetriche tali da non aver potuto presentare un vero glacialismo. Ma ben diverso è il caso se consideriamo i valloni laterali a detta valle terminale, giacchè molti di essi, per la loro esposizione e per essere profondi, incassati, salienti spesso a costiere che si elevano ad oltre 2000 metri, poterono albergare ghiacciai abbastanza notevoli che depositarono quindi morenico sparso (spesso passante a detrito di falda più o meno franoide) oppure veri cordoni o rilievi morenici, colla solita struttura caotica, con massi erratici, ecc. Vediamone qualche esempio dall'origine di Val Sangro sino a Barrea.

Sul lato destro, alle origini di Val Sangro, troviamo una Valletta che sale, specialmente col fianco destro, sin oltre i 1950 m. (come al Monte Macchia Petrosa - Monte Marcolano - Rocca Genovese, ecc.), per cui il suo *Ghiacciaio* (che può denominarsi di *Rocca Genovese*), rivolto a Nord, potè giungere sino allo sbocco della sua valletta originaria e depositare così materiale morenico nella regione di quota 1428 a sinistra e nello sprone antistante a destra.

Sul lato sinistro vediamo invece due enormi valloni, di Terradegna e della Corte (curiosamente abbinati per mezzo di una larga depressione intermedia sita verso i 1580 metri), i quali sono profondissimamente incassati (per intensa ed antica ero-

Digitized by Google

sione acquea) nella potente pila dei Calcari bianco-grigiastri, liasici-giuresi, inclinati verso Est, in modo da andare a sottoporsi, verso l'alto, ai Calcari compatti, stratificati, biancastri del Cretaceo, formanti così l'elevatissima ed erta cresta o Serra della Terratta e del Campitello sino alla Montagna della Corte.

Quindi detti due Valloni, profondi, rivolti in complesso verso Ovest, riparati dall'accennata Serra che si erge anche oltre i 2100-2200 metri, poterono albergare due bei Ghiacciai assieme collegati perfettamente nella sovraccennata regione depressa di quota 1580.

Il *Ghiacciaio di Terradegna* riuscì per lungo tempo a fuoruscire dal suo Vallone di origine, spingendo la sua lunga lingua terminale in Val Sangro; esso depose così notevole materiale morenico, specialmente sulla destra, sia a cordoni, come dalla regione Temple allo sprone di quota 1391, sia a ripiani gradinati (ormai però irregolarizzati per erosione acquea postglaciale), come indicano gli sproni residui esistenti verso i 1400-1300 m. alle falde orientali dei Monti cretacei di Valle Caprara-Forcella; devesi probabilmente attribuire alla terminazione di tale lingua glaciale il morenico ricoprente la collinetta (isolata dall'erosione del Sangro e del Rio della Corte), obliquamente allungata, di quota 1288.

Il *Ghiacciaio della Corte*, scendendo dal biforcato profondo Vallone omonimo (che termina nella Canala), ne potè anch'esso fuoruscire con larga fronte rivolta a Sud in modo da depositare, in diversi periodi di sosta nel complessivo ritiro, una serie di cordoni morenici, quattro principali, costituenti la tipica regione a colline (concentricamente arcuate) della Regione Filatoppa, continuantesi gradatamente a Sud nei depositi diluviali dei Colli alti e bassi in modo da costituire un assieme assai interessante dal punto di vista geologico, per cui è opportuno farne un cenno speciale.

Anzitutto è da osservarsi che questa estesa formazione diluvio-morenica basa essenzialmente sui terreni marnosi del Terziario, assai facilmente erodibili, per cui si comprende che essi siano stati largamente decapitati dalle acque fluviali prima che queste vi deponessero le ampie formazioni diluviali, scor-

Digitized by Google

rendo esse allora ad un'altezza di 100 a 200 metri sopra quella dell'attuale bassopiano del Sangro.

Tale ampia formazione diluvio-glaciale protesse contro una ulteriore abrasione la sottostante formazione marnosa, ma l'incisione acquea potè continuare liberamente, durante il periodo olocenico, sui margini della conoide diluviale, cioè: sia a Nord, originando il vallone (profondo circa 150 m.) della Canala; sia ad Est incidendo il Vallone (analogamente profondo) di Filatoppa; sia ad Ovest e Sud-Ovest, dove le acque fluviali dell'alto Sangro poterono terrazzare grandiosamente la formazione diluviale in esame, dividendola così in due regioni ondulatamente pianeggianti, quelle appunto dei Colli alti e dei Colli bassi, separati da un forte gradino di circa 100 metri; oltre ad un secondo, grandioso, gradino marginale di Sud-Ovest (pure di un centinaio di metri, fino a scoprire i sottostanti terreni marnosi) che separa i Colli Bassi dal vero bassopiano dove scorre ora il ben modesto Sangro.

Da tutta quest'opera incisivo-erosiva, compiuta dai corsi acquei dalla fine del Plistocene ad oggi, è derivato il curioso quasi isolamento della regione diluvio-glaciale di Filatoppa-Colli.

Questi depositi diluviali che credo corrispondano al *Diluvium* del Preglaciale o della 1ª Glaciazione alpina, sono caratterizzati dalla loro natura sabbioso-ghiaiosa-ciottolosa, qua e là con cementazione calcarea, in modo da costituire lenti o banchi più resistenti, ceppoidi, talvolta quasi travertinoidi.

È poi curioso che i banchi diluviali dei Colli bassi, invece di pendere regolarmente verso il Sangro, come parrebbe naturale, presentano invece una leggera contropendenza verso il Nord o Nord-Est all'incirca, come può osservarsi assai bene nei grandi spaccati naturali rivolti al Sangro. Ciò può forse spiegarsi col fatto che, per lo sbarramento trasversale operato dai banchi eocenici calcarei, fortemente sollevati, di Opi e di Marrone-Colle della Regina (sotto lo sprone 1271), prima che si verificasse l'attuale incisione valliva del Sangro (1), si do-

(1) Residuo di questo antico sbarramento di Colle Regina-Marrone è il curioso, multiplo, aspro spuntone di Calcare (in banchi corrosi, fortemente

Digitized by Google

vette verificare a monte di tale ostacolo, sino a Pescasseroli, una specie di rigurgito fluvio-lacustre, quasi un locale ampio invaso con pendenze un po' convergenti di fluenza; tanto più se si pensa che originalmente i banchi diluviali dei Colli Bassi dovevano collegarsi con quelli degli opposti Colli Nascosi prima dell'incisione valliva compiutasi nell'Olocene. Incisione olocenica che, per la direzione Nord-Sud del corso del Sangro al suo sbocco presso Pescasseroli e forse per qualche compatto banco diluviale, dovette essere deviata e compiersi in questa regione un po' più a destra dell'antico filone acqueo plistocenico, quale è infatti segnato, pel suo fianco sinistro, dal grande gradino separante i Colli Alti dai Colli Bassi.

Un'altra curiosa conseguenza di detta inclinazione, per quanto dolcissima, dei banchi diluviali dei Colli Bassi verso Nord-Nord-Est è che su questo loro piano ondulato si è costituita, sempre nell'Olocene, una complessa, ramificata, valletta di erosione acquea con decorso parzialmente diretto verso monte invece che verso valle, come parrebbe più naturale. Le ondulazioni di tale piano sono dovute essenzialmente alla diversa resistenza dei banchi più o meno conglomeratici.

Quanto alle formazioni moreniche di Val della Corte nella regione Filatoppa, esse costituiscono nell'assieme un tipico apparato glaciale (con ciottoloni e massi anche di due metri, spesso angolosi), a irregolari collinette complessivamente concentriche, per quanto rese molto irregolari dall'erosione e dal dilavamento acqueo postglaciale che vi ha originato anche qua e là vere doline, come del resto verificasi pure nelle zone diluviali, in causa della loro natura calcarea.

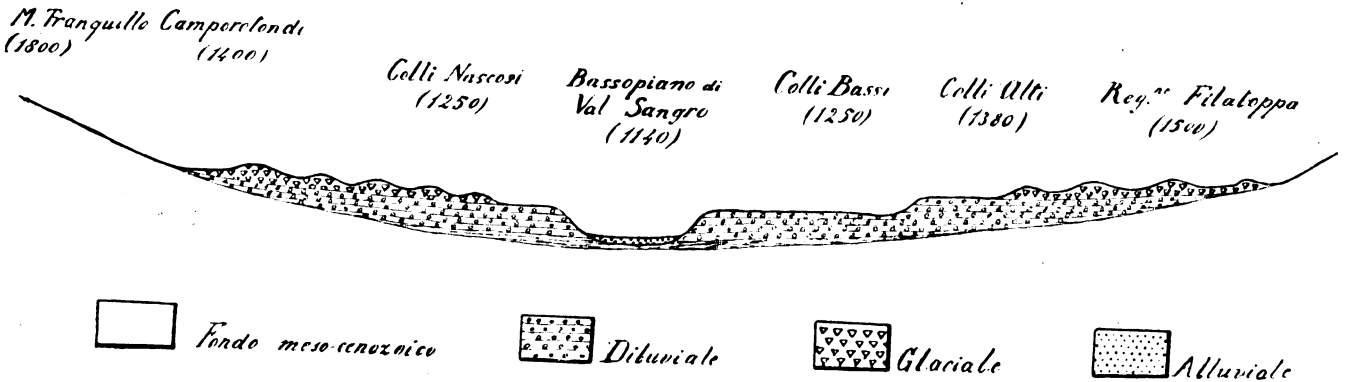
---

sollevati e diretti quasi E.-O., le cosidette *Pietre Grosse*) che appare fra le alluvioni del bassopiano del Sangro sulla sinistra di questo corso acqueo quasi di fronte a detto Colle della Regina. Tale affioramento, l'inghiottitoio che si osserva poco lungi sulla destra del Sangro, l'ingiallimento della circostante regione pratense e la scomparsa parziale delle acque del Sangro (ivi perfettamente asciutto all'epoca della mia visita) indicano lo sviluppo dell'assorbente formazione calcarea sotto il piano alluviale del Sangro in detta regione.

Digitized by Google

Sezione geologica schematica
attraverso il Diluvio-glaciale dell'Alta Val di Sangro sotto Pescasseroli

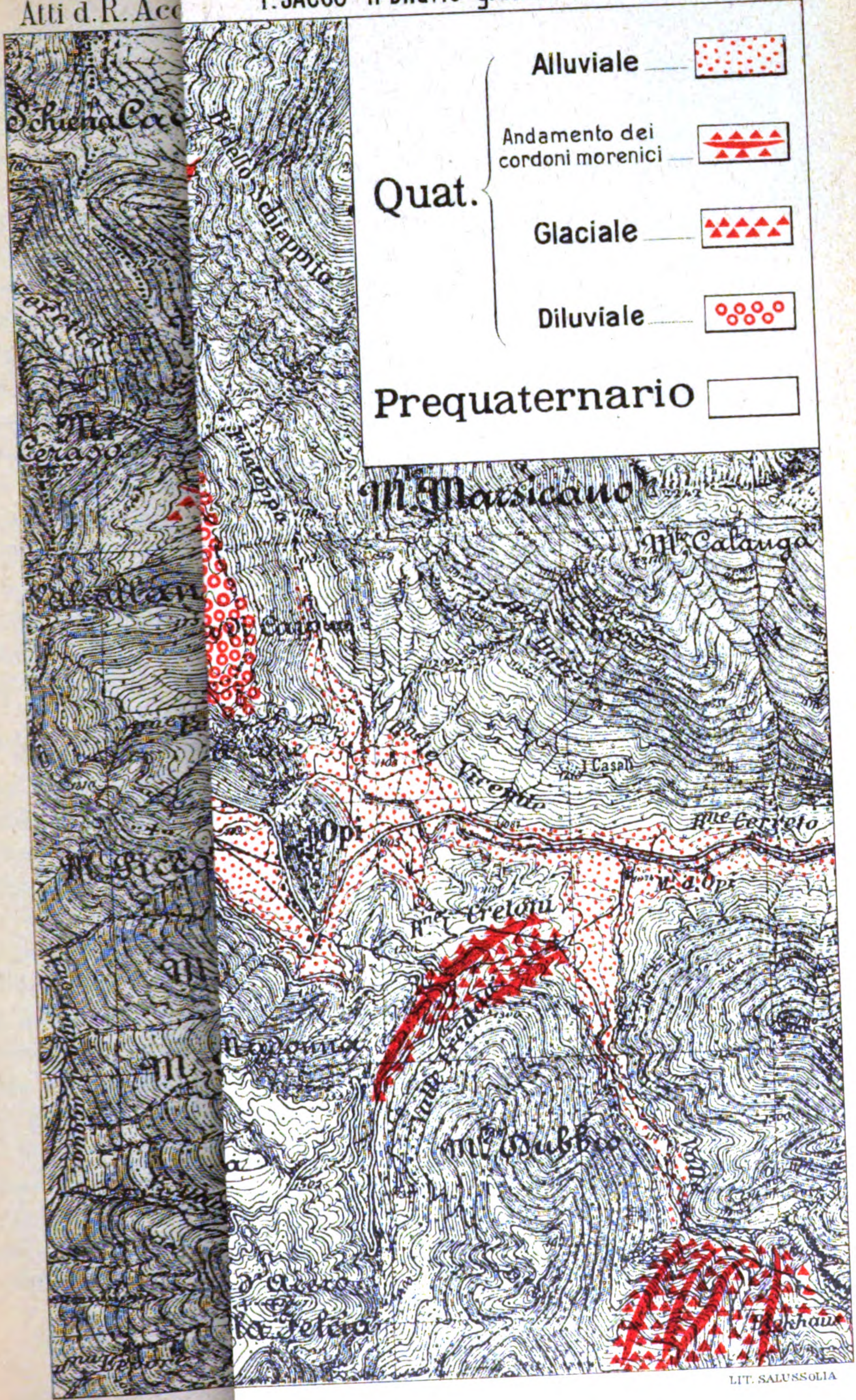
(Scala di 1 a 50.000).



Digitized by Google

Atti d. R. Acc

F. SACCO - Il Diluvio-glaciale nell'alta Val Sangro



LIT. SALUSSOLIA

(Equidistanza

Digitized by Google

Digitized by Google

La loro alta posizione attuale si spiega facilmente colla sovraccennata forte incisione postglaciale dei valloni della Canala e di Filatoppa che hanno quasi isolato detta regione, nella cui parte più elevata rimasero perciò gli archi morenici che stanno quindi a 150-200 metri sopra il fondo della Canala.

Queste irregolari formazioni moreniche, come del resto in generale quelle dell'Appennino, paionmi far tendere all'idea dell'unità complessiva dell'epoca glaciale; giacchè, pur mostrando una serie di cordoni collinosi e quindi di periodi o meglio sottoperiodi glaciali, non offrono fra loro notevoli distacchi nè di forma, nè di costituzione. Nel caso in esame l'irregolare cordone esterno passa insensibilmente (verso il suo esterno) alla formazione diluviale, rappresentando nel complesso la 1ª Glaciazione; i cordoni mediani, relativamente elevati, credo corrispondano alla 2ª Glaciazione, quella che nelle regioni alpine originò la parte più alta e tipica degli Anfiteatri morenici; mentre che alla 3ª Glaciazione può attribuirsi l'ultimo, interno e relativamente meno elevato e meno spiccato, cordone affacciantesi al Vallone della Canala.

Ritornando ora sulla destra di Val Sangro notiamo anzitutto le alte colline moreniche convergenti depositate, sin presso Pescasseroli, dal *Ghiacciaio di Schienacavallo* unito in basso al *Ghiacciaio di Pescatore*. Il relativo bacino è poco esteso ma profondo, incassato, riparato e con altitudini di cresta fra i 1950 ed i 1800 m. Nella parte alta di Val Pescatore parmi aver intravisto di lontano un archetto morenico verso i 1400 m.; trattasi forse di quei depositi stadiarii, postglaciali, che non sono rari anche nell'Appennino, ma che richiedono speciali ricerche minute, valle per valle, onde poterli rintracciare e segnare, essendo generalmente scarsi, guasti dall'erosione, passanti a detriti franoidi e situati assai in alto.

Invece le alte colline moreniche state depositate sin presso Pescasseroli sono veramente imponenti, mentre il relativo deposito diluviale poteva andarsi a collegare con quello dei Colli Bassi-Colli Nascosi.

Giungiamo così al magnifico apparato diluvio-morenico dei

Digitized by Google

Colli Nascosi che ha grande analogia con quello dei fronteggianti Colli Alti e Bassi e Regione Filatoppa; solo che qui l'apparato morenico è più esteso del diluviale, sia perchè quest'ultimo (come già sovraccennai) dovevasi originalmente estendere alla regione dei Colli Bassi, come sembra anche indicare la pendenza dei banchi diluviali di questa località, sia perchè il relativo Bacino è rivolto a Nord e quindi meglio atto alla produzione glaciale. Inoltre, rispetto a questo Bacino imbrifero, è da osservarsi che probabilmente esso nel periodo plistocenico doveva essere alquanto più esteso che non oggi; ciò in causa della notevole captazione che dovette verificarsi da parte del precipitoso corso acqueo che incise il Vallone di Forca d'Acero.

Questo bacino imbrifero di Forca d'Acero o di S. Donato doveva originalmente arrestarsi in alto ad una linea di cresta collegante Serra Traversa con Monte Panico; ma, specialmente nell'èra quaternaria, esso per erosione nei terreni eocenici riescì ad estendersi verso Nord a svantaggio del bacino opposto per circa un chilometro sino alla Regione Controversa, nome che parrebbe indicare come anche le divisioni umane abbiano risentito di tale furto geologico.

Fenomeni analoghi non sono rari nell'Appennino quando litologia e tettonica lo consentono e sarebbe assai interessante farne oggetto di ricerche speciali.

La parte settentrionale dei Colli Nascosi è specialmente riferibile al Diluviale che passa poi gradatamente in alto, verso Sud, al Morenico disposto in irregolari archi concentrici (resi ancor più irregolari dalle varie e potenti erosioni postglaciali) che vanno succedendosi da poco sopra i 1200 metri sin oltre i 1400 al grande piano di Regione Campo Rotondo, senza che sia sempre possibile discernere ciò che è andamento originario dei cordoni morenici da ciò che è invece solo prodotto dalla intensa erosione acquea.

Il Vallone che scende dalla Macchia Rovana potè anche albergare un *Glacio-nevato* che depositò terreni morenici.

Uno stretto ma lungo *Ghiacciaio* si costituì in *Valle Fredda* profondamente incassata nei calcari eocenici (talora riccamente nummulitici), rivolta perfettamente a Nord; ciò ci spiega il

Digitized by Google

suo nome attuale ed il suo Glacialismo antico, di cui possiamo constatare i resti specialmente nella sua meravigliosa morena sinistra che si estende, leggermente arcuata, per quasi un chilometro sui calcari e le marne del Terziario di Regione i Cretoni. Invece la morena destra si presenta meno sviluppata anche per difficoltà di deposito e di conservazione.

Nella prossima Vallata del Fondillo, rivolta a Nord, incassata nella serie liasica, sormontata parzialmente ad Ovest ed a Sud dai Calcari eocenici e cretacei formanti la Cresta o Serra delle Cravare (che si estolle sin oltre 1800-1900 metri), si potè costituire un esteso per quanto corto *Ghiacciaio di Fondillo*, foggiato un po' ad ampia vedretta ventagliforme che sul suo margine anteriore ebbe a depositare, in successivi momenti di sosta, diversi circhi concentrici un po' irregolari in origine ed ancor più irregolarizzati dalle erosioni oloceniche.

Percorrendo la ristrettasi Vallata del Sangro a valle del Molino d'Opi si veggono qua e là sui fianchi, oltre a detriti di falda più o meno franoidi, anche veri resti morenici; così allo sbocco della stretta e lunga *Val Ciavulara*; nella cui parte più alta, in regione Casone vi è una vasta formazione morenico-franoide in rapporto coi valloni scendenti dal Monte della Corte; nella contigua e pur lunga *Val Rasino* che termina con tipica conoide di dejezione; ma specialmente nella lunghissima *Valle Prolfo* che dovette albergare uno stretto ma allungato Ghiacciaio il quale spinse la sua fronte sin poco lungi da Villetta Barrea, depositando materiale diluvio-morenico e schiettamente morenico tra 1100 e 1300 metri.

Chiudo questi sparsi cenni glaciologici ricordando che nella conca di Barrea esistono pure interessanti resti morenici; così sul fianco settentrionale, specialmente nella Regione Montepiano, in rapporto coll'aspro vallone scendente dai M. Chiarano-Greco che oltrepassano i 2200 m., quantunque esista talora passaggio tra depositi morenici e materiali detritici di falda, più o meno franoidi.

Ma meravigliosamente tipici, quasi scolastici, sono gli apparati morenici depositati dai Ghiacciaietti che già occuparono

Digitized by Google

le vallette incise nei Calcari, specialmente eocenici, sul fianco meridionale della Conca di Civitella Alfedena-Barrea. Si tratta di collinette o cordoni morenici, depositati essenzialmente sulle marne terziarie, disposti appaiati allo sbocco della relativa valle montana, allineati od alquanto arcuati, fra loro subparalleli od un po' convergenti, ben distinti per forma, costituzione ed andamento; così sopra Civitella Alfedena al termine di *Val di Rose* (aspramente incassata fra calcari liasici ed eocenici); allo sbocco di *Valle Jannarigara* (incisa essenzialmente nei calcari eocenici) nella regione di Colle dei Panetti, dove anzi i cordoni morenici sono da ciascun lato in parte doppi o sdoppiati; ed infine i due bellissimi lunghi cordoni morenici subparalleli e leggermente arcuati che giacciono sulle marne terziarie al termine dell'aspro *Vallone dell'Inferno.*

Tuttociò in relazione con altrettanti piccoli *Ghiacciai di Rose, di Jannarigara* e *dell'Inferno* che già occuparono detti valloni rivolti a Nord.

Una questione geologica speciale che si presenta nell'alta Val Sangro è quella della costituzione del fondo dei Bassipiani o Bacini di Opi e di Barrea. Essendosi progettato di convertire tali bacini in serbatoi artificiali con opportuno indigamento, data la natura prevalentemente calcarea della regione, nonchè la presenza di frequenti fratture, cavernosità e inghiottitoi (come quelli presso Colle Regina (1), presso Opi, ecc.), per conoscere la natura più o meno permeabile del fondo di detti bacini si fecero eseguire una cinquantina di trivellazioni d'assaggio il cui risultato è esposto nella pubblicazione fatta dalla Soc. Ind. ed Elettr. " Terni „ col titolo: *Impianti del Sangro*, " I Serbatoi di Opi e di Barrea „ (Roma, Tip. Ferrajolo, 1926), con 2 Relazioni geologiche, 6 tavole e sezioni.

Dette trivellazioni hanno quasi tutte incontrato a maggiore o minor profondità (sotto le alluvioni del Sangro od i detriti di

(1) Nome dato alla bassa terminazione N. O. del grande sprone montuoso di R.e Le Pelusare.

Digitized by Google

falda o i terricciati recenti) terreni argillosi che, dal contesto delle Relazioni geologiche e specialmente dalla Sezione geologica di pag. 62, appare essere stati interpretati come Argille e Schisti argillosi del Terziario marino (da me già attribuiti all'Eocene superiore, ritenuti ora piuttosto miocenici). Ma, pur ammettendo che qualcuna di dette trivellazioni abbia attraversato la serie argillosa del Terziario più o meno antico (specialmente certe marne dure, schistose, relativamente secche se non impastate artificialmente), debbo dire che l'esame dei campioni estratti da tali trivellazioni mi ha mostrato trattarsi piuttosto di terreno di origine lacustre (argille marnose giallastre o grigie, talora sabbiose, qua e là con intercalazioni ghiaiose o ciottolose, spesso con frustoli lignitico-torbosi) e ben più giovani, cioè depositate sul fondo di laghetti che già occuparono i bacini di Opi e di Barrea nel periodo postglaciale o piuttosto tra la fine del Pliocene ed il principio del Plistocene, analogamente a quanto si è verificato in tanti bacini grandi e piccoli entrappenninici; ciò che potrebbe venir chiarito da fossili o da sezioni naturali o artificiali che non ebbi a vedere.

La potente erosione postglaciale che incise anche di 100-200 metri la Valle del Sangro e dei suoi affluenti, come si è sopraccennato, naturalmente potè esportare pure la parte superiore di tale deposito lacustre che probabilmente poteva passare verso l'alto ai depositi fluvio-lacustri poi fluviali o diluviali, come quelli, per es., dei Colli Bassi e dei Colli Nascosi.

Le costose trivellazioni sopraindicate se, invece di esser state eseguite così in gran numero (una cinquantina), fossero state fatte in ben minore quantità, ma con criterio più geologico (alcune furono impiantate persino nel calcare!) e perseguite sempre sino ad incontrare il calcare, avrebbero potuto illuminarci sopra tale importante questione.

Concludendo si può ben dire che durante il Plistocene il il Glacialismo ebbe un enorme sviluppo nell'alta Val Sangro, come del resto in gran parte delle alte regioni dell'Appennino italiano, come è indicato da depositi abbastanza tipici, sia diluviali o diluvio-glaciali della 1ª glaciazione, sia da veri depositi

Digitized by Google

morenici, ad archi e cordoni, della 2ª e 3ª glaciazione, che però nel complesso appoggerebbero l'idea di una sola grande Epoca glaciale con vari periodi o sottoperiodi piuttosto che non di diverse vere epoche glaciali ben distinte.

I depositi morenici passano talora a depositi franoidi od a detriti di falda, tanto che non sempre ne è facile la distinzione, ciò che talvolta dipende anche da vera commistione originaria.

Nell'Olocene il Glacialismo fu molto ridotto, spesso solo a piccole Vedrette o Glacionevati i cui resti morenici, quando esistono, sono generalmente meschini, irregolari e passanti a depositi franoidi.

Le erosioni e le incisioni fatte dalle acque nella regione in esame (e quindi analogamente nell'Appennino in genere) durante il Plistocene ed anche durante l'Olocene furono enormi, spesso di centinaia di metri, specialmente, com'è naturale, lungo i corsi acquei e se in terreni marnosi; esse quindi, oltre a cambiare talora notevolmente il paesaggio, diedero origine a varie interessanti captazioni idrografiche.

Le scarse e sparse osservazioni saltuarie raccolte occasionalmente in poche escursioni fatte, per altro scopo, nell'alta Val di Sangro ed esposte in questa breve Nota, lasciano intravvedere quanto sarebbero importanti ed interessanti speciali minuti studi nell'Appennino, sia sui fenomeni glaciali, sia su quelli di erosioni, captazioni, ecc. fatte dai corsi acquei.

Digitized by Google

Nuova teoria delle grandezze.

Nota di UGO CASSINA
presentata dal Socio nazionale residente Giuseppe Peano.

Nella presente Nota espongo una nuova teoria delle grandezze, fondata sopra " cinque „ postulati (o proposizioni primitive) assolutamente indipendenti fra di loro e di significato intuitivo immediato. I concetti primitivi che figurano in tali postulati sono " due „, quello di *grandezza* e quello di *prodotto di un numero reale assoluto per una grandezza.*

Cosicchè la teoria delle grandezze che qui espongo è subordinata a quella dei numeri reali assoluti. Perciò essa è da seguirsi da chi — come me — crede di edificare tutta l'aritmetica generale (e quindi tutta l'analisi matematica pura) indipendentemente dal concetto di " grandezza „, ma generalizzando man mano il concetto di " numero „, partendo dal concetto intuitivo di " numero intero assoluto „ (1).

Altri autori ritengono invece di subordinare l'aritmetica generale alla teoria delle grandezze. Fra questi alcuni edificano la teoria delle grandezze facendo uso del concetto di numero intero assoluto ed ottengono i numeri razionali ed irrazionali assoluti fondandosi sulle proprietà postulate per le grandezze. Il più antico e celebre fra questi è EUCLIDE (325 a. C, *Elementi*, lib. V).

(1) Per es. per la via indicata da G. PEANO, *Arithmetices principia novo methodo exposita*, Torino, 1889 e le varie ediz. del *Formulario mathematico* (ediz. V, Torino, 1908), e da M. PIERI, *Sopra gli assiomi aritmetici* (" Boll. Accad. Gioenia di Catania „, serie 2ª, fasc. 2°, 1908).

Digitized by Google

Altri ancora costruiscono la teoria delle grandezze in modo assolutamente indipendente dal concetto di numero, sia pur quello di numero intero assoluto. Fra questi citerò E. V. HUNTINGTON (1) e C. BURALI-FORTI (2).

Com'è noto, EUCLIDE, il quale dedica alla teoria delle grandezze tutto il V libro dei suoi *Elementi*, prende il concetto di grandezza (*μέγεθος*) come primitivo.

Una prima definizione di grandezza è stata data da HERONE di Alessandria:

Μέγεθός ἐστι τὸ αὐξανόμενον καὶ τεμνόμενον εἰς ἄπειρον.

Cioè: " Grandezza è tutto ciò che si può aumentare (moltiplicare) e dividere indefinitamente „ (def. 119).

Un'altra definizione celebre di grandezza è quella data da EULERO nella sua Algebra del 1770, la quale, per la grande autorità di chi la emetteva, si diffondeva poi in tutti i libri, rimanendovi per oltre un secolo:

Erstlich wird alles dasjenige eine Grösse genennt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist.

Cioè: " Si chiama grandezza tutto ciò che è suscettibile d'aumento o di diminuzione „ (3).

Questa definizione venne criticata come troppo ampia. Le obbiezioni da fare sono però di natura diversa (4). In verità il " metro „, il " chilogramma „ (internazionali), il " giorno solare medio „ sono delle grandezze nè sono suscettibili di aumento nè di diminuzione. La proprietà enunciata da EULERO non è perciò relativa ad una singola grandezza, ma bensì a tutta una classe di grandezze omogenee fra loro.

---

(1) EDWARD V. HUNTINGTON in *Transactions of the Americ. Math. Soc.*, t. 3°, 1902, p. 265.

(2) C. BURALI-FORTI, *Revue de mathématiques*, t. 6°, 1900; *Atti R. Acc. Scienze di Torino*, vol. 39, 1904; *Rend. R. Acc. dei Lincei*, serie 5ª, vol. 24, 1° sem., pp. 489-496; *Logica matematica*, ediz. II, Milano, 1919, pp. 378-381.

(3) L. EULER, *Volständige Anleitung zur Algebra* (St. Petersburg, 1770, 1er T., Cap. 1, n. 1); *Opera omnia*, ed. Teubner, 11, 1911.

(4) Vedi G. PEANO, *Operazioni sulle grandezze*, " Atti R. Acc. Scienze di Torino „, vol. 57, 1922, § 1.

Digitized by Google

La proposizione data da HERONE come definizione delle grandezze, sotto forma algebrica moderna, può enunciarsi così: " Se a è una grandezza ed x è un numero razionale assoluto, allora il prodotto di x per a è una grandezza „. Però questa proposizione non basta da sola per costruire tutta la teoria delle grandezze.

La teoria delle grandezze — che è svolta nella presente Nota a grandi tratti — è stata da me sviluppata completamente, anche nei particolari, nel mio corso di Matematiche complementari tenuto nella R. Università di Milano nell'anno 1926-27. Sua caratteristica principale è la proposizione primitiva I " Il prodotto d'un numero reale assoluto per una grandezza è sempre una grandezza „, e quindi può dirsi di origine heroniana (1).

A qualcuno, forse, potrà sembrare troppo postulare senz'altro che il prodotto d'un qualunque numero assoluto (e quindi anche se " irrazionale „) per una grandezza è ancora una grandezza. Osservo però che in tal maniera la teoria delle grandezze diventa assai semplice: in particolare non si ha più bisogno di postulare le proprietà più complesse delle classi complete di grandezze omogenee (v. n° 8); inoltre che già EUCLIDE ha fatto più volte uso implicito di questa proposizione.

Invero nel suo libro XII, dedicato alla stereometria in senso proprio, nelle proposizioni 2, 5, 11, 18 — relative al cerchio, alla piramide, al cono e cilindro ed alla sfera —, egli ritiene intuitiva *l'esistenza della quarta proporzionale dopo tre grandezze assegnate* (di cui le prime due omogenee fra loro, ma anche eterogenee rispetto alla terza, come nella prop. XII, 5).

Ora siano a, b, c delle grandezze ed a, b siano omogenee fra loro; allora il supporre l'esistenza della quarta proporzionale dopo a, b, c — cioè d'una grandezza x tale che $a : b = c : x$ — equivale a supporre che il prodotto del rapporto $b : a$, fra le due grandezze omogenee b ed a, per la grandezza c sia una grandezza omogenea a c.

Ma il rapporto di due grandezze omogenee è un numero

---

(1) Cfr. anche: G. PEANO, *Aritmetica generale ed algebra* (Paravia, Torino, 1902, p. 136 e seg.); L. DELLA CASA, *Rapporto di grandezze eterogenee* (" Atti R. Acc. Scienze di Torino „, vol. 51, 1916).

Digitized by Google

reale assoluto generico, quindi l'assunzione implicita di EUCLIDE, col linguaggio moderno, può enunciarsi così: " Se c è una grandezza ed x è un numero reale assoluto, allora il prodotto di x per a è una grandezza „, quindi coincide con il primo dei cinque postulati seguenti.

Questi, oltre all'esser enunciati col linguaggio ordinario, sono anche espressi mediante alcuni simboli di logica matematica introdotti da G. PEANO (*Formulario mathematico*, op. cit., ediz. V). La Nota è però redatta in modo da poter essere letta anche da chi non conosce tali simboli.

§ 1. — Nuovi postulati per le grandezze.

1. I nuovi postulati per le grandezze. — Nelle proposizioni primitive (postulati) seguenti figurano i due concetti primitivi di *grandezza* e di *prodotto d'un numero reale assoluto per una grandezza*, che indicherò rispettivamente con M_0 (iniziale della parola latina *magnitudine* = greco *μέγεθος* = italiano *grandezza*) e con l'ordinario segno $\times$.

I. *Il prodotto di un numero reale assoluto per una grandezza è una grandezza.*

Dopo ciò " dò il nome di *grandezza nulla* ad ogni grandezza che possa mettersi sotto la forma di prodotto del numero zero per una grandezza „, ed enuncio le rimanenti proposizioni primitive.

II. *Esistono delle grandezze non nulle.*

III. *Il prodotto del numero* 1 *per qualsivoglia grandezza è eguale alla grandezza stessa.*

IV. *Ogni numero che moltiplicato per una grandezza non nulla la lascia inalterata non può differire da* 1.

V. *Sia a una grandezza ed x, y dei numeri reali assoluti qualunque, allora l'ente che si ottiene moltiplicando il numero x per il prodotto di y per a non differisce da quello che si ottiene moltiplicando il prodotto dei numeri x ed y per la grandezza a.*

Digitized by Google

Coi simboli del *Formulario* (ediz. V) di G. PEANO, le proposizioni precedenti si possono scrivere:

I. $a \in M_0 . x \in Q_0 . \supset . x \times a \in M_0$. Pp.

$0_M = x \ni \exists [M_0 \cap a \ni (x = 0 \times a)]$. Def.

II. $\exists M_0 \sim 0_M$. Pp.

III. $a \in M_0 . \supset . 1 \times a = a$. Pp.

IV. $a \in M_0 \sim 0_M . \exists Q_0 \cap x \ni (x \times a = a) . \supset .$
$. Q_0 \cap x \ni (x \times a = a) = \iota 1$. Pp.

V. $a \in M_0 . x, y \in Q_0 . \supset . x \times (y \times a) = (x \times y) \times a$. Pp.

In queste proposizioni simboliche ho indicato con 0_M la classe formata dalle grandezze nulle.

2. Indipendenza e compatibilità dei postulati precedenti. — La dimostrazione dell'*indipendenza assoluta* delle proposizioni primitive precedenti si farà — com'è ben noto — mostrando com'è possibile dare ai concetti primitivi " grandezza „ e " prodotto d'un numero reale assoluto per una grandezza „ delle interpretazioni reali in modo da soddisfare a quattro delle proposizioni stesse comunque scelte e non alla rimanente. Perciò, per maggiore chiarezza, in questo numero farò uso del segno $\times'$ per indicare il prodotto d'un numero reale assoluto per una grandezza, riservando l'uso del segno $\times$ ad indicare l'ordinario prodotto fra numeri reali.

·1 Si supponga che M_0 coincida con la classe dei numeri interi assoluti e che $\times'$ indichi l'ordinaria moltiplicazione: allora la I è falsa mentre le altre proposizioni primitive sono vere.

·2 Si supponga che M_0 sia eguale alla classe composta dal solo numero zero e che $\times'$ indichi l'ordinaria moltiplicazione, allora la II è falsa e le rimanenti sono vere (in particolare la IV che esprime una proprietà della classe vuota).

·3 Indichiamo con Q_0 la classe dei numeri reali assoluti e sia " i „ un elemento qualunque non appartenente alla classe dei numeri reali assoluti (per es. $i = \sqrt{-1}$); e si supponga che M_0 coincida con la classe ottenuta riunendo insieme

Digitized by Google

gli elementi della classe Q_0 con l'elemento i, e si definisca l'operazione $\times'$ nel seguente modo:

1° se x ed a sono elementi appartenenti a Q_0, allora . . . . . $x \times' a = x \times a$,

2° se x è un elemento di Q_0, allora . . $x \times' i = x$;

allora la III è falsa mentre le rimanenti sono vere.

·4 Si supponga che M_0 sia eguale alla classe formata dai numeri 0 ed 1 e si definisca l'operazione $\times'$ nel seguente modo:

1° se a è un elemento appartenente ad M_0 allora $0 \times' a = 0$,

2° se x è un numero reale assoluto maggiore di zero, allora:

$$x \times' 0 = 0, \qquad x \times' 1 = 1;$$

allora la IV è falsa mentre le altre sono vere.

·5 Si supponga che M_0 sia eguale alla classe formata dai numeri 0, 1, 2 e si definisca l'operazione $\times'$ nel seguente modo:

1° se a è un elemento di M_0 allora . . . . $0 \times' a = 0$,

2° se x è un numero reale assoluto maggiore di zero allora . . . . . $x \times' 0 = 0$,

3° . . . . . $1 \times' 1 = 1$,

4° se x è un numero reale assoluto diverso da 0 e da 1 allora . . . . . $x \times' 1 = 2$,

5° . . . . . $1 \times' 2 = 2$,

6° se x è un numero reale assoluto diverso da 0 e da 1 allora . . . . . $x \times' 2 = 1$;

allora la V è falsa mentre le altre sono vere.

·6 Che le proposizioni I, II, ... V siano poi *compatibili* risulta dal fatto che se poniamo $M_0 = Q_0$ ed $\times' = \times$ allora esse sono tutte soddisfatte (1).

---

(1) Ma si noti che questa dimostrazione di " compatibilità „ è superflua, perchè — d'accordo con G. Peano (" Rend. Circ. mat. di Palermo „, t. 31, pp. 360-366; " Rivista de mathematica „, t. 8°, 1906, p. 142) — ritengo che: " *proba que systema de postulatos de Arithmetica, aut de Geometria, non involve contradictione, non es, me puta, necessario. Nam nos non crea postulatos ad arbitrio sed nos sume ut postulatos propositiones simplicissimo, scripto in*

Digitized by Google

3. Prime conseguenze dei nuovi postulati. — Conviene estendere la legge commutativa al prodotto di un numero reale assoluto per una grandezza mediante la definizione seguente:

·1 " Se x è un numero reale assoluto ed a è una grandezza, allora si riterrà per definizione che $a \times x = x \times a$ ".

Si ha poi:

·2 Esistono delle grandezze nulle.

Dim. In virtù di II esistono delle grandezze non nulle, sia dunque b una tale grandezza; allora per I, $0 \times b$ è una grandezza e per la definizione di grandezze nulle è una particolare grandezza nulla. Così è provato il teorema.

·3 Se a è una grandezza nulla ed x è un qualunque numero reale assoluto, allora $x \times a = a$.

Dim. L'ipotesi è possibile in virtù della ·2 (e cioè in definitiva in virtù di I e II). Sia ora b una grandezza tale che " $a = 0 \times b$ ", allora per la V si ha:

$$x \times a = x \times (0 \times b) = (x \times 0) \times b = 0 \times b = a,$$

che è quanto volevasi dimostrare.

·4 Il prodotto d'un numero reale assoluto non nullo per una grandezza non nulla è una grandezza non nulla.

Dim. Per la II risulta intanto che l'ipotesi è possibile; sia dunque a una grandezza non nulla ed x un numero reale assoluto non nullo, allora per la I si deduce che:

" $x \times a$ è una grandezza ". (α)

Si tratta di dimostrare che essa non è nulla. Ora, si ragioni per assurdo, e si supponga che $x \times a$ sia nulla; allora, poichè x è diverso da zero, in virtù della ·3 avremo:

$$(1/x) \times (x \times a) = x \times a. \qquad (\beta)$$

---

modo explicito aut implicito, in omni tractatu de Arithmetica, aut de Geometria... Proba de coexistentia de systema de postulatos es utile si postulatos es hypothetico, et non respondentes ad factu reale " (in latino *sine flexione*).

Digitized by Google

Ma per i postulati V e III si ha:

$$(1/x) \times (x \times a) = [(1/x) \times x] \times a = 1 \times a = a. \qquad (\gamma)$$

Quindi da (β) e (γ) si deduce:

$$x \times a = a, \qquad (\delta)$$

che è assurda perchè è un'eguaglianza fra una grandezza non nulla a ed una grandezza nulla $x \times a$. Si conclude perciò che nell'ipotesi della ·4 è assurdo l'affermare che $x \times a$ è nulla; ma poichè da (α) risulta che $x \times a$ è una grandezza, si conclude che essa è veramente una grandezza non nulla, che è quanto volevasi dimostrare.

·5 Se a è una grandezza non nulla ed x, y sono numeri reali assoluti tali che $x \times a = y \times a$, allora necessariamente $x = y$.

Dim. 1° Si supponga $x = 0$; allora $x \times a$ è una grandezza nulla, quindi dall'ipotesi risulta che anche $y \times a$ è una grandezza nulla; ma poichè a non è nulla, per la ·4 dovrà essere $y = 0$, cioè, in definitiva, $y = x$.

2° Si supponga x diverso da 0; allora per i postulati V e III si ha:

$$(1/x) \times (x \times a) = [(1/x) \times x] \times a = 1 \times a = a, \qquad (\alpha)$$

$$(1/x) \times (y \times a) = [(1/x) \times y] \times a = (y/x) \times a. \qquad (\beta)$$

Dall'ipotesi e da (α) e (β) si ha perciò:

$$a = (y/x) \times a,$$

da cui, per il postulato IV, $y/x = 1$, cioè $y = x$.

Con ciò il teorema rimane provato.

(Si osservi che per la dimostrazione di questa proposizione, che è fondamentale per la teoria delle grandezze, si ha bisogno di tutte e cinque le proposizioni primitive del n° 1).

§ 2. — Teoria delle grandezze omogenee.

4. Prime definizioni. — Vediamo ora come possa ottenersi la consueta teoria delle grandezze omogenee. Mi limiterò a dare le definizioni e i teoremi principali nell'ordine in cui si possono stabilire.

Digitized by Google

·1 " Dirò che u è una *classe completa di grandezze omogenee* — e scriverò che '$u \in \mu$' (ove la μ è l'iniziale della parola greca *μέγεθος*) — se esiste una grandezza 'non nulla' a tale che gli elementi di u siano tutti e soli quelli della forma $x \times a$, ove x è un qualunque numero reale assoluto „. Scriverò allora che " $u = Q_0 \times a$ „. In simboli:

$$\mu = u \ni [\exists M_0 \cap a \ni (a \sim \in 0_M . u = Q_0 \times a)]. \qquad \text{Def.}$$

Come conseguenza immediata della definizione precedente e dei postulati I e II si ha il teorema:

·11 Esistono delle classi complete di grandezze omogenee.

·2 " Siano a, b delle grandezze, allora dirò che esse sono *omogenee* se sono elementi d'una stessa classe completa di grandezze omogenee „. " Due grandezze non omogenee saranno dette anche *eterogenee* „.

Si ha il teorema:

·3 In ogni classe completa di grandezze omogenee vi è una ed una sola grandezza nulla.

Dim. In virtù della ·11 esistono delle classi complete di grandezze omogenee; sia allora u una qualunque di esse. Per la definizione ·1 esiste almeno una grandezza non nulla a tale che

$$u = Q_0 \times a. \qquad (\alpha)$$

Quindi $0 \times a$ è una grandezza nulla appartenente ad u; ma dalla (α) risulta che le rimanenti grandezze appartenenti ad u sono tutte del tipo $x \times a$ ove x è un qualunque numero reale assoluto non nullo e che perciò, in virtù della 3·4 sono tutte grandezze non nulle. Con ciò è dimostrato il teorema.

Conviene allora dare la definizione seguente:

·4 " Sia u una classe completa di grandezze omogenee, allora con 0_u — da leggersi *elemento nullo* di u — si indicherà quell'unica grandezza nulla appartenente ad u „.

Digitized by Google

5. Quoziente. — ·1 " Se a, b sono grandezze omogenee e b non è nulla, allora definisco a/b — da leggersi 'a diviso b' (o *quoziente* di a per b) — come quel numero reale z tale che $a = z \times b$ ".

Si dimostra immediatamente che questa definizione non è illusoria facendo vedere che:

·2 Nelle ipotesi della ·1, a/b è un numero reale assoluto unico.

Dim. Invero per l'ipotesi e la definizione di grandezze omogenee (**4**·2) esistono una grandezza c non nulla ed una coppia di numeri reali assoluti x, y tali che:

$$(\alpha) \qquad a = x \times c, \qquad (\beta) \qquad b = y \times c.$$

Ma poichè b non è nulla, y dovrà essere diverso da zero (**3**·4). Dalla (β), in virtù dei postulati V e III, si avrà dunque:

$$(1/y) \times b = (1/y) \times (y \times c) = [(1/y) \times y] \times c = 1 \times c = c;$$

sostituendo in (α) ed applicando ancora una volta la V si ha:

$$a = x \times [(1/y) \times b] = [x \times (1/y)] \times b = (x/y) \times b,$$

dalla quale risulta intanto che " x/y è un numero che moltiplicato per b dà a ".

Di tali numeri ne esiste poi uno solo: invero si supponga che z e z' siano numeri reali assoluti tali che " $a = z \times b$ " ed " $a = z' \times b$ "; allora per la proprietà transitiva dell'eguaglianza si ha " $z \times b = z' \times b$ "; ma poichè b è una grandezza non nulla, applicando la **3**·5, si deduce che $z = z'$.

Con ciò la proposizione ·2 è dimostrata.

Si possono ora dimostrare nel solito modo [1] le ordinarie proprietà del quoziente di due grandezze omogenee. Ne ricorderò alcune:

·3 Siano a, b due grandezze omogenee ed a non sia nulla, allora si ha che:

$$b = (b/a) \times a.$$

---

[1] V., per es., L. Della Casa, *Rapporto di grandezze eterogenee* ("Atti R. Acc. Scienze di Torino", vol. 51, 1916, § 3).

Digitized by Google

·4 Sia a una grandezza non nulla ed m, n dei numeri assoluti, non nulli, allora:

$$(m \times a) / (n \times a) = m/n.$$

·5 Siano a, b, c delle grandezze omogenee ed a e c non siano nulle allora:

$$b/c = (b/a)/(c/a).$$

6. Somma. — ·1 Siano a, b delle grandezze omogenee e b sia nulla, allora porremo per definizione " $a + b = a$ „; si supponga invece che b non sia nulla, allora porremo per definizione " $a + b = (1 + a/b) \times b$ „.

Dalla definizione adottata e dalle proprietà già acquisite risulta immediatamente che:

·2 Nelle ipotesi della ·1, $a + b$ è sempre una grandezza unica ben individuata, e l'operazione $+$ (*somma*) fra grandezze omogenee gode delle ordinarie proprietà *commutativa* ed *associativa*.

7. Relazione di maggiore e di minore. — ·1 Sia u una classe completa di grandezze omogenee (cioè $u \in \mu$); vogliamo definire la relazione di *maggiore* (o di *minore*) fra gli elementi della classe u. Possiamo procedere così:

1° " Se a è un elemento non nullo di u, allora per definizione riterremo $a > 0_u$ (o ciò che fa lo stesso $0_u < a$) „, che leggeremo nel solito modo.

2° " Siano a, b due grandezze non nulle appartenenti ad u, allora diremo che $a > b$ (oppure che $b < a$), quando il numero a/b è maggiore di 1 „.

Ciò posto si possono dimostrare senz'altro le proposizioni seguenti [1]:

·2 Se a è una grandezza non nulla ed m, n sono due numeri reali assoluti qualunque, allora il dire che $m > n$ equivale a dire che $m \times a > n \times a$.

---

[1] Cfr. L. Della Casa, Nota c., § 5.

Digitized by Google

·3 Siano a, b, c delle grandezze omogenee ed a non sia nulla, allora il dire che $b > c$ equivale a dire che $b/a > c/a$.

8. Le proprietà caratteristiche d'una classe completa di grandezze omogenee. — È facile verificare che ognuna delle classi alle quali ho dato il nome di " classe completa di grandezze omogenee „ soddisfa a tutte le condizioni necessarie e sufficenti per ottenere la teoria completa di detti enti.

C. Burali-Forti ha osservato che le proprietà le quali caratterizzano una classe completa di grandezze omogenee sono *nove* (1).

Dimostriamo che esse sono soddisfatte per ogni elemento della nostra classe μ.

Sia dunque u una classe completa di grandezze omogenee (cioè $u \in \mu$). Ciò equivale a dire che esiste una grandezza non nulla a tale che $u = Q_0 \times a$.

Le prime sei condizioni di C. Burali-Forti sono senz'altro soddisfatte (1ª proprietà dell'elemento nullo 0_u rispetto alla somma; 2ª esistenza di elementi non nulli rispetto alla somma; 3ª la somma di un elemento non nullo di u con un qualunque elemento di u produce un elemento non nullo appartenente ad u; 4ª invertibilità della somma; 5ª proprietà commutativa della somma; 6ª proprietà associativa della somma).

Fissiamo adunque la nostra attenzione sopra le rimanenti condizioni 7, 8, 9 (di Burali-Forti).

La 7 — che possiamo ricordare col nome di *principio del terzo escluso* — dice che:

" Se b e c sono degli elementi qualunque di u, allora necessariamente $b = c$, oppure $b > c$, oppure $c > b$ „.

Dim. Infatti, per la definizione di u, risulta che b/a e c/a sono due numeri reali assoluti, ed allora necessariamente:

(α) $\quad b/a = c/a \quad$ oppure $\quad b/a > c/a \quad$ oppure $\quad c/a > b/a$.

---

(1) C. Burali-Forti, *Logica matematica*, op. cit., p. 378. Il simbolo di Burali-Forti che, in quest'opera, corrisponde al mio μ è Grd; in altri lavori (" Rend. R. Acc. dei Lincei „, serie 5ª, vol. 30) è invece Grd'.

Digitized by Google

Ma allora, per la 7·3, dalla (α) si ha:

(β) $b = c$ oppure $b > c$ oppure $c > b$,

che è quanto volevasi dimostrare.

La 8 — che possiamo ricordare col nome di *principio di densità* — dice che:

" Se b è un elemento non nullo appartenente ad u, allora esiste certo un elemento non nullo appartenente ad u e minore di b ".

Dim. Invero, dall'ipotesi del teorema, risulta che $(1/2) \times b$ è un elemento non nullo appartenente ad u e minore di b.

La 9 — o *principio di continuità integrale* — possiamo enunciarla nel seguente modo:

" Se v è una classe non vuota formata con elementi appartenenti ad u ed esiste una grandezza appartenente ad u maggiore di ogni elemento di v, allora esiste almeno un elemento l di u siffatto: che ogni grandezza minore di l sia tale che esista almeno un elemento della classe v di cui essa sia minore, e viceversa ogni grandezza tale che esista almeno un elemento nella classe v di cui essa sia minore risulti necessariamente anche minore di l ".

Dim. Sia v' la classe formata da tutti i numeri reali assoluti del tipo b/a ove b è una qualunque grandezza di v, e sia x il limite superiore di questa classe di numeri (che esiste ed è unico); allora la grandezza l soddisfacente alle condizioni del teorema è eguale al prodotto di x per a.

Milano, 10 febbraio 1928 (*R. Università*).

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIII, DISP. 9ª E 10ª, 1927-1928

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1928

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Marzo 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Boggio e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Presidente Senatore Ruffini e i Soci: Guidi e Repossi.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente, con accento commosso, comunica all'Accademia la morte del nostro Socio corrispondente Prof. Ettore Artini, deceduto in Milano il giorno 7 corr. dopo lunga e penosa malattia. Il Presidente, che dell'Artini fu collega a Pavia e intimo amico, accenna brevemente ai meriti dell'estinto, alle sue benemerenze scientifiche e al suo alto valore come insegnante e come banditore dell'indirizzo geologico della Mineralogia. — Egli annunzia che di lui dirà degnamente nella prossima adunanza il suo allievo e nostro Socio Professore Emilio Repossi. — L'Artini apparteneva al nostro Sodalizio dal 24 di febbraio del 1918.

Il Presidente dà quindi notizia della morte del Prof. José Rodriguez Carracido, Presidente della R. Accademia delle Scienze di Madrid, avvenuta il 3 corr.

Digitized by Google

Il Presidente presenta quindi il volume II della serie II degli *Archives du Muséum d'Histoire Naturelle*, contenente, oltre le Commemorazioni di VAN THIEGHEM e di MENNIER, importanti Memorie di Scienze Naturali.

Il Socio SACCO fa quindi omaggio di una sua Memoria *Sui grandi Laghi postglaciali di Rivoli e di Ivrea*, accompagnata da due carte topografiche, e ne discorre.

Il Socio Direttore della Classe SOMIGLIANA presenta per la inserzione negli *Atti* una Nota del Prof. ENEA BORTOLOTTI di Bologna, dal titolo: *Su una formula di Geometria proiettiva differenziale delle superficie, e le sue applicazioni nella Geometria metrica.*

Il Socio BOGGIO nel nome di Angelo PENSA di Torino una Nota intitolata: *Geodetiche delle rigate sviluppabili generiche e delle superficie coniche*, e ne discorre brevemente.

Le due Note vengono accettate per la pubblicazione negli *Atti*.

Digitized by Google

LETTURE

Su una formula di Geometria proiettiva differenziale delle superficie e le sue applicazioni nella Geometria metrica.

Nota del Prof. ENEA BORTOLOTTI
presentata dal Socio nazionale residente Carlo Somigliana.

1. — Sia σ una superficie (non rigata) di S_3 proiettivo. Come è noto, essa non possiede invarianti assoluti proiettivi d'ordine ≤ 3: il Čech [1] ha dato, pei suoi invarianti proiettivi del 4° e del 5° ordine (cioè, per gli invarianti del 1° e del 2° ordine dell'elemento lineare proiettivo $\frac{F_3}{F_2}$ di σ), delle espressioni molto semplici ed eleganti, ottenute con l'uso di un tensore del 1° ordine, ψ^λ, mediante il quale, secondo la formula

$$(1) \qquad \nabla\omega\, a_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\nabla\omega\, J}{J}\, a_{\lambda\mu\nu} + \epsilon\theta_{\omega\tau}\psi^\tau b_{\lambda\mu\nu}\,, \quad [2]$$

si esprimono tutte le derivate covarianti dei coefficienti di F_3 rispetto a F_2. Ora: tra gli invarianti di $\frac{F_3}{F_2}$ si trova, naturalmente, la curvatura K della forma F_2: il Čech ha trovato che,

[1] Nella Memoria *Étude analytique de l'élément linéaire projectif d'une surface* (Public. de la Fac. des Sciences de l'Univ. Masaryk, Brno, 1924, Čis. 36). Ved. anche il Cap. VI della *Geometria proiettiva differenziale* di Fubini e Čech (Zanichelli, 1926-27), pp. 295-333. Citerò quest'ultima opera d'ora innanzi con G. P. D.

[2] Ved. G. P. D., p. 306; e pp. 67, 295, 297, 301 per le notazioni. Soltanto, io uso qui per le derivate covarianti (secondo Schouten, *Der Ricci Kalkül*, Berlin, Springer, 1924, p. 63) il simbolo $\nabla\lambda$; e sopprimo il segno Σ.

Digitized by Google

se $F_2 = \varphi_2$, $F_3 = \varphi_3$, cioè se F_2, F_3 sono le forme *normali* di Fubini di σ [3] si ha

$$K = -\frac{1}{3} a^{\lambda\mu} \nabla_\mu \psi_\lambda . \quad (2) \quad [4]$$

La verifica di questa formula è agevole, se σ vien riferita a parametri asintotici; io ne indicherò ora una dimostrazione in coordinate generali, ottenuta col calcolo assoluto, dimostrazione che finora mancava [5]; e mostrerò anzi che la (2) vale anche se F_2, F_3 sono due *qualunque* forme differenziali (quadratica e cubica) apolari, indipendentemente da ogni normalizzazione. Sia questa dimostrazione, che alcune formule, come le (7), di cui mi valgo nel corso di essa, mi sembrano non prive di interesse. Esporrò poi, come conseguenze, alcune osservazioni relative alla curvatura totale di una superficie nella geometria metrica. In particolare mostrerò come la formula (2) del Čech equivalga a una formula (di geometria metrica) del Weatherburn, il cui significato è più semplice ed espressivo; questo renderà conto anche del fatto, apparentemente strano, che l'invariante $a^{\lambda\mu} \nabla_\mu \psi_\lambda$ non dipende affatto dal tensore $a_{\lambda\mu\nu}$ che figura nella formula (1) di definizione delle ψ^λ.

2. — Dalla (1), moltiplicandone i due membri per $\theta^{\omega\alpha} b^{\lambda\mu\nu}$ e sommando, abbiamo

$$\psi^\alpha = -\frac{1}{2\epsilon J} \theta^{\omega\alpha} \theta^{\tau\lambda} a_\tau^{\mu\nu} \nabla_\omega a_{\lambda\mu\nu} . \quad (3)$$

Ora si vede agevolmente che

$$\theta^{\omega\alpha} \theta^{\tau\lambda} = -\epsilon (a^{\omega\tau} a^{\alpha\lambda} - a^{\omega\lambda} a^{\alpha\tau}) ; \quad (4)$$

[3] Nella quale ipotesi ψ^λ ha anche un semplice significato geometrico: $\psi_\lambda D u^\lambda = 0$ dà le *linee canoniche* della superficie.

[4] Čech, Mem. cit. [1], p. 17; G. P. D., p. 315; ved. anche p. 497.

[5] Ved. Čech, Mem. cit. [1], p. 17.

Digitized by Google

ne consegue che la (3) può scriversi:

$$\psi^a = \frac{1}{2J}(a^{\omega\mu\nu}\nabla_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot a} - a^{a\mu\nu}\nabla_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\omega}) . \tag{5}$$

Da questa abbiamo

$$a^{a\tau}\nabla_\tau\psi_a = -a^{a\tau}\psi_a\frac{\nabla_\tau J}{J} +$$
$$+\frac{1}{2J}\Big\{\nabla_\tau a^{\omega\mu\nu}\nabla_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau} - \nabla_\tau a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau}\nabla_\omega a^{\omega\mu\nu} +$$
$$+ a^{\omega\mu\nu}\nabla_\tau\nabla_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau} - a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau}\nabla_\tau\nabla_\omega a^{\omega\mu\nu}\Big\} ,$$

ossia

$$a^{a\tau}\nabla_\tau\psi_a = -a^{a\tau}\psi_a\frac{\nabla_\tau J}{J} + \tag{6}$$
$$+\frac{1}{2J}\Big\{\nabla_\tau a^{\omega\mu\nu}\nabla_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau} - \nabla_\tau a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau}\nabla_\omega a^{\omega\mu\nu} +$$
$$+ a^{\omega\mu\nu}.(\nabla_\tau\nabla_\omega - \nabla_\omega\nabla_\tau) a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau}\Big\} .$$

Calcoliamo separatamente i tre termini entro parentesi:

$$\nabla_\tau a^{\omega\mu\nu}\nabla_\omega a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau} =$$
$$= \Big(\frac{1}{2}\frac{\nabla_\tau J}{J}a^{\omega\mu\nu} + \epsilon\,\theta_{\tau a}\psi^a b^{\omega\mu\nu}\Big)\Big(\frac{1}{2}\frac{\nabla_\omega J}{J}a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau} + \epsilon\,\theta_{\omega\varrho}\psi^\varrho b_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau}\Big) =$$
$$= -\frac{1}{4}a^{\omega\tau}\frac{\nabla_\omega J\nabla_\tau J}{J} + \psi^\tau\nabla_\tau J - a_{\omega\tau}\psi^\omega\psi^\tau . J ,$$

$$-\nabla_\tau a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau}\nabla_\omega a^{\omega\mu\nu} =$$
$$= -a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau}a^{\omega\mu\nu}\Big(\frac{1}{2}\frac{\nabla_\tau J}{J} + \psi_\tau\Big)\Big(\frac{1}{2}\frac{\nabla_\omega J}{J} + \psi_\omega\Big) =$$
$$= \frac{1}{4}a^{\omega\tau}\frac{\nabla_\omega J\nabla_\tau J}{J} + \psi^\tau\nabla_\tau J + a_{\omega\tau}\psi^\omega\psi^\tau . J ,$$

$$a^{\omega\mu\nu}.(\nabla_\tau\nabla_\omega - \nabla_\omega\nabla_\tau) a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\tau} =$$
$$= a^{\omega\mu\nu}(R_{\tau\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot a}a_{a\nu}^{\cdot\cdot\tau} + R_{\tau\omega\nu}^{\cdot\cdot\cdot a}a_{\mu a}^{\cdot\cdot\tau} - R_{\tau\omega a}^{\cdot\cdot\cdot\tau}a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot a}) =$$
$$= 2a^{\omega\mu\nu}a_{\nu}^{\cdot\tau a}R_{\tau\omega\mu a} + J R_{\tau\omega}^{\cdot\cdot\omega\tau} ,$$

Digitized by Google

ove $R_{\dot{\tau}\dot{\omega}\mu}{}^{a}$ è il *tensore di curvatura* (o tensore di Riemann-Christoffel) della derivazione covariante ∇_λ, cioè, della forma $F_2 = a_{\lambda\mu}\, du^\lambda\, du^\mu$.

Ora: se $P_{\tau a}$ è un qualunque tensore del secondo ordine, o anche, un fattore, reale o ideale ([6]), di un tensore di ordine superiore, si ha:

$$(7) \qquad a_{\dot{\omega}\mu}{}^{\nu}\, a_{\dot{\nu}}{}^{\tau a}\, P_{\tau a} = \frac{J}{2} \left\{ a^{\tau a}\, P_{\tau a}\, a_{\omega\mu} - (P_{\omega\mu} + P_{\mu\omega}) \right\};$$

dunque

$$a^{\omega\mu\nu}\, a_{\dot{\nu}}{}^{\tau a}\, R_{\tau\omega\mu a} = \frac{J}{2} \left\{ a^{\tau a}\, a^{\omega\mu}\, R_{\tau\omega\mu a} - (R^{\omega}{}_{.\dot{\omega}\dot{\mu}}{}^{\mu} + R^{\mu}{}_{.\dot{\omega}\dot{\mu}}{}^{\omega}) \right\};$$

tenendo presente che $R_{\dot{\tau}\dot{\omega}}{}^{\omega\tau} = R = -2K$, ove K è la curvatura di F_2, mentre $R^{\omega}{}_{.\dot{\omega}\dot{\mu}}{}^{\mu} = 0$,

$$a^{\omega\mu\nu} \,.\, (\nabla_\tau \nabla_\omega - \nabla_\omega \nabla_\tau)\, a_{\dot{\mu}\dot{\nu}}{}^{\tau} = -\, 6\, JK.$$

Sostituendo nella (6) ai termini entro parentesi le espressioni trovate, abbiamo senz'altro la formula (2) di Čech, che può anche scriversi

$$(2^*) \qquad K = \operatorname{div}\left(-\ \frac{\psi}{3}\right),$$

ove la divergenza s'intende calcolata nella metrica definita da F_2 ([7]).

3. — Abbiamo dunque visto come la formula (2) o (2*) sussista indipendentemente da ogni normalizzazione. Ma v'ha di più: è evidente che pel sussistere della formula (2), in cui

---

([6]) Ved. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, p. 23.

([7]) Colgo quest'occasione per indicare una semplice dimostrazione, pure ottenuta col calcolo assoluto, di un'altra formula assai notevole di geometria proiettiva differenziale:

$$p_{\lambda\mu} - \pi_{\lambda\mu} = -\, a^{\omega\tau}\, \nabla_\tau\, a_{\lambda\mu\omega} = -\, a^{\omega\tau}\, a_{\lambda\mu\omega\tau}$$

(G. P. D., p. 307; cfr. la dimostrazione data a pp. 79-81, 306-307 di que-

Digitized by Google

le ψ^λ s'intendano date dalle (5), non è necessario che $a_{\lambda\mu}$, $a_{\lambda\mu\nu}$ siano proprio i coefficienti della 1ª e della 2ª forma fondamentale di Fubini della superficie σ; è sufficiente che $a_{\lambda\mu}$ sia un tensore simmetrico, posto a base di un calcolo differenziale assoluto su σ, e che $a_{\lambda\mu\nu}$ sia pure simmetrico e apolare ad $a_{\lambda\mu}$. Soltanto, si deve intendere escluso il caso banale in cui è nullo l'invariante di Pick $-J = \frac{1}{2} a^{\lambda\mu\nu} a_{\lambda\mu\nu}$, cioè, la forma cubica

---

st'opera. Per semplicità di scrittura e di confronto userò qui anche per le derivate covarianti la notazione di Fubini e Čech). Dalle equazioni fondamentali (G. P. D., p. 79)

$$x_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}^{\ \ \nu} x_\nu + a_{\lambda\mu} X + p_{\lambda\mu} x,$$

$$\xi_{\lambda\mu} = -a_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} \xi_\nu + a_{\lambda\mu} \Xi + \pi_{\lambda\mu} \xi$$

si ha subito

$$p_{\lambda\mu} - \pi_{\lambda\mu} = S(x_{\lambda\mu} \Xi - \xi_{\lambda\mu} X) = \frac{1}{2} a^{\omega\tau} S(x_{\lambda\mu} \xi_{\omega\tau} - \xi_{\lambda\mu} x_{\omega\tau}).$$

Ora è

$$x_{\lambda\mu} \xi_{\omega\tau} - \xi_{\lambda\mu} x_{\omega\tau} = (x_{\lambda\mu} \xi_{\omega\tau} - x_{\lambda\tau} \xi_{\omega\mu}) + (x_{\tau\lambda} \xi_{\mu\omega} - x_{\tau\omega} \xi_{\mu\lambda});$$

dalle formule (G. P. D., p. 70)

$$a_{\lambda\mu\omega} = -S \xi_\omega x_{\lambda\mu}, \qquad a_{\lambda\tau\omega} = -S \xi_\omega x_{\lambda\tau}$$

si ha poi derivando

$$a_{\lambda\mu\omega\tau} = -S \xi_{\omega\tau} x_{\lambda\mu} - S \xi_\omega x_{\lambda\mu\tau}, \quad a_{\lambda\tau\omega\mu} = -S \xi_{\omega\mu} x_{\lambda\tau} - S \xi_\omega x_{\lambda\tau\mu},$$

onde

$$S(x_{\lambda\mu} \xi_{\omega\tau} - x_{\lambda\tau} \xi_{\omega\mu}) = a_{\lambda\tau\omega\mu} - a_{\lambda\mu\omega\tau} - S \xi_\omega (x_{\lambda\mu\tau} - x_{\lambda\tau\mu}),$$

e tenendo presente che

$$x_{\lambda\mu\tau} - x_{\lambda\tau\mu} = R_{\tau\mu\lambda}^{\ \ \ \nu} x_\nu,$$

$$S(x_{\lambda\mu} \xi_{\omega\tau} - x_{\lambda\tau} \xi_{\omega\mu}) = a_{\lambda\tau\omega\mu} - a_{\lambda\mu\omega\tau} + R_{\tau\mu\lambda\omega}.$$

Analogamente

$$S(x_{\tau\lambda} \xi_{\mu\omega} - x_{\tau\omega} \xi_{\mu\lambda}) = a_{\tau\omega\mu\lambda} - a_{\tau\lambda\mu\omega} + R_{\omega\lambda\tau\mu}.$$

Infine si ha appunto

$$p_{\lambda\mu} - \pi_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} a^{\omega\tau} (a_{\lambda\tau\omega\mu} - a_{\lambda\mu\omega\tau} + a_{\tau\omega\mu\lambda} - a_{\tau\lambda\mu\omega}) =$$

$$= -a^{\omega\tau} a_{\lambda\mu\omega\tau}.$$

Digitized by Google

$F_3 = a_{\lambda\mu\nu}\, du^\lambda\, du^\mu\, du^\nu$ è proporzionale al cubo di un fattore lineare di $F_2 = a_{\lambda\mu}\, du^\lambda\, du^\mu$.

La conseguenza di ciò ha più interesse per la geometria *metrica* che per la geometria *proiettiva*: Su di una V_2 metrica, σ, prendiamo comunque un sistema triplo ∞^1 di linee apolari alle linee di lunghezza nulla. Indicato con $a_{\lambda\mu}$ il tensore fondamentale della metrica, con $a_{\lambda\mu\nu}\, du^\lambda\, du^\mu\, du^\nu = 0$ (ove potremo supporre che $a_{\lambda\mu\nu}$ sia *simmetrico*), l'equazione del sistema triplo ora detto, costruiamo (mediante le (5)) il corrispondente campo vettoriale ψ^λ. *L'espressione* $div\left(-\frac{\psi}{3}\right)$ *è una funzione scalare del punto variabile sulla superficie, del tutto indipendente dal sistema triplo* ∞^1 *di cui ci siamo serviti per calcolare* ψ^λ, *ed eguale alla curvatura totale* K *di* σ *nella metrica supposta.*

Evidentemente, possiamo anche dire che *la curvatura totale* K *di* σ *in un punto* P *è il rapporto tra il flusso di* $-\frac{\psi}{3}$ *uscente da un ciclo infinitesimo tracciato su* σ *e racchiudente il punto* P, *e l'area del ciclo.*

4. — Il risultato precedente può porsi sotto un'altra forma più semplice. Per questo, introduciamo anzitutto per brevità una notazione: Essendo ξ un qualunque vettore tangenziale a una V_2 metrica, σ, indichiamo con $\bar{\xi}$ il vettore (pure tangenziale a σ):

$$\bar{\xi}^\lambda = \epsilon\, a^{\lambda\mu}\, \theta_{\mu\nu}\, \xi^\nu \qquad \text{(cfr. G. P. D., p. 298)} \tag{8}$$

(*supplementare* a ξ): ortogonale a ξ, tale che sia $\bar{\xi}^2 = -\epsilon\, \xi^2$, e orientato in modo che sia, anche nel segno,

$$\theta_{\lambda\mu}\, \xi^\lambda\, \bar{\xi}^\mu = a_{\lambda\mu}\, \xi^\lambda\, \xi^\mu = \xi^2.$$

Dalle (8) risolvendo si ha

$$\xi^\lambda = \theta^{\lambda\mu}\, a_{\mu\nu}\, \bar{\xi}^\nu. \tag{8*}$$

Ciò premesso: sia w^λ un vettore unitario, funzione arbitraria del punto variabile su σ, e sia $a_{\lambda\mu\nu}\, du^\lambda\, du^\mu\, du^\nu = 0$ l'equazione differenziale del sistema triplo ∞^1, apolare alle linee di lunghezza nulla della metrica, a cui appartiene il sistema ∞^1 delle

Digitized by Google

linee (w), cioè, delle linee che hanno i vettori unitari w^λ come vettori tangenziali. Intenderemo ancora che $a_{\lambda\mu\nu}$ sia *simmetrico*. In particolare, sarà :

$$a_{\lambda\mu\nu}\, w^\lambda\, w^\mu\, w^\nu = 0. \tag{9}$$

Moltiplicando i due membri della (1) [8] per $w^\lambda\, w^\mu\, w^\nu$ e sommando, abbiamo

$$\nabla_\omega a_{\lambda\mu\nu} \,.\, w^\lambda\, w^\mu\, w^\nu = \bar{\psi}_\omega\, b_{\lambda\mu\nu}\, w^\lambda\, w^\mu\, w^\nu = \\ = \epsilon\, \bar{\psi}_\omega\, a_{\lambda\mu\nu}\, \bar{w}^\lambda\, w^\mu\, w^\nu \quad \text{(G. P. D., p. 299)},$$

cioè, per la (9),

$$-3\, a_{\lambda\mu\nu}\, \nabla_\omega w^\lambda \,.\, w^\mu\, w^\nu = \epsilon\, \bar{\psi}_\omega\, a_{\lambda\mu\nu}\, \bar{w}^\lambda\, w^\mu\, w^\nu. \tag{10}$$

Ora possiamo evidentemente porre

$$\nabla_\omega w^\lambda = a\, w_\omega\, w^\lambda + b\, \bar{w}_\omega\, w^\lambda + c\, w_\omega\, \bar{w}^\lambda + d\, \bar{w}_\omega\, \bar{w}^\lambda, \tag{11}$$

ove a, b, c, d sono quantità da determinare. Precisamente, abbiamo subito

$$\begin{cases} a = \nabla_\omega w^\lambda \,.\, w^\omega\, w_\lambda \quad , & b = -\epsilon\, \nabla_\omega w^\lambda \,.\, \bar{w}^\omega\, w_\lambda\,, \\ c = -\epsilon\, \nabla_\omega w^\lambda \,.\, w^\omega\, \bar{w}_\lambda\,, & d = \nabla_\omega w^\lambda \,.\, \bar{w}^\omega\, \bar{w}_\lambda\,. \end{cases} \tag{12}$$

Sostituendo l'espressione (11) nella (10) si ha

$$-\frac{\bar{\psi}_\omega}{3} = \epsilon\,(c\, w_\omega + d\, \bar{w}_\omega)\,,$$

onde

$$-\frac{\psi^\tau}{3} = c\, \bar{w}^\tau + \epsilon\, d\, w^\tau\,,$$

e sostituendo a c, d le espressioni (12),

$$-\frac{\psi^\tau}{3} = -\epsilon\, \nabla_\omega w^\lambda \,.\, w^\omega\, \bar{w}_\lambda\, \bar{w}^\tau + \epsilon\, \nabla_\omega w^\lambda\, \bar{w}^\omega\, \bar{w}_\lambda\, w^\tau. \tag{13}$$

---

[8] Ove intendiamo naturalmente che sia

$$b_{\lambda\mu\nu} = \theta^{\omega}_{\omega\nu}\, a_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\omega} \quad \text{(G. P. D., p. 301)}$$

Digitized by Google

Ora: è evidentemente

$$\nabla_\omega w^\lambda \,.\, w^\omega = \frac{\bar{d}\, w^\lambda}{d s_w} = \frac{\bar{w}^\lambda}{\rho_w}, \tag{14}$$

ove $\frac{\bar{d}}{d s_w}$ indica derivazione covariante, nel calcolo assoluto definito da $a_{\lambda\mu}$, lungo la linea (w) uscente dal punto considerato, ed $\frac{1}{\rho_w}$ è la curvatura geodetica di tale linea. Poi

$$\nabla_\omega w^\lambda \bar{w}^\omega \bar{w}_\lambda = - \nabla_\omega \bar{w}^\lambda \bar{w}^\omega w_\lambda , \tag{15}$$

perchè $\nabla_\omega (w \times \bar{w}) = 0$; indi, analogamente alle (14),

$$\nabla_\omega \bar{w}^\lambda \bar{w}^\omega = \frac{\bar{d}\, \bar{w}^\lambda}{d s_{\bar{w}}} = - \epsilon \frac{w^\lambda}{\rho_w} \tag{16}$$

[naturalmente, le linee $(\bar{w})$ sono le traiettorie ortogonali delle (w)]. Ne segue subito

$$\nabla_\omega w^\lambda \,.\, w^\omega \bar{w}_\lambda = - \frac{\epsilon}{\rho_w}, \quad \nabla_\omega w^\lambda \bar{w}^\omega \bar{w}_\lambda = \frac{\epsilon}{\rho_w} ,$$

e infine

$$- \frac{\psi^\tau}{3} = \frac{\bar{w}^\tau}{\rho_w} + \frac{w^\tau}{\rho_w} , \tag{17}$$

o anche

$$- \frac{\psi^\tau}{3} = \frac{\bar{d} w^\tau}{d s_w} - \epsilon \frac{\bar{d}\, \bar{w}^\tau}{d s_w} . \tag{18}$$

Le (17), oppure le (18), esprimono il vettore $\frac{-\psi}{3}$ in funzione di un (arbitrario) sistema doppio ortogonale di linee su σ. Precisamente, supposto per semplicità che σ sia a ds^2 definito, le (18) ci dicono che *il vettore* $\frac{-\psi}{3}$ *più generale, pel quale valga la formula* (2) *di Čech si ottiene come somma dei vettori di cur-*

Digitized by Google

vatura geodetica delle due linee, uscenti dal punto generico di σ, *di un qualunque doppio sistema ortogonale.*

Ritroviamo così, per tutt'altra via, il seguente risultato, già dato da C. E. Weatherburn (9): *La divergenza del vettore ottenuto, sommando i vettori di curvatura geodetica delle linee di un qualunque doppio sistema ortogonale tracciato su* σ *uscenti da un punto* P *generico della superficie è un invariante (metrico) scalare di questa, ed è uguale alla sua curvatura totale in* P.

Ricordiamo che la *curvatura media* della superficie nel punto P, rispetto ad una V_3 in cui essa s'intenda immersa, è invece *eguale al modulo del vettore, somma dei vettori di curvatura normale delle due linee di un qualunque sistema ortogonale di* σ *uscenti da* P (10).

5. — È interessante notare che, essendo ψ dato dalle (17), la verifica che $\operatorname{div}\left(-\frac{\psi}{3}\right) = K$ può ottenersi in modo semplicissimo, riducendosi alla nota formula di Liouville (11). Infatti: assumiamo le linee (w) e $(\overline{w})$ a linee coordinate v ($v =$ cost.) e u; avremo:

$$w_1 = \sqrt{E}\,, \quad w_2 = 0\,; \quad \overline{w}_1 = 0\,, \quad \overline{w}_2 = \sqrt{G}\,;$$

$$ds_w = \sqrt{E}\,du\,, \quad ds_{\overline{w}} = \sqrt{G}\,dv\,;$$

$$\frac{1}{\rho_w} = \frac{1}{\rho_v}\,, \quad \frac{1}{\rho_{\overline{w}}} = \frac{1}{\rho_u}\,.$$

Dunque la (2*) darà:

---

(9) C. E. Weatherburn, *Some new theorems in geometry of a surface.* (" The Mathematical Gazette ", vol. 13, 1926, pp. 1-6); oppure *Differential Geometry of three dimensions* (Cambridge, " University Press ", 1927), p. 248.

(10) Ved. più in generale, per una V_m in V_n, Struik, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie* (Berlin, Springer, 1922), p. 97. — Pel caso di una V_2 in R_l (spazio euclideo) questo risultato è pure compreso nell'enunciato del Weatherburn.

(11) Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, 3ª ediz., vol. I, p. 271.

Digitized by Google

$$K = \operatorname{div}\left(\frac{w}{\rho_w} + \frac{w}{\rho_{\bar{w}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_u}\right) + \frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_v}\right) - \left(\frac{1}{E}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \frac{1}{G}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\right)\frac{\sqrt{E}}{\rho_u} -$$

$$- \left(\frac{1}{E}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} + \frac{1}{G}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\right)\frac{\sqrt{G}}{\rho_v} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}\right)\right\}.$$

e questa è appunto, scritta per un sistema coordinato curvilineo ortogonale, la formula di Liouville.

Bologna, febbraio 1928. — R. Università.

Digitized by Google

Geodetiche delle rigate sviluppabili generiche e delle superficie coniche.

Nota di ANGELO PENSA
presentata dal Socio nazionale resid. Tommaso Boggio.

Le *geodetiche* di una superficie sviluppabile si ottengono come linee aventi per trasformate delle rette nello sviluppo della superficie su un piano.

Il caso in cui la superficie sviluppabile sia un cilindro è ovvio: essa ha per geodetiche le *eliche*.

Ci occuperemo del caso in cui la sviluppabile sia il *luogo delle tangenti ad una linea sghemba*, od in particolare sia una *superficie conica*.

Con procedimento unico dedurremo le formole fondamentali per lo studio delle *geodetiche* sia sulle rigate sviluppabili generiche, che sulle superficie coniche, ritrovando proprietà note, insieme ad altre (n^i 2, 3, . . . , 10).

La considerazione di un punto particolare (M) sulla generatrice di una rigata sviluppabile generica (n. 11), intimamente collegato col punto Q descrivente la geodetica, permette di dimostrare per le rigate sviluppabili generiche alcune proprietà nuove (n^i 11, 12, 13), dalle quali se ne ricavano, come casi particolari, delle altre (n^i 14, 15) per le geodetiche sulle superficie coniche. Due di queste ultime proprietà, e precisamente quelle espresse dalle formole (32) e (33′), già note [cfr. nota (11)], risultano ora essere casi particolari di proprietà più generali, ottenute in questa nota, per le rigate sviluppabili generiche.

Digitized by Google

1. — Il punto P descriva una linea sghemba di arco s, della quale siano ρ e τ i raggi di curvatura e di torsione, e siano $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ i soliti tre vettori unitari paralleli alla *tangente*, alla *normale principale* ed alla *binormale* della curva in P [1].

Una *rigata sviluppabile generale* si può considerare descritta da $\boldsymbol{Pt}$, cosicchè l'espressione del suo punto generico sarà

$$Q = P + x\boldsymbol{t}, \tag{1}$$

funzione di s e di x. Per $s =$ cost. si hanno le generatrici della rigata; per $x =$ cost. si hanno linee particolari della superficie stessa [2].

2. — Sia V un punto fisso dello spazio, e sia C una curva sghemba il cui arco sia s, e siano $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ tre vettori paralleli alla tangente, alla normale principale ed alla binormale di C in un suo punto generico; ρ, τ il raggio di curvatura e quello di torsione nel punto considerato di C.

Allora, indicando con x una variabile indipendente, il punto

$$Q = V + x\boldsymbol{t} \tag{2}$$

(ove $\boldsymbol{t}$ è funzione di s) rappresenta il punto generico di una superficie conica di vertice V, e le cui generatrici sono parallele alle tangenti della curva C.

---

[1] Cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Elementi di Calcolo vettoriale*, 2ª ediz. (Bologna, Zanichelli), p. 123, formole (1).

[2] Supponendo $x =$ cost., e derivando $Q = P + x\boldsymbol{t}$, si ha:

$$Q' = \boldsymbol{t} + (x/\rho)\,\boldsymbol{n},$$

e quindi:

$$(P + \rho\boldsymbol{n} - Q) \times Q' = (\rho\boldsymbol{n} - x\boldsymbol{t}) \times [\boldsymbol{t} + (x/\rho)\,\boldsymbol{n}] = x - x = 0,$$

cioè: *le linee descritte da* $Q = P + x\boldsymbol{t}$, *con* $x =$ *cost., sulla rigata sviluppabile, hanno il piano normale in* Q *passante per il centro di curvatura* $P + \rho\boldsymbol{n}$ *della linea* P.

Digitized by Google

Per $s = \text{cost.}$ si hanno i punti di una generatrice; per $x = \text{cost.}$ si hanno i punti di una linea sferica, traiettoria ortogonale delle generatrici.

3. — La rigata sviluppabile generale, considerata al n. 1, si svilupperà su un piano, assumendo su questo una linea P_1 avente lo stesso arco s della linea P, e nel punto P_1 la stessa curvatura $1/\rho$ che la sua corrispondente ha nel punto P (3).

Allora, indicando con $\boldsymbol{t}_1$ un vettore unitario, parallelo alla tangente in P_1 alla curva, assumeremo come corrispondente del punto (1) della rigata, il punto

$$Q_1 = P_1 + x\boldsymbol{t}_1 \tag{3}$$

della rappresentazione piana.

Se ora supponiamo x funzione di s, cioè supponiamo che Q_1 descriva una curva nel piano, avremo, derivando rispetto ad s:

$$Q_1' = (1 + x')\,\boldsymbol{t}_1 + (x/\rho)\,\boldsymbol{n}.$$

E indicando con $\boldsymbol{k}$ un vettore unitario, arbitrario (costante), parallelo al piano di rappresentazione, si potrà porre:

$$\boldsymbol{t}_1 = e^{i\varphi}\boldsymbol{k}, \quad \text{da cui} \quad d\varphi/ds = 1/\rho. \tag{4}$$

E quindi

$$Q' = (1 + x')\,e^{i\varphi}\boldsymbol{k} + (x/\rho)\,e^{i\varphi}\,i\boldsymbol{k}. \tag{5}$$

Se ora supponiamo che Q_1 descriva una retta normale a $\boldsymbol{k}$ (4), sarà:

$$Q_1' \times \boldsymbol{k} = 0, \tag{6}$$

---

(3) C. Burali-Forti, *Geometria analitico-proiettiva* (Torino, G. B. Petrini), 2ª ediz., 1926, n. 170.

Cfr. anche: E. Cesàro, *Lezioni di Geometria intrinseca* (Napoli, 1896), IX, n. 13, *d)*, p. 138.

(4) Con questa ipotesi, che la retta descritta da Q_1 sia normale a $\boldsymbol{k}$, non si toglie nulla alla generalità della questione, perchè, essendo $\boldsymbol{k}$ arbitrario, qualunque sia la retta descritta da Q_1, si può sempre scegliere $\boldsymbol{k}$ normale a questa retta.

Digitized by Google

cioè:

$$(1 + x')\cos\varphi - (x/\rho)\operatorname{sen}\varphi = 0\,; \tag{7}$$

e allora il corrispondente punto Q della rigata descriverà una *geodetica* di questa, e per esso si avrà, dalle (1):

$$Q' = \boldsymbol{t} + x'\boldsymbol{t} + (x/\rho)\boldsymbol{n} = (1 + x')\boldsymbol{t} + (x/\rho)\boldsymbol{n}\,,$$

e, in virtù della (7), risulterà:

$$Q' = x\,(\operatorname{sen}\varphi\,.\,\boldsymbol{t} + \cos\varphi\,.\,\boldsymbol{n})/(\rho\cos\varphi). \tag{8}$$

Il vettore entro parentesi, cioè $\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{t} + \cos\varphi\,\boldsymbol{n}$, giace nel piano osculatore alla curva in P, è unitario ed è inclinato di φ su $\boldsymbol{n}$.

4. — Se nelle (3) si sostituisce al punto P_1, variabile con s, un punto fisso O del piano di rappresentazione, e si indica ancora con $\boldsymbol{k}$ un vettore unitario, arbitrario e costante del piano stesso, si potrà assumere il punto

$$Q_1 = O + x\,e^{i\varphi}\boldsymbol{k}\,. \tag{9}$$

con x funzione dell'arco s della curva C considerata al n. 2, e colla condizione (4), per rappresentare in questo piano il punto (2) della superficie conica considerata al n. 2 stesso.

Ripetendo pel punto (9) quanto si è fatto pel punto (3) nel n° precedente, si otterrà che, affinchè il punto Q, dato dalla (2), descriva una *geodetica* della superficie conica, dovrà x soddisfare alla equazione differenziale, corrispondente alla (7),

$$x'\cos\varphi - (x/\rho)\operatorname{sen}\varphi = 0\,, \tag{10}$$

e si dedurrà per Q' l'espressione

$$Q' = x\,(\operatorname{sen}\varphi\,.\,\boldsymbol{t} + \cos\varphi\,.\,\boldsymbol{n})/(\rho\cos\varphi)\,,$$

dello stesso tipo della (8).

Digitized by Google

5. — La (1) si può dunque considerare come l'espressione tanto del punto generico Q della *sviluppabile generale,* quanto del punto generico Q della *superficie conica,* bastando, per passare dal primo al secondo caso, sostituire nella (1) al punto P, variabile con s, un punto fisso V.

E affichè Q descriva una geodetica di una delle due superficie, *rigata generale,* o *superficie conica,* deve la x soddisfare alla equazione differenziale:

$$(11) \qquad (\mu + x') \cos\varphi - (x/\rho) \operatorname{sen}\varphi = 0,$$

ove è $\mu = 0$ pel caso della superficie conica, e $\mu = 1$ pel caso della sviluppabile generale; essendo inoltre

$$(12) \quad d\varphi = \rho^{-1} ds, \quad \text{ossia} \quad \varphi = \varphi_0 + \int \rho^{-1} ds, \quad (\varphi_0 = \text{cost.}).$$

L'equazione differenziale (11) si integra subito osservando che:

$$(x \cos\varphi)' = x' \cos\varphi - (x/\rho) \operatorname{sen}\varphi.$$

Si ha quindi, di qui e dalla (11):

$$d(x \cos\varphi) = -\mu \cos\varphi \, ds,$$

da cui, indicando con x_0 una costante arbitraria, si ottiene:

$$(13) \qquad x = (x_0 - \mu \int \cos\varphi \, ds) / \cos\varphi,$$

che, per $\mu = 0$ dà l'integrale della (10), e per $\mu = 1$ dà quello della (7) [5].

Perciò l'espressione del punto Q che descrive una geodetica della rigata sviluppabile generale (1), o della superficie conica (2), è:

$$(13') \qquad Q = P + (1/\cos\varphi) \cdot (x_0 - \mu \int \cos\varphi \, ds) \, \boldsymbol{t},$$

---

[5] Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa, 1902), vol. I, p. 30.

Digitized by Google

essendo rispettivamente $\mu = 1$ per la prima superficie, e $\mu = 0$ per la seconda. In questo secondo caso, però, posto $\mu = 0$, si sostituirà pure, nella (13'), al punto variabile P, il vertice fisso V della superficie conica, cosicchè, per questa, la (13') diverrà:

$$Q = V + (x_0/\cos\varphi)\, t. \tag{13''}$$

Poichè l'espressione di φ data dalla (12) contiene la costante φ_0, l'espressione di x, tanto per $\mu = 0$ che per $\mu = 1$, conterrà due costanti arbitrarie, cioè x_0 e φ_0. Dalle stesse costanti dipenderanno le espressioni (13') e (13'') di Q.

Indicheremo perciò con $G(x_0, \varphi_0)$ la geodetica descritta da Q, tanto nel caso della superficie sviluppabile generale, che nel caso della superficie conica.

6. — Indichiamo con s_g, ρ_g, τ_g, $\boldsymbol{t}_g$, $\boldsymbol{n}_g$, $\boldsymbol{b}_g$ gli elementi della *geodetica* $G(x_0, \varphi_0)$ descritta da Q.

Dalla (8), osservando che $Q' = \frac{dQ}{ds_g}\frac{ds_g}{ds}$, risulta che

$$\frac{ds_g}{ds} = \epsilon \frac{x}{\rho \cos\varphi}, \tag{14}$$

ove $\epsilon = \frac{x\cos\varphi}{\mathrm{mod}\,(x\cos\varphi)}$, cioè ϵ è il segno di $\frac{x}{\rho\cos\varphi}$.

Risulta ancora che

$$\boldsymbol{t}_g = \frac{dQ}{ds_g} = Q'\frac{ds}{ds_g} = \epsilon\,(\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{t} + \cos\varphi\,\boldsymbol{n}). \tag{15}$$

Derivando $\boldsymbol{t}_g$ rispetto ad s_g si ha:

$$\frac{1}{\rho_g}\boldsymbol{n}_g = \epsilon \cdot \epsilon \frac{\rho\cos\varphi}{x}\frac{d}{ds}(\mathrm{sen}\,\varphi \cdot \boldsymbol{t} + \cos\varphi\,\boldsymbol{n}) =$$

$$= \frac{\rho\cos\varphi}{x}\left(\frac{1}{\rho}\cos\varphi\,\boldsymbol{t} + \frac{1}{\rho}\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{n} - \frac{1}{\rho}\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{n} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho}\cos\varphi\,\boldsymbol{t} - \frac{1}{\tau}\cos\varphi\,\boldsymbol{b}\right) = -\frac{\rho\cos^2\varphi}{x}\cdot\frac{1}{\tau}\boldsymbol{b},$$

Digitized by Google

da cui, indicando con ϵ' il segno di $\frac{\rho}{x\tau}$, potremo scrivere:

$$\frac{1}{\rho_g} = \text{mod}\,\frac{\rho\cos^2\varphi}{x\tau} = \epsilon'\frac{\rho\cos^2\varphi}{x\tau}, \tag{16}$$

ed anche (cosa, del resto, evidente) [6]:

$$\boldsymbol{n}_g = \epsilon'\boldsymbol{b}. \tag{17}$$

Osservando che $\boldsymbol{b}_g = \boldsymbol{t}_g \wedge \boldsymbol{n}_g$, si ottiene:

$$\boldsymbol{b}_g = \epsilon(\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{t} + \cos\varphi\,\boldsymbol{n}) \wedge \epsilon'\boldsymbol{b} = \epsilon\epsilon'(\cos\varphi\,\boldsymbol{t} - \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{n}). \tag{18}$$

Derivando $\boldsymbol{b}_g$ rispetto ad s_g si ha:

$$\frac{1}{\tau_g}\boldsymbol{n}_g = \epsilon\epsilon'\left(-\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{t} + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\,\boldsymbol{n} - \frac{1}{\rho}\cos\varphi\,\boldsymbol{n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{t} + \frac{1}{\tau}\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{b}\right)\frac{ds}{ds_g} =$$

$$= \epsilon\epsilon'\frac{\rho\cos\varphi}{\epsilon x}\cdot\frac{1}{\tau}\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{b} = \frac{\rho\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{x\tau}\boldsymbol{n}_g,$$

da cui:

$$\frac{1}{\tau_g} = \frac{\rho\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{x\tau}. \tag{19}$$

Dalle (16) e (19) si ricava:

$$\rho_g/\tau_g = \epsilon'\operatorname{tg}\varphi. \tag{20}$$

7. — Se fosse $\rho_g/\tau_g = \text{cost.}$, la geodetica $G(x_0, \varphi_0)$ descritta dal punto Q sarebbe un'elica [7]. Ma l'ipotesi $\rho_g/\tau_g = \text{cost.}$ equivale, per la (20), all'ipotesi $\varphi = \text{cost.}$, da cui, per la (4),

---

[6] La rigata essendo descritta da Pt, sarà $\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}$ la giacitura del piano tangente lungo la generatrice Pt, e quindi la normale in Q alla geodetica, normale diretta secondo $\boldsymbol{n}_g$, è parallela al vettore $\boldsymbol{b}$, diretto secondo la normale in Q alla rigata, ciò che appunto è espresso dalla (17).

[7] C. Burali-Forti, *Geometria analitico-proiettiva*, p. 118, n. 148, *b)*.

Digitized by Google

si ottiene $1/\rho = 0$, e allora *è una retta tanto la linea P considerata al n. 1, che la linea C considerata al n. 2.*

E quindi tanto la rigata considerata al n. 1, quanto la superficie conica del n. 2, si ridurrebbero ad una retta. Escludendo quindi questo caso, si può concludere che:

Sopra una rigata sviluppabile generale o sopra una superficie conica il cui vertice sia un punto proprio (8), *una geodetica non può mai essere un'elica.*

8. — Se fosse $\rho/\tau = \text{cost.}$, la curva P sarebbe un'elica, e la rigata Pt sarebbe un *elicoide sviluppabile*, mentre la superficie generata da Vt sarebbe una *superficie conica circolare.*

9. — Nel caso di una *superficie conica* l'espressione di x, che si ottiene dalla (13) per $\mu = 0$, è $x = x_0/\cos\varphi$.

Allora le (16) e (19) diventano:

$$(21) \qquad \rho_g = \epsilon' \frac{a}{\cos^3\varphi}, \qquad \tau_g = \frac{a}{\cos^2\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi}, \qquad \text{ove} \quad a = \frac{x_0\tau}{\rho} = \text{cost.}$$

Da queste si ricava:

$$(\alpha) \qquad a^2\rho_g^2 + a^2/\tau_g^2 = \cos^4\varphi,$$

od anche, eliminando φ:

$$(\beta) \qquad a^2(\rho_g^2/\tau_g^2 + 1)^3 = \rho_g^2.$$

10. — Essendo, per le (15):

$$\boldsymbol{t}_g = \epsilon(\operatorname{sen}\varphi\, \boldsymbol{t} + \cos\varphi\, \boldsymbol{n}),$$

risulta:

$$\boldsymbol{t}_g \times \boldsymbol{t} = \epsilon \operatorname{sen}\varphi = \epsilon \cos(\pi/2 - \varphi) = \cos(\pi/2 - \epsilon\varphi),$$

cioè: *l'angolo dei due vettori* $\boldsymbol{t}_g$ *e* $\boldsymbol{t}$ *è* $\pi/2 - \epsilon\varphi$.

---

(8) Perchè l'espressione di Q data al n. 2 ha significato solo se V vertice del cono, è un punto proprio.

Digitized by Google

Indicando con α il piano normale in Q a t_g (il quale sarà normale al piano osculatore in P alla curva descritta da questo punto), e con P_a la proiezione ortogonale di P su α, si dimostra subito ora che:

$$\text{mod}\,(Q - P_a) = \text{mod}\,[x_0 - \mu \int \cos\varphi\, ds]. \tag{22}$$

Infatti, poichè

$$\text{mod}\,(Q - P_a) = \text{mod}\,(Q - P)\,.\,\text{mod}\cos\varphi\,,$$

si avrà, per la (13'):

$$\text{mod}\,(Q - P_a) = \text{mod}\,[x_0 - \mu \int \cos\varphi\, ds]\,,$$

che è *il modulo della proiezione di* $Q - P$ *sul piano normale in* Q *alla geodetica* $G(x_0, \varphi_0)$ *descritta da questo punto.*

E sarà:

$$\text{mod}\,(P - P_a) = \text{mod}\,(x \operatorname{sen}\varphi) = \tag{23}$$
$$= \text{mod}\,[\operatorname{tg}\varphi\,(x_0 - \mu \int \cos\varphi\, ds)]$$

la distanza di P *dal piano* α *normale in* Q *alla geodetica* $G(x_0, \varphi_0)$ *considerata.*

Infine, siccome $\pi/2 - \epsilon\varphi$, come si è notato dianzi, è l'angolo di t_g e t, risulta dalle (23) che *i punti* Q *pei quali il piano* α *contiene la generatrice* Pt, *cioè quelli per cui* t_g *è normale a* t, *sono i punti pei quali è* $\varphi = 0$.

11. — Sulla generatrice Pt si consideri il punto

$$M = Q + \frac{\mu}{\cos\varphi} \int \cos\varphi\, ds\,.\,t\,, \tag{24}$$

ossia

$$M = P + (x_0/\cos\varphi)\,t. \tag{25}$$

Per ciascuna posizione di Q sulla geodetica $G(x_0, \varphi_0)$ della rigata sviluppabile generale, la (24) ci dà un punto M che appartiene alla medesima generatrice della rigata a cui appartiene Q.

Digitized by Google

Il punto M, dipendente da x_0 e φ_0, al variare di Q sulla geodetica anzidetta, descrive sulla rigata sviluppabile una linea che diremo *linea* $M(x_0, \varphi_0)$ *corrispondente alla geodetica* $G(x_0, \varphi_0)$. E chiameremo *corrispondenti* due loro punti Q ed M quando stanno su una medesima generatrice della rigata [cioè quando sono legati dalla relazione (24)].

Dalla (24) risulta che se $\mu = 0$, cioè *se la rigata sviluppabile è una superficie conica* (e allora P è fisso e coincide col vertice V del cono), *si ha*

$$M = Q,$$

ossia la linea $M(x_0, \varphi_0)$ *coincide colla geodetica* $G(x_0, \varphi_0)$ *descritta dal punto* Q *della superficie conica* [come risulta anche ponendo nella (25) $P = V$, e confrontando il risultato con la (13'')].

È noto che, siccome l'espressione (13) di x è indipendente dalla torsione $1/\tau$ della linea P, se si deforma questa linea, e conseguentemente la rigata sviluppabile formata dalle sue tangenti, senza alterare la flessione $1/\rho$ della linea P, le geodetiche della rigata si deformano anch'esse, trasformandosi però nelle geodetiche della superficie così deformata (9).

Analogamente, poichè l'espressione (25) di M non dipende neppure essa dalla torsione $1/\tau$ della linea P, ne risulta che nella deformazione dianzi considerata della superficie sviluppabile anche *le linee* M *si deformano, trasformandosi però nelle linee* M *relative alle geodetiche della superficie deformata.*

12. — Consideriamo, sulle linee corrispondenti $G(x_0, \varphi_0)$ ed $M(x_0, \varphi_0)$ della rigata, due punti corrispondenti Q ed M, e sia β il piano per M parallelo al piano α normale in Q alla geodetica $G(x_0, \varphi_0)$, e sia P_3 il piede della perpendicolare tracciata da P su β.

Dalla (25) risulta:

$$M - P = (x_0 / \cos\varphi)\, t,$$

(9) Cfr. L. Bianchi, loc. cit.

Digitized by Google

e quindi *la distanza di P da* β *sarà*:

$$\text{(26)} \qquad \text{mod}\,(P_\beta - P) = \text{mod}\,(x_0 \operatorname{tg}\varphi).$$

Inoltre:

$$\text{(27)} \qquad \text{mod}\,(P_\beta - M) = \text{mod}\left(\frac{x_0}{\cos\varphi}\cos\varphi\right) = \text{mod}\,x_0\,,$$

cioè:

Se Pt è una generatrice di una rigata sviluppabile generale, e Q, M sono i punti in cui essa incontra una geodetica $G(x_0, \varphi_0)$ *della superficie e la corrispondente linea* $M(x_0, \varphi_0)$, *allora la proiezione di P sul piano per M normale alla tangente in Q alla geodetica considerata ha la distanza costante mod* x_0 *da M, al variare della generatrice Pt sulla rigata.*

13. — La relazione (20) si può scrivere, indicando con ϵ'' il segno di $\operatorname{tg}\varphi$, cioè il segno di $(x_0 \operatorname{tg}\varphi)/x_0$:

$$\text{(20')} \qquad \rho_g/\tau_g = \epsilon'\,(x_0 \operatorname{tg}\varphi)/x_0 = \epsilon'\,\epsilon''\,\text{mod}\,(1/x_0)\,.\,\text{mod}\,(x_0 \operatorname{tg}\varphi).$$

Da questa e dalla (26) risulta allora:

$$\text{(28)} \qquad \rho_g/\tau_g = \epsilon'\,\epsilon''\,\text{mod}\,(1/x_0)\,.\,\text{mod}\,(P_\beta - P)$$

ossia

$$\text{(28')} \qquad \rho_g = h\,\tau_g\,\text{mod}\,(P_\beta - P)\,, \quad \text{essendo} \quad h = \epsilon'\,\epsilon''\,\text{mod}\,(1/x_0).$$

Si ha quindi:

Fissato, su una generatrice Pt di una rigata sviluppabile generale, un punto Q di una geodetica $G(x_0, \varphi_0)$ *di questa, e determinato il corrispondente punto M [mediante la (24)], il raggio di curvatura della geodetica in Q è proporzionale al prodotto del suo raggio di torsione, nello stesso punto, per la distanza di P dal piano per M normale alla tangente in Q alla geodetica considerata.*

Digitized by Google

Sostituiamo nella (28) a mod x_0 il suo valore mod $(P_3 - M)$ dato dalla (27); ne risulterà la relazione:

$$\frac{\rho_g}{\tau_g} = \epsilon'\epsilon'' \frac{\text{mod}\,(P_3 - P)}{\text{mod}\,(P_3 - M)}.$$

Cioè *il rapporto fra il raggio di curvatura e quello di torsione nel punto Q della geodetica $G(x_0, \varphi_0)$ dianzi considerata è eguale (a meno del segno) al rapporto fra le distanze di P e di M dal piede P_3 della perpendicolare condotta da P al piano per M normale alla tangente in Q alla geodetica stessa.*

14. — Se supponiamo P fisso, la rigata diventa una superficie conica, e P ne sarà il vertice, $P = V$. Si ha allora $\mu = 0$ (cfr. i n^i 5 e 9).

In tale ipotesi le relazioni (16) e (19) si riducono alle (21) del n. 9, mentre non variano le (15), (17), (20).

Le (13) e (14) diventano:

$$x = x_0 \cos\varphi, \tag{13'''}$$

$$\frac{ds_g}{ds} = \epsilon \frac{x_0}{\rho \cos^2\varphi}. \tag{14}$$

Da quest'ultima, per la (4), si ha:

$$ds_g = \epsilon \frac{x_0}{\rho \cos^2\varphi} ds = \epsilon \frac{x_0}{\rho \cos^2\varphi} \rho\, d\varphi = \epsilon \frac{x_0}{\cos^2\varphi} d\varphi,$$

Di qui, integrando tra 0 e φ (e supponendo che sia $s_g = 0$ per $\varphi = 0$), si ha la relazione

$$s_g = \epsilon x_0 \,\text{tg}\,\varphi, \tag{29}$$

che dà la *lunghezza di un arco di geodetica $G(x_0, \varphi_0)$ su una superficie conica, tra i limiti 0 e φ della variabile.*

15. — Restando sempre nelle ipotesi del n° precedente ($\mu = 0$, e P fisso e coincidente con V), l'espressione del punto Q

Digitized by Google

è la (13''), coincidente con la (25) del punto M, quando in questa si sostituisca V a P.

Il piano β considerato al n. 12 coincide allora col piano α normale in Q alla geodetica $G(x_0, \varphi_0)$, e le (26), (27), (28') si cambiano rispettivamente nelle seguenti:

$$\text{mod}\,(V_a - V) = \text{mod}\,(x_0 \operatorname{tg}\varphi)\,, \tag{31}$$

$$\text{mod}\,(V_a - Q) = \text{mod}\, x_0\,, \tag{32}$$

$$\rho_g = h\,\tau_g\,\text{mod}\,(V_a - V) = h\,\tau_g\,\text{mod}\,(x_0 \operatorname{tg}\varphi). \tag{33}$$

La (31) per la (29) diventa

$$\text{mod}\,(V_a - V) = \text{mod}\, s_g \tag{31'}$$

e allora la (33) assume la forma:

$$\rho_g = h\,\tau_g\,(\text{mod}\, s_g). \tag{33'}$$

La (31') dice che: *la lunghezza dell'arco di geodetica* $G(x_0, \varphi_0)$ *descritta dal punto* Q *sopra una superficie conica, misurata a partire da* Q_0, *corrispondente a* $\varphi = 0$ [10] [*lunghezza data dalla* (29)] *è eguale, astraendo dal segno, alla distanza del vertice del cono dal piano normale in* Q *alla geodetica stessa.*

Le (32) e (33') dimostrano due note proprietà delle geodetiche sulle superficie coniche [11], proprietà che, come risulta dalle (27) e (28'), sono casi particolari di altre, valide per le geodetiche su una rigata sviluppabile generale.

Le proprietà espresse dalle (32) e (33') sono, rispettivamente:

a) *La proiezione del vertice del cono sul piano normale in* Q *ad una geodetica di esso, ha distanza costante da* Q;

b) *La lunghezza del raggio di curvatura di una geodetica*

---

[10] Vedansi le ultime linee del n. 10.

[11] Cfr. E. Cesàro, *Lezioni di Geometria intrinseca*, X, § 5, p. 144 (Napoli, 1896).

Digitized by Google

descritta da Q, su una superficie conica, è proporzionale al prodotto della lunghezza dell'arco s_g della geodetica (misurato a partire dal punto Q_0 corrispondente a $\varphi = 0$), per il raggio di torsione τ_g ([12]).

Torino, 15 marzo 1927.

([12]) Proprietà speciali relative alle geodetiche di un cono di rotazione sono esposte in: G. Loria, *Sobre las Geodésicas de un cono de Revolución*, " Revista Matematica Hispano-Americana „, n° 4 de 1925 (Toledo, 1925).

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Marzo 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Guidi, Parona Vice-Presidente, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Majorana, Pochettino, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario legge il verbale dell'adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente dà la parola al Socio Repossi per le Commemorazioni, a lui affidate dall'Accademia, dei Soci corrispondenti: Gustavo Tschermak, Paolo Von Groth ed Ettore Artini.

Il Socio Repossi, dopo di avere in una sintesi brillante ricordato le benemerenze scientifiche e le opere fondamentali dei due primi illustri mineralogi, in atto di devoto e deferente omaggio alla sua memoria, legge una commovente e commossa rievocazione dei meriti e delle opere del suo diletto Maestro Ettore Artini, scomparso troppo prematuramente a Milano il giorno 7 marzo del corrente anno. La dotta affettuosa Commemorazione termina fra gli applausi degli Accademici che si associano deferenti al doloroso rimpianto espresso dal Socio Repossi.

Il Presidente concede quindi la parola al Socio Somigliana, che presenta in dono alla Biblioteca Accademica il volume XV

Digitized by Google

degli *Atti della Società Italiana per il progresso delle scienze,* che riguarda il Congresso di Bologna dell'ottobre 1926.

Nel Primo Centenario della Fondazione dell'Osservatorio di Modena è il volume che l'Università di Modena offre alla nostra Accademia e che il Presidente presenta all'adunanza.

Il Vice-Presidente PARONA riferisce intorno ad un suo lavoro dal titolo: *Il Pliocene marino nel sottosuolo della pianura presso Novara.*

Il Socio REPOSSI presenta quindi una sua Memoria (che deve essere riguardata come complemento di quella prima comunicata dal Vice-Presidente PARONA): *Osservazioni mineralogiche sopra alcune sabbie del sottosuolo nel Novarese,* e ne discorre, facendo rilevare come le sue osservazioni, confermanti quelle del suo Maestro ARTINI per le trivellazioni di Milano, si accordino perfettamente e illustrino le conclusioni enunciate dal Socio Vice-Presidente PARONA nel precedente lavoro.

A questi Accademici succede il Socio SACCO, il quale presenta, per la inserzione negli *Atti*, una sua Nota dal titolo: *Impronte e figure fossili di pressione.* In detto lavoro l'Autore tratta di alcuni fenomeni di pieghettature, di fratturazioni, di stiramento e simili, dovuti a pressioni intense di varia natura e dei quali è fatta dall'Autore una breve descrizione appoggiata ad esempi osservati in varii terreni.

Digitized by Google

LETTURE

GUSTAVO TSCHERMAK - PAOLO von GROTH ETTORE ARTINI

commemorati dal Socio nazionale residente EMILIO REPOSSI

Sventura vuole che io debba commemorare nello stesso giorno tre grandi mineralogisti scomparsi nel giro di questi ultimi mesi, tutti e tre Soci Corrispondenti della nostra Accademia: Gustavo Tschermak, morto nello scorso giugno, Paolo von Groth, morto lo scorso dicembre, ed Ettore Artini, morto il 7 di questo mese. Gravi, gravissime perdite tutte, ma specialmente quest'ultima, e specialmente per noi, oltre ogni dire dolorosa, perchè, se i primi due hanno compiuto interamente il ciclo di una lunga e gloriosissima vita, rapitoci l'uno a novantuno e l'altro ad ottantacinque anni di età, si poteva ben sperare che la meravigliosa attività dell'Artini, strappatoci dopo dieci mesi di strazi a soli sessantun'anno, dovesse ancora a lungo ravvivare gli studi mineralogici italiani.

Gustavo Tschermak, nato nel 1836 a Littau in Moravia, e laureatosi a Vienna nel 1861, fu nominato nel 1868 direttore del Gabinetto Mineralogico Imperiale e professore in quell'Università, carica quest'ultima che più non lasciò fino al termine della sua carriera scientifica. Era Socio Corrispondente della nostra Accademia dal 1885.

La vastissima attività di questo studioso, che va a buon diritto annoverato fra i più insigni mineralogisti austriaci e del mondo, si svolse sia nel campo cristallografico, sia in quello della mineralogia pura e della petrografia, lasciando in ciascuno poderose e incancellabili tracce. Ma il nome dello Tschermak

Digitized by Google

è sopratutto affidato alla collana di studi ch'Egli genialmente condusse sulle principali famiglie di silicati naturali, partendo dal concetto che i termini di esse possano essere miscele isomorfe in varie proporzioni di silicati diversi. Quanto feconda di risultati sia stata questa ipotesi, ispirata oltrechè da una profonda conoscenza chimica di questi difficilissimi minerali, da un concetto eminentemente naturalistico, ognuno di noi sa. Applicata allo studio dei feldspati (1864), degli anfiboli e dei pirosseni (1871), delle miche (1877-78), della serie delle scapoliti (1883) e delle cloriti (1891), aperse in questo campo la via a tutte le indagini ed a tutti i progressi successivi, e sopratutto con la interpretazione della composizione e struttura dei feldspati, pienamente confermata dalla moltitudine delle indagini moderne sopra questi importantissimi tra i minerali delle rocce, segnò davvero una pietra miliare nel cammino della nostra scienza.

Orme profonde nello studio delle pseudomorfosi, in quello dei meteoriti, in quello delle rocce eruttive del territorio austriaco, lasciò pure la genialità dello Tschermak, che si fece sentire anche nel campo puramente didattico con la pubblicazione del suo celebre trattato di Mineralogia (1883), tradotto in italiano dal Grattarola, e la cui ultima edizione, curata dal Becke, risale al 1921.

Nel 1871 fondò le " Mineralogische Mitteilungen „ divenute dopo il 1877 le " Mineralogische und Petrographische Mitteilungen „, che col suo nome e per cura di un suo grande discepolo, il Becke, vanno tuttora publicandosi. Egli ne tenne la direzione fino al 1885, portandole ben presto al grado di uno dei più importanti e pregiati periodici della scienza nostra.

È noto a tutti come, dopo un così enorme lavoro, negli ultimi anni di sua vita, per le tristissime condizioni in cui la sua patria si trovò dopo la grande guerra, per Lui si dovesse ricorrere alla solidarietà materiale degli studiosi di tutto il mondo. Questi hanno allora risposto commossi al triste appello, e fu un vero plebiscito di riconoscenza, di affetto e di ammirazione per il grande scienziato; come oggi è di tutto il mondo il rimpianto per la sua scomparsa.

Digitized by Google

PAOLO VON GROTH nacque a Magdeburgo nel 1843, studiò a Freiberg, a Dresda ed a Berlino e nel 1842 fu nominato Professore a Strasburgo, dove fondò quell'istituto mineralogico e compose una importante collezione. Chiamato nel 1883 a Monaco di Baviera come professore di mineralogia e conservatore delle Collezioni scientifiche di Stato, riorganizzò completamente la ricca raccolta mineralogica a lui affidata e rese ben presto celebre il suo labotatorio, in cui furono ospitate intere falangi di allievi d'ogni nazione; tanto che si può ben dire che poche scuole come quella del Groth hanno dato mineralogisti a tutto il mondo. Era Socio Corrispondente della nostra Accademia dal 1898.

Si è detto a buon diritto ch'Egli, sia direttamente che indirettamente, ha avuto un'influenza profonda sui progressi della mineralogia degli ultimi cinquant'anni. A giustificare questa asserzione basterebbe ricordare che Egli fondò e diresse per quasi mezzo secolo quella " Zeitschrift für Kristallographie „, ch'è senza dubbio la più celebre fra le pubblicazioni periodiche della scienza nostra e che controllò — è questa la vera parola, — per lungo tempo la produzione cristallografica del mondo intero. Fra le opere sue che hanno avuto, e che hanno tuttora, una più larga e sicura efficacia sul progredire degli studi mineralogici vanno ricordate sopratutto la sua " Physikalische Kristallographie „ e quella monumentale " Chemische Kristallographie „ compiuta nel 1919, in cui Egli ha rimaneggiato ed ordinato l'enorme materiale cristallografico descrittivo che noi possediamo, fornendo una base ben solida per lo studio dei problemi strutturali sui quali si appuntano e si concentrano attualmente le osservazioni dei fisici, dei chimici e dei cristallografi.

Nè si può lasciar di ricordare che in questo modernissimo campo di indagine, apertoci dalla fortunatissima applicazione dei Raggi X allo studio dell'intima struttura dei cristalli, il Groth ha veduto confermata nel modo più brillante e completo la mirabile sua ipotesi, formulata sin dal 1904, che i cristalli siano costituiti da reticoli spaziali complessi, formati da reticoli semplici congruenti, tra loro intrecciati, nei quali i nodi sono oc-

Digitized by Google

cupati da atomi di uno stesso elemento. Le esperienze dei due Bragg hanno dimostrato in modo irrefutabile che la intuizione del Groth risponde alla realtà, nè potevano far meglio brillare tutta la genialità di Colui che tale intuizione aveva avuto.

È stato giustamente osservato che nell'opera e nella mente del Groth erano armonicamente sviluppati e conciliati i due indirizzi, in realtà solo apparentemente contrastanti, che possono avere gli studi mineralogici: l'indirizzo geologico-petrografico e quello chimico-fisico. Egli difatti, che amò e conobbe i minerali con senso prettamente naturalistico, che fu collezionista e direttore di collezioni appassionato ed eccellente, con la sua " Tabellarische Uebersicht der Mineralien „, coi suoi studi di mineralogia topografica e di petrografia descrittiva, contribuì potentemente al riordinamento sistematico dei minerali e delle collezioni, come pure alla conoscenza dei minerali nelle loro naturali giaciture e relazioni.

Poderoso lavoratore sin negli ultimi anni della sua lunga e gloriosa vita, nell'aprile del 1926 pubblicava una sintetica storia dello sviluppo delle scienze mineralogiche dal periodo aureo della loro pur recente fondazione sino alla fine del secolo XIX. In questa storia Egli avrebbe potuto a buon diritto annoverarsi fra i più grandi e venerati Maestri.

Ettore Artini, nacque a Milano nel 1866, si laureò in scienze naturali a Firenze, e dopo essere stato per qualche anno assistente di mineralogia all'Università di Pavia, nel 1893 occupò il posto di Direttore della sezione di Mineralogia nel Museo Civico di Storia Naturale di Milano, posto che tenne sino alla fine della sua vita, ed al quale, negli ultimi quindici anni, si aggiunse anche quello di Direttore Generale del Museo stesso. Insegnò per tutto questo periodo di tempo nel R. Politecnico di Milano e, da una data più recente o recentissima, nella R. Scuola Superiore Agraria e nella R. Università pure di Milano. Nè a questo solo si limitò la sua attività di docente, poichè, fra l'altro, tenne ogni anno nel Museo Civico brevi corsi di divulgazione scientifica, che, per le sue brillanti qualità oratorie e per la singolare chiarezza della sua mente, riuscirono

Digitized by Google

spesso veri modelli del genere. Era Socio Corrispondente della nostra Accademia dal 1918.

Con la pubblicazione di numerosissime note e memorie, di cui l'ultima comparve quando il morbo che doveva condurlo così immaturamente alla fine si era già impadronito di lui, lasciò una traccia profonda in tutti i campi delle scienze mineralogiche, dalla cristallografia alla mineralogia pura, alla petrografia.

La sua opera più poderosa, che reca per titolo " Ricerche petrografiche e geologiche sulla Valsesia „, iniziata in collaborazione col Melzi per la parte geologica, e poi condotta a termine e pubblicata da lui solo nel 1900, rappresenta ancor oggi la più magistrale e vasta illustrazione petrografica di una regione delle Alpi. E la fama, che questa opera gli procurò, di primo fra i petrografi italiani, conservata con successivi lavori, sempre, nel loro genere, perfetti, fu da ultimo riaffermata dalla pubblicazione di quel suo manuale " Le rocce „ che, sotto veste apparentemente modesta, costituisce il migliore trattato elementare di petrografia che sia mai uscito in Italia e uno dei migliori di questo genere che siano mai stati pubblicati nel mondo intero. Nel campo della mineralogia pura vanno di lui ricordate numerose monografie di specie minerali fra le più importanti, ed in particolare di minerali italiani, e la scoperta di tre specie nuove, tra le quali una di notevolissimo interesse perchè la più ricca che si conosca del raro elemento scandio.

Una speciale menzione fra i lavori di cristallografia pura, merita la serie degli studi sui derivati del benzolo, che sono fra i più organici e meglio condotti che siano comparsi in Italia.

Lo studio mineralogico sistematico delle sabbie, iniziato e portato a singolare perfezione dall'Artini, che in questo campo di indagine, tanto difficile e tanto importante per le sue applicazioni alla risoluzione di problemi geologici, ha preceduto anche gli stranieri, è un altro titolo di merito per Lui. Ed è degno di nota che il suo ultimo lavoro, chiaro, acuto, profondo come ogni altro, verta appunto sopra questo argomento: Egli, che pur dominava da Maestro sia nell'indirizzo chimico-cristallo-

Digitized by Google

grafico sia in quello geologico-petrografico della scienza nostra, era sopratutto un appassionato naturalista, ed animo prettamente naturalistico portava nell'indagine mineralogica, che voleva innanzi ad ogni altra cosa rivolto alla risoluzione di problemi naturali.

Ed è ancora nell'orecchio e nella mente di tutti coloro che hanno avuta la fortuna di udirla l'appassionata esortazione allo studio petrografico delle rocce sedimentari, che Egli faceva ai giovani nella perorazione di un suo magistrale discorso di apertura del Congresso Geologico del 1925. Questo campo di indagine, che si può dire fin qui appena sfiorato dai petrografi nostri, promette larga messe di importanti risultati a coloro che vi si avventureranno, e saranno risultati utili innanzi tutto alla geologia.

In quel discorso, che doveva, per nostra sventura, rimanere il suo testamento scientifico, additando ai giovani le vie nuove da seguire ed incitandoli ad un lavoro serio, diuturno, tenace, per portare sempre più innanzi la scienza italiana che ha tanto bisogno di nuove e valide energie, si metteva fra gli stanchi e i sorpassati. Ma tutti coloro che l'udivano, e che dalla sua parola chiara, incisiva, entusiastica sentivano trasparire un'inflessibile energia, e, più ancora, coloro che, come me, per lunghi anni avevano con Lui diviso il lavoro di ogni giorno ed avevano avuto ininterrotte testimonianze della sua attività mirabile, della stupefacente acutezza della sua mente, delle salde ed esuberanti doti del suo cuore, che gli si erano legati col più profondo ed indistruttibile affetto, potevano ben sperare che per lunghi anni ancora Egli, non stanco ed inerte, ma pieno di vita ed energia, dovesse guidare nuove reclute per le difficili vie della scienza nostra.

Digitized by Google

Impronte e figure fossili di pressione.

Nota del Socio nazionale residente FEDERICO SACCO

Nei loro lavori sul terreno i geologi hanno spesso occasione di osservare curiose forme di impressioni o di impronte che assumono talora aspetti così regolari da richiamare alla mente corpi organici. Ciò nelle formazioni di ogni età, dalle Pseudoldamie del Cambriano a speciali contorsioni delle argille glaciali recenti, ma specialmente nei terreni argilloso-calcarei o marnosi. Sembra opportuno richiamare l'attenzione su tali fenomeni onde giungere alla loro giusta interpretazione.

Ben note come impronte di pressione sono i *Ciottoli striati* o *le roccie striate in posto*, che rappresentano uno dei più caratteristici fenomeni del Glacialismo di tutte le epoche geologiche.

Le impronte di *goccie di pioggia*, con o senza grani di grandine, ma specialmente le infinite *impronte di passi, di strisciamenti,* ecc. (Icniti, Nemertiliti, ecc., ecc.) dei più svariati animali terrestri ed acquatici, costituiscono l'oggetto di tutto un gruppo speciale di ricerche, la cosidetta *Paleoicnologia* (a cui già portai un contributo una quarantina d'anni fa, in alcune " Note di Paleoicnologia italiana „, Milano, 1888); ramo della Paleontologia che però è in rapporto, per qualche parte, con diversi fenomeni di pressione, spesso di difficile, anzi affatto incerta, interpretazione.

Pure ben noti sono i cosidetti *Ciottoli improntati* i quali in parte debbonsi a fenomeni chimici di dissoluzione del calcare nei punti di arresto dell'acqua sotterranea per contatto fra ciottoli, ma essi sono pure in gran parte attribuibili a vera, intensa pressione; ciò che è spesso provato dal fatto che, in rapporto alla

Digitized by Google

impronta di pressione, sta tutto un complesso di fratture con o senza spostamento delle fratturate parti del ciottolo.

Di tali interessanti fenomeni di *ciottoli fratturati* già segnalai e figurai diversi esempi (nella Nota sopra *Les Conglomerats du Flysch*, Bruxelles, 1889) tratti da terreni eocenici ed oligocenici; che, per la loro relativa antichità, risentirono pressioni

Fig. 1.
Ciottolo di Serpentina schiacciato sino alla fratturazione (*Elreziano*, tra Superga e Baldissero torinese).

ben straordinarie durante i movimenti orogenetici; anzi tale fenomeno (tanto più se trattasi di ciottoli fratturati, colle loro parti spostate) può servire in certe regioni come un primo criterio cronologico nella distinzione dei diversi piani conglomeratici della serie terziaria.

Per darne un esempio presento la figura di un ciottolo di Serpentina (Fig. 1) che raccolsi nell'Elveziano inferiore della

Digitized by Google

Collina torinese, a nord di Croce Berton, tra Superga e Baldissero. La gigantesca pressione subìta da questo ciottolo, che pure è di Serpentina compatta (stato preso fra due altri ciottoli, probabilmente anche di Serpentina, roccia che predomina in quei conglomerati), vi produsse: sia due opposte zone depresse (di cui una larga e ben nettamente concava), sia la fratturazione multipla a linee subparallele con irregolari spostamenti delle parti, che vennero poi naturalmente ricementate.

Per altri esempi italiani ricordo le figure date dal prof. Bombicci nella sua nota *Sui Ciottoli improntati*, ecc. (" Mem. R. Acc. Bologna „, 1895), fenomeno segnalato per la prima volta in Italia dal prof. Capellini nella sua nota su *Conglomerato a ciottoli improntati* (" Rend. Ist. Bologna „, 1862) del Pliocene bolognese che, pel suo grande spessore, deve subire negli strati inferiori pressioni fortissime.

A fenomeni ben diversi, connessi generalmente colle azioni orogenetiche in gran parte appunto di pressione (oltre che di stiramento, ecc.) sono dovute numerose forme svariatissime di fratturazioni in ogni senso, modo e grandezza; dalla microscopica *struttura cataclastica* (*Mörtelstructure*, ecc.) delle roccie stritolate, *milonitizzate*, alle grandiose Litoclasi che possono originare per scorrimento o svariate dislocazioni, depressioni, gradinate orografiche e persino vallate montane; cioè tutto un complesso di fenomeni connessi coi Diastrofismi, spesso accompagnati da Dinamometamorfismo (che indica esistere nelle roccie una specie di plasticità la quale sembra aumentare in profondità per azione del calore, dell'acqua sotterranea, della pressione, ecc.) e che rappresentano spesso fatti assai estesi, quasi generali, in tutte le roccie che hanno subìto gigantesche pressioni orogeniche.

Infatti spesso i terreni, specialmente quelli un po' argillosi o comunque un po' teneri, in seguito alle potenti pressioni a cui furono soggetti, sono diventati schistosi, deformati per modo che i loro fossili si presentano pure stranamente stirati, compressi e deformati, come fu già altre volte segnalato specialmente per Trilobiti, Ammoniti, Pesci, ecc. Ne presento come esempio uno schisto ardesiaco, piritifero ed ammonitifero (*A. Deshayesi*), di

Digitized by Google

cui raccolsi parecchi campioni anni fa a Lugagna presso Lourdes nei Pirenei (Fig. 2).

Della schistosità acquisita veggonsi esempi, in grande ed in

Fig. 2.
Ammonite schiacciata, deformata e stirata in schisto ardesiaco.
(Lugagna presso Lourdes nei Pirenei).

piccola scala, in tutti i terreni di ogni età, quantunque talora si possa rimanere incerti se trattisi di schistosità acquisita per pressione oppure di schistosità originaria, cioè per sedimentazione; caso quest'ultimo che però è sovente accentuato dalla pressione, se, come spesso si verifica, questa è ortogonale alla vera stratificazione. Ad ogni modo la *Schistizzazione* costituisce uno dei più interessanti effetti della pressione su terreni più o meno teneri o plastici.

Digitized by Google

Presento come esempio di schistosità per pressione, che si direbbe tangenziale, una sezione naturale che osservasi in Valle Scrivia, poco a monte di Ronco, sulla sinistra della Valle presso la Strada Nazionale, nella parte superiore degli Argilloschisti alternanti cento volte con strati e straterelli calcarei, costituendo nell'assieme il passaggio dal Cretaceo sup. all'Eocene inf.

Quivi gli strati pendono nel complesso a N. E., ora dolcemente, ora fortemente, ora abbastanza regolari, ora contorti.

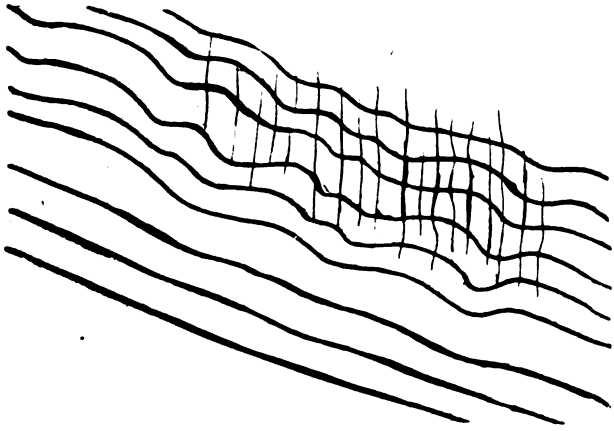


Fig. 3.

Schistosità (di pressione) quasi ortogonale all'andamento di strati calcareo-argillosi ondulati, compresi fra strati regolari (Sezione naturale sulla sinistra di Val Scrivia, poco a monte di Ronco Scrivia, presso la Strada Nazionale).

Appunto in una zona di strati calcareo-argillosi ondulati, compresi fra strati regolari, si può osservare una spiccata schistosità quasi ortogonale alla stratificazione, per modo da indicare una notevole (per quanto forse solo locale) spinta o pressione tangenziale (Fig. 3).

Talora poi le straordinarie pressioni possono originare, sempre specialmente su terreni argillosi, marnosi o fisicamente analoghi, anche cristallini, non solo laminazioni, ma anche speciali deformazioni, torsioni, pieghettature disposte, fra loro, sia in linee parallele sia anche in linee incrociate ad angolo retto o quasi.

Digitized by Google

Presento come esempio del primo caso un Serpentinoschisto

Fig. 4. — Serpentinoschisto laminato e ripieghettato.
(Comba di Rio Bert ad Ovest del Lago di Avigliana).

Digitized by Google

laminato, minutamente pieghettato, arricciato, che raccolsi recentemente nella Comba Ri Bert (ad Ovest di Avigliana) dove esso viene scavato per uso locale come tegulare (Fig. 4).

Pel secondo caso posso presentare la fotografia di un Cloriteschisto che raccolsi qualche anno fa, un 300 metri circa sotto il Colle d'Olen, scendendo verso Alagna; esso mostra una

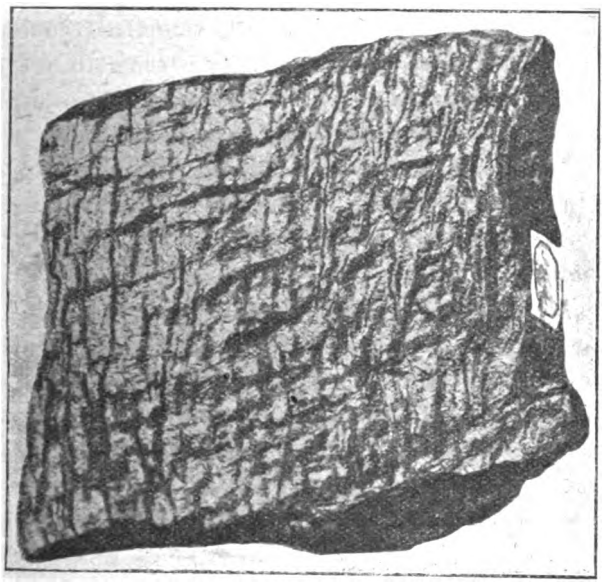


Fig. 5.
Cloriteschisto ripieghettato in due direzioni quasi ortogonali.
(Poco sotto il Colle d'Olen verso Alagna).

forte pieghettatura un po' irregolare in un senso, ed una piegatura o flessione più larga ed ondulata in senso quasi ortogonale al primo, in modo da costituire una specie di fenestratura (Fig. 5).

Del resto anche le forti pieghe ed i vari corrugamenti stratigrafici non sono sempre attribuibili a grandi pressioni tangenziali, cioè laterali, come generalmente si crede, ma spesso sono pure dovuti a vere pressioni verticali o quasi, più o meno locali.

Digitized by Google

Infatti molte volte ebbi ad osservare, in sezioni, specialmente nei terreni terziarii (forse perchè me ne occupai di più) certi strati (particolarmente argillosi, marnosi o altrimenti un po' teneri o, meglio, plastici) fortemente pieghettati od anche ampiamente corrugati, compresi fra banchi più compatti e resistenti ancora disposti colla loro stratificazione regolare, cioè coi piani orizzontali della sedimentazione originaria; ciò che indica trattarsi di fenomeni dovuti alla semplice pressione verticale che potè agire su certi depositi più sensibili, più plastici (ed in generale abbastanza potenti da permettere la libertà, direi, di tutti i ripiegamenti locali), e non già, come generalmente si pensa, a grandiose pressioni tangenziali che avrebbero dovuto agire su tutta la serie degli strati, corrugandoli in massa.

Probabilmente molti geologi rilevatori hanno potuto constatare tale curioso fenomeno, non di rado con differenze così spiccate tra banchi normali ed interposti strati corrugati da destare meraviglia; ne diedi già figure, tratte da disegni a mano e da fotografie, in una nota *Sopra alcuni fenomeni stratigrafici osservati nei terreni pliocenici dell'alta Valle padana* (" Atti R. Acc. Sc. Torino „, Vol. XX, 1885); fenomeni interessanti appunto perchè si tratta di strati anche molto complicatamente ed estesamente corrugati, compresi tra strati regolari, normali, rappresentanti i sedimenti marnoso-argillosi, quasi orizzontali, del Pliocene inferiore marino (*Piacenziano*).

Gli esempi più tipici li rifigurai (Tav. IV, fig. 76 e 90) nella nota sopra *Fenomeni stratigrafici osservati nell'Appennino sett. e centr.* (" Atti R. Acc. Sc. Torino „, Vol. XL, 1904) che fa parte del Volume generale descrivente *L'Appennino sett. e centr.* (Torino, 1904); una figura che interessa il caso in questione è pure la 91 di detto lavoro che anch'essa rappresenta pieghe originate da pressione *ab alto* nelle marne sabbiose plioceniche di Breolungi (Mondovì).

Pure in detta pubblicazione del 1904 è da notarsi la fig. 44, che corrisponde ad una Sezione naturale nei monti a Nord di Bagni di Lucca, perchè mostra il fenomeno in grande, il quale del resto si ripete infinite volte nella serie argilloschistosa dell'Ap-

Digitized by Google

pennino settentrionale; cioè che la potente formazione degli Argilloschisti, che io attribuisco al Cretaceo, è (appunto per la sua natura litologica dotata di notevole plasticità) spiccatamente ondulata, corrugata ed anche arricciata, mentre che tanto i sottostanti compatti terreni calcarei dell'Infracretaceo, quanto i sovrastanti banchi del Macigno eocenico sono rimasti in strati disposti ancora normali (per nulla piegati) e tra loro subparalleli.

Sempre nella stessa Nota del 1904 è riprodotta, colla Fig. 79, una figura di sezione naturale, osservabile sotto Cornioleto tra Urbania e Città di Castello, dove strati marnoso-schistosi fortemente piegati, monoclinalmente corrugati, giacciono sotto una pila di strati marnoso-arenacei regolarmente suborizzontali; per modo che il fenomeno riesce spiegabile colla pressione *ab alto*.

Notisi del resto che gran parte delle pieghe di carattere locale figurate in detto lavoro hanno origini analoghe e sono anche in parte spiegabili per imbibizione acquea (connessa alla natura argillosa) che, oltre a rigonfiarli, rammollisce certi strati e li rende più plastici, almeno in certi periodi di maggior abbondanza di acqua sotterranea, filtrante o di imbibizione (di cava).

Qui come esempio nuovo di queste pieghe di pressioni localizzate, segnalo un caso che osservai qualche anno fa, risalendo la Bormida di Cortemiglia, due chilometri circa a monte del paese di Gorzegno, sulla sinistra della Valle, presso il giro stradale al Bric della Guardia (382 m.). La sezione, alta 4 o 5 metri, che fiancheggia immediatamente lo stradone, mostra la solita serie di strati e banchi alternati di marne un po' sabbiose e di arenarie del Miocene medio-inferiore (Aquitaniano) delle Langhe; la stratificazione, regolarissima, mostra appena una dolce inclinazione verso N. N. O.

Il curioso è che fra due grossi banchi arenacei, regolarmente suborizzontali come tutto il resto della serie, appare, normalmente, perfettamente intercalata a detti banchi, una zona marnosa, a stratificazione tutta contorta, corrugata, arricciata, come ho schematicamente delineato a occhio (Fig. 6); spiacente di

Digitized by Google

non aver portato meco la macchina fotografica per misura prudenziale che viceversa mi riuscì quasi inutile (1).

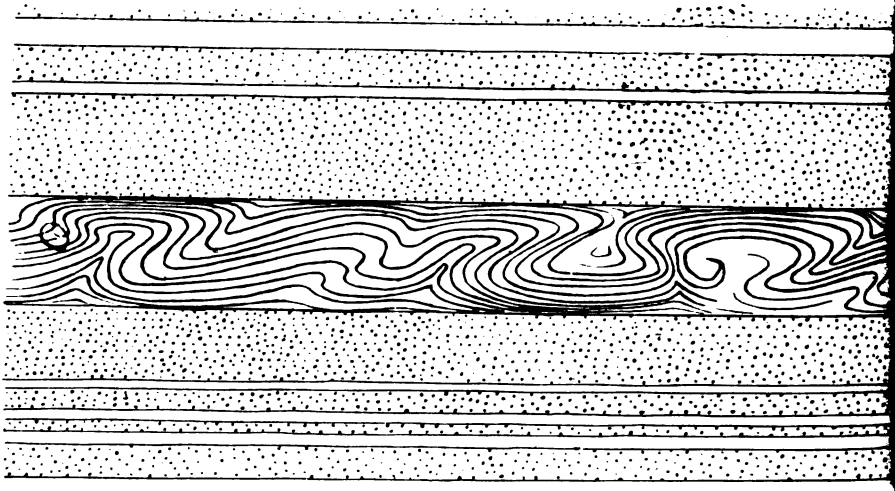


Fig. 6.
Zona marnosa schiacciato-contorta fra banchi arenacei dell'*Aquitaniano*.
(Sinistra di Val Bormida di Cortemiglia, a monte di Gorzegno).

Ad ogni modo risulta chiaro il distacco fra la zona disturbata e la regolarissima serie sedimentaria che la comprende. A questo proposito è da notarsi: 1° che la sezione esaminata (la quale giace ora a circa 370 m. s. l. m., mentre il relativo terreno fu depositato originalmente ad un centinaio di metri sotto il livello marino) trovasi in fondo valle a circa 500 metri sotto i vicini crinali collinosi; 2° che detta valle è di semplice erosione compiutasi in qualche milione d'anni dal Miocene ad oggi,

(1) Infatti, quattro ore dopo fatta l'osservazione ed il disegno qui riportato (il 15 giugno 1916) fui arrestato a Cengio (dove eravi un'importante fabbrica di materiale bellico) dai Carabinieri e poi dagli Agenti di Polizia, perquisito e trattenuto per tre ore, prima che, per l'intervento d'un Commissario superiore, abbia potuto essere messo in libertà, quantunque fossi munito di tutte le carte d'identificazione in regola.

Digitized by Google

per cui detti Colli sono solo il residuo attuale di una potente formazione già uniformemente estesa; 3° che durante detto lungo periodo di incisione valliva fu certamente anche abrasa tutta in generale la regione collinosa circostante per cui è probabile che in origine fossero 600 metri circa di terreni sedimentari giacenti e prementi sulla zona pieghettata in questione; 4° che il peso specifico delle marne ed arenarie, tanto più se un po' acquifere, come esse lo sono in generale, è di oltre 2,5, per cui la pressione esercitata dalla massa sedimentaria sulla zona contorta in questione potè essere, per milioni d'anni, di oltre 150 atmosfere.

Perciò la zona marnosa compresa fra i banchi arenacei della regione esaminata dovette subire per pieghettarsi, come oggi si presenta, una enorme pressione essenzialmente verticale piuttosto che tangenziale, giacchè l'intiera serie sedimentaria per un migliaio di metri di spessore e centinaia di chilometri di estensione si presenta perfettamente regolare, a stratificazione normale, suborizzontale, senza alcuna curvatura generale.

Analoghe discordanze fra zone pieghettate e contigua zona a stratificazione regolare si possono osservare in quel grande campione di Gneiss biotitico di Val Gesso che figurai nella Nota sopra *Fenomeni di corrug. negli Schist. crist. delle Alpi*, pubblicata in questi " Atti dell'Acc. Sc. di Torino „, vol. XLI, 1906, Fig. VIII.

Del resto la massima parte delle piccole pieghettature che veggonsi in natura e di cui diedi parecchie illustrazioni in detto lavoro non corrispondono alle grandi rughe orotettoniche ma a pieghettature locali che sono soltanto causate da pressioni limitate e da differenza di costituzione litologica, essenzialmente tra zone straterellate schistose, quindi pieghevoli, e zone, anche vicine, foggiate a grandi strati e banchi, quindi compatte, rigide, che si possono incurvare, ma non pieghettare.

Come esempio di tale differenza presento (Fig. 7) un grande campione (lungo metri 1,60) che proviene dalla zona calcarea argillosa che va ad immergersi in mare nelle vicinanze della stazione di Moneglia (Liguria) ed è ora conservato nel Museo geologico del Politecnico di Torino (N. d'Inv. 25.858). Lo strato,

Digitized by Google

Fig. 7. — Banchi calcarei piegati, ondulati e contigui schisti calcareo-argillosi ripieghettati e contorti.
(Presso la spiaggia di Moneglia, circa 300 m. a Nord della Stazione ferroviaria).

Digitized by Google

essenzialmente calcareo-silicifero compatto, denso (che appare nella parte centrale della figura) è solo incurvato, mostrando però nettamente le conseguenti fratture e lacerazioni (più o meno radiali o subortogonali alla stratificazione) riempite da calcite; mentre invece la sovrastante zona argillo-marnosa schistosa è tutta minutamente pieghettata-arricciata. Differenza che d'altronde è frequentemente osservabile nei due tipi strutturali ora accennati attraverso la potentissima serie cretaceo-eocenica dell'Appennino settentrionale.

Fenomeni consimili sono indicati e figurati da varî autori, anche in Trattati di Geologia, come per esempio nelle figg. 16-18 del recente *Grundzüge der Geologie* di W. Salomon, nelle figg. 95, 159, 163, 169 dei *Principles of Stratigraphy* (1913) del professore A. W. Grabau, che li attribuisce, almeno in parte, a scorrimenti subacquei; sono i cosidetti *distorted layer* degli Inglesi, i *Krumme lage* dei Tedeschi, ecc. che possono, accentuandosi, portare sino alla brecciatura di certi strati.

Si tratta cioè di quelle speciali strutture più o meno locali, dette *endolitiche* o *enterolitiche* (della forma dell'intestino) secondo J. Hahn (1912), ma già prima denominate *Gekröse* (così il *Gekrösekalk*) da E. Koken nel 1902 e che possono spiegarsi, almeno in parte, per varie cause, come: cristallizzazione, idratazione chimica od anche semplicemente fisica (cioè per imbibizione che può produrre rammollimenti e rigonfiamenti, specialmente in terreni argillosi), processi metasomatici e trasformazioni chimico-fisiche varie più o meno localizzate, come è appunto il caso dei giacimento di diversi Sali (per es. nei Sali potassici di Strassfurt) e particolarmente di Gesso; questo è il caso più frequente, più noto ed anche più caratteristico per le meravigliose contorsioni e arricciature che presentano molti depositi di Solfato di calce quando dovettero adattarsi, nei modi più bizzarri, alle enormi pressioni intime causate dalla trasformazione dell'Anidrite in Gesso ed al relativo rigonfiamento di oltre il 30 %.

Si comprende che in questi casi si sviluppi un enorme potere dinamico che spiega perfettamente dette contorsioni, ma ha nulla che fare coi veri fenomeni orogenetici dovuti a grandiose, generali pressioni tangenziali. Contuttociò questi fenomeni, di-

Digitized by Google

ciamo così enterolitici, più o meno locali, possono certamente gettare molta luce su quelli grandiosi orogenetici.

Ricordo qui come anche casi analoghi ai sovraccennati si possano spesso osservare nelle sezioni delle gallerie di miniera, specialmente quando vi è qualche elemento un po' plastico compreso tra banchi compatti. Accenno per esempio che nelle miniere di Grafite del Pinerolese, specialmente in quelle di Brutta Comba o Icla (Gruppo di S. Germano) in Val Chisone, si può osservare che nella potentissima serie gneissica, tra i banchi regolari e tra loro subparalleli per chilometri quadrati d'estensione, si sviluppa (per lo spessore di uno o due metri circa) una speciale zona grafitifera in cui il materiale grafitico, avviluppato da quello quarzoso, si presenta fortemente corrugato, arricciato, contorto, in modo da mostrare di esser stato soggetto a pressioni gigantesche, che del resto si risentono tuttora dalla massa ripieghettata; tant'è che poco tempo dopo il taglio ed il rinforzo delle gallerie con quadri e tavoloni, questi talora vengono respinti e spezzati, mentre la pasta grafitosa tende a fluire, appunto come schiacciata in una potente morsa naturale (Fig. 8).

In altri casi, per esempio anche nella sovraccennata miniera di Icla e quindi sempre nella regolare (per quanto ampiamente ripiegata) formazione gneissica di Val Chisone, si vede che la zona grafitifera presenta una serie di fratture e di arricciamenti od ondulazioni tra loro incrociantisi quasi ortogonalmente ed iniettati di materiale grafitico misto a quarzo, che vi forma così *apofisi*, oppure specie di *colonne* (come sono denominate) o specie di lenti o tasche, talora tanto ampie ed estese da meritare la coltivazione.

Ad ogni modo in questa regione si può ben constatare che oltre alle grandiose pieghe, più o meno coricate, che costituiscono la tettonica generale della montagna, e che si possono attribuire a grandi pressioni orogenetiche tangenziali, sonvi speciali zone grafitifere (perciò con elemento grafitoso relativamente plastico) fortemente ripieghettate o fratturato-ondulate in modo, direi, fenestrato, ma in piccola scala, che paiono invece attribuibili specialmente a pressioni ortogonali alla stratificazione.

Generalmente queste pieghettature intercalate a banchi re-

Digitized by Google

golari mostransi con sviluppo trasversale, ma osservai anche casi a pieghettatura verticale o quasi; cito per esempio quello che osservai nella tormentatissima formazione *liguriana*, cioè dei Calcari argillosi a Fucoidi, tante volte alternati con Schisti argillosi costituenti nell'assieme, con enorme potenza, l'Eocene dell'Appennino ligure. Lungo il fondo di Val Scrivia, tra Isola del Cantone e Pietrabissara e più precisamente sul fianco sinistro

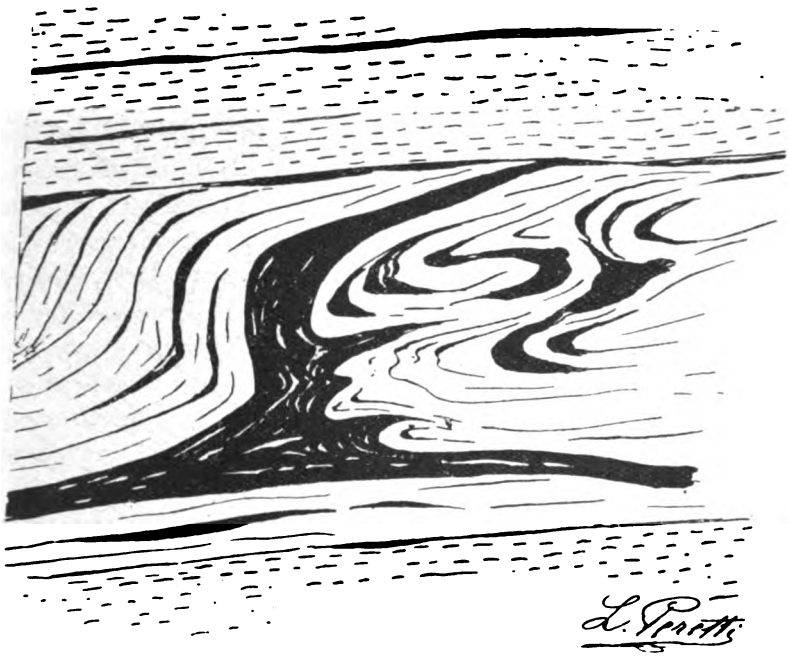


Fig. 8.
Zona grafitosa compresso-corrugata fra banchi gneissici regolari.
(Miniera di Brutta Comba, presso S. Germano in Val Chisone).

della Valle presso la Strada nazionale tra C. Romanello e C. Camposerragno, verso i 300 m. s. l. m., una grande sezione naturale mostra che nella serie *liguriana*, quivi inclinata di circa 45° a S. S. O., frammezzo ai banchi calcarei (tra loro regolarmente subparalleli) vi è una zona marnoso-argillosa, schistoso-ondulato-corrugata in senso ortogonale alla stratificazione normale; ciò che pare spiegabile come causato da potenti pressioni special-

Digitized by Google

mente suborizzontali in una massa marnosa compressa pure naturalmente nel senso verticale; detta ondulazione verticale appare anche prolungata in qualche tratto degli strati inferiori (Fig. 9).

Del resto i fenomeni ora accennati con esempi in piccola scala si ripetono in grande scala, come è per esempio tipico nell'Appennino settentrionale il caso degli Argilloschisti ofitiferi del Cretaceo arricciati, ripieghettati meravigliosamente nel modo più bizzarro, compresi tra i grandi banchi e strati relativamente

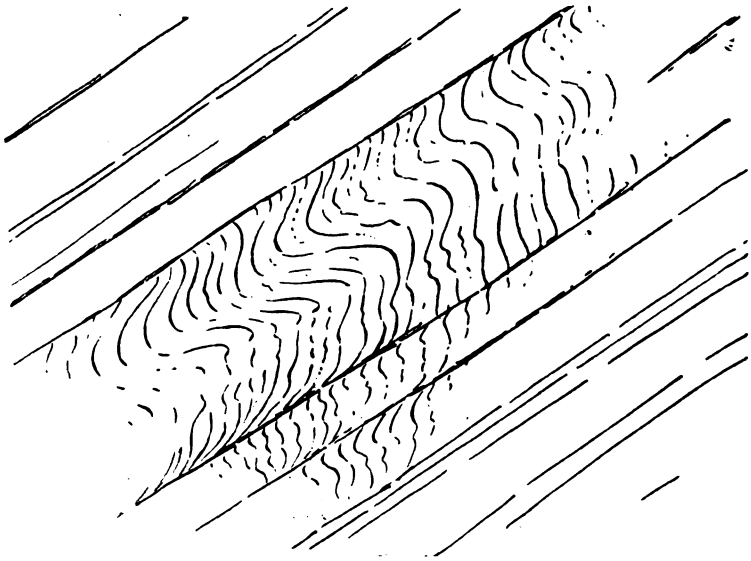


Fig. 9.

Zona marnoso-argillosa ondulatamente corrugata in senso ortogonale alla stratificazione normale della serie calcareo-argillosa dell'Eocene a *facies liguriana* (Sezione naturale sul fianco sinistro di Val Scrivia tra Pietra Bissara ed Isola del Cantone, presso la Strada Nazionale).

poco disturbati del sottostante Neocomiano-Giura-Lias, ed i banchi compatti, rigidi del sovrastante *Macigno* eocenico (o, meno spiccatamente, dei Calmi a Fucnidi), pure poco disturbati in dettaglio, quantunque nel complesso si presentino talora anche fortemente incurvati sino al rovesciamento, mantenendo però le

Digitized by Google

loro linee tettoniche generali regolari, rigide, raramente corrugate.

In questo caso grandioso il contrasto di ripieghettamento tra gli Argilloschisti e le due formazioni calcaree ed arenacee tra cui essi sono compresi e compressi riesce evidentissimo.

Frequente è il caso della fenestratura cioè della serie di pieghe o fratture tra loro ortogonali; analogo a quello sopra esaminato di figura 5 e rientra nel caso generale, ben noto agli Ingegneri di miniera ed ai Geologi rilevatori, sotto forma di campi di fratture, reti di fratture, giunti ad angolo, faglie coniugate, ecc. e messo anche sperimentalmente in luce dalle classiche esperienze di Daubrée, di sessant'anni fa (*Rapport sur les progrès de la Géologie expérimentale*, 1867), riunite poi nei suoi *Études synthétiques de Géologie expérimentale*, 1879, ottenendo per pressione speciali sistemi di arricciature e di fratture incrociate, cioè disposte fra loro ortogonalmente; quando trattasi di fratture esse possono anche attribuirsi a fenomeni, sia di stiramento di strati ripiegati, sia di ritiro di masse essiccanti o contraentisi per cause varie. Anche le recenti ricerche di A. Nadai sopra *Der Bildsame Zumstand der Werkstaffe* (Berlin, 1927) hanno chiaramente provato che le pressioni possono produrre non solo pieghettature, ma anche fratture ortogonali fra di loro.

Presento come esempio un campione di Calceschisto argilloso (del Mesozoico metamorfico) che raccolsi in una galleria di sghiaiamento eseguita pochi anni fa sulla sinistra della Stura di Cuneo presso Gajola; Calceschisti regolarmente fratturati ad inferriata, cioè in due sensi tra loro ortogonali e poi ricementati da calcite bianca che spicca così nettamente sulla massa calceschistosa bruna (Fig. 10).

Di queste strutture fenestrate, in generale però assai irregolarmente, con spostamenti, ecc. si vedono spesso bellissimi esempi nei *Marmi fratturati* e *ricementati* con calcite o calcare di tinta più o meno chiara, diversa da quella generale, più o meno scura, del calcare marmoreo fondamentale.

Fra le *Oficalci* si osservano pure sovente casi analoghi,

Digitized by Google

quantunque generalmente con grandi irregolarità, ramificazioni, ecc. Ricordo come esempio in Torino le grandi lastre levigate di Oficalce che ornano la casa d'angolo Via Botero, 17 e Via Bertola, 28 e che presentano magnifiche fenestrature,

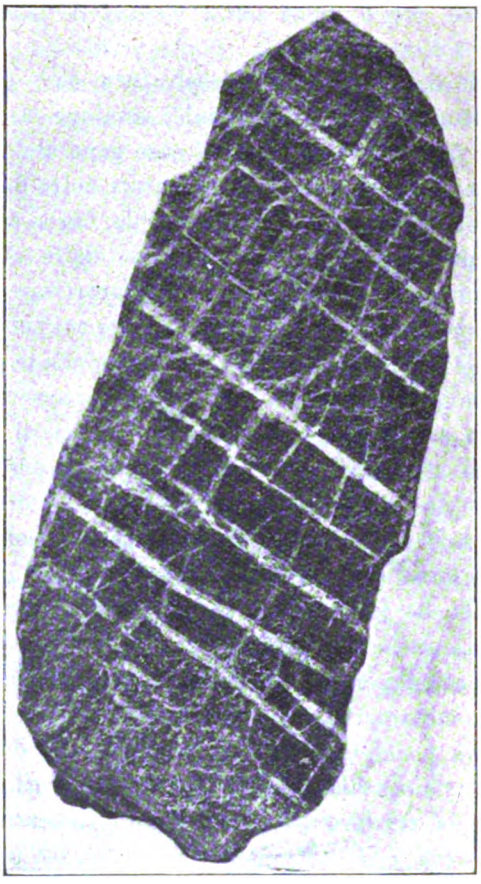


Fig. 10.

Calceschisto a fratturazione fenestrata.
(Mesozoico metamorfico in Valle Stura di Cuneo presso Gaiola).

accompagnate da spostamenti e da mirabili sfilacciature, ramosità minutissime quanto svariatissime che provano l'intensità e la

Digitized by Google

successività delle gigantesche pressioni subìte dalla roccia ofitica prima di venire a giorno (1) (vedi fig. 11).

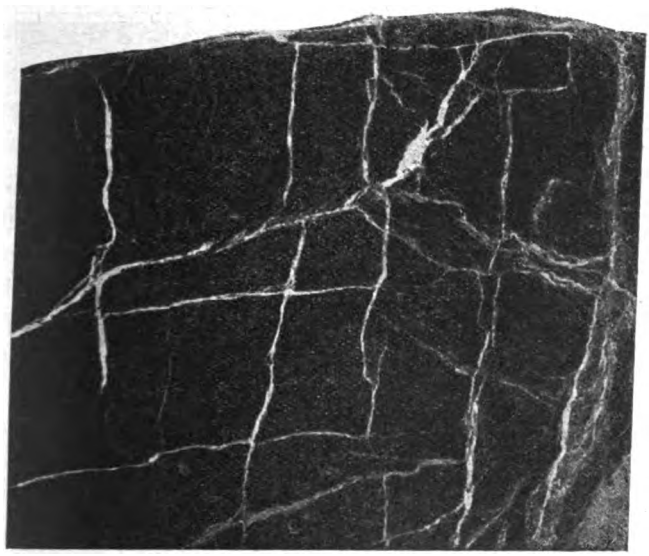


Fig. 11.

Grande lastra di Oficalce a fratturazione fenestrata.
(Fra i Calceschisti mesozoici sopra Cesana Torinese).

Quando poi queste fratturazioni di pressione invece di rimanere a fenestratura un po' regolare subiscono (spesso in seguito a diastrofismi molto prolungati oppure ripetuti, anche con varia direzione, in diversi periodi geologici) movimenti diversi, allora si producono quelle ben note forme breccioidi, note come *breccie di frizione* e simili e che originano i famosi quanto svariati *Marmi brecciati*, tanto usati come materiale di ornamentazione; di essi non è quindi il caso di presentare esempi, essendo ben noti, perchè comunissimi, e con tutte le possibili variazioni e complicazioni, che sono talora in rapporto con diversi momenti

(1) Queste belle lastre provano però come le Oficalci non siano marmi da esporsi all'aperto, giacchè mostrano notevoli alterazioni specialmente nelle linee di antiche fratturazioni con spostamento.

Digitized by Google

o periodi successivi di fratturazioni, di spostamenti e di ricementazione. Alcuni di questi complicati Marmi brecciati (se fosse possibile interpretarli giustamente) potrebbero raccontare una vera storia geologica o geotettonica.

Gli *Specchi* o *Liscioni* delle superfici di frattura e frizione colla loro levigatezza accompagnata spesso da linee o depressioni lineari di scorrimento, nonchè qualche volta da alterazioni chimico-fisiche, collegate talora a forte temperatura, sono altri fenomeni naturali ben noti e che provano l'intensità delle pressioni che subiscono le roccie. Lo stesso dicasi per quegli stacchi violenti, quasi proiezioni di materiale, che verificansi talora (anche pericolosamente) durante le escavazioni di gallerie e che pure provano l'intensità delle pressioni latenti nei terreni.

Sono poi anche a considerarsi casi di pressioni più o meno locali che producono speciali figure. È ben noto come, quando si fanno esperienze di Laboratorio per studiare la resistenza dei materiali, per esempio con cubi di varie roccie, questi si deformano intimamente, finchè, oltrepassato il limite di compressibilità o di elasticità della roccia, essi si rompono (carico di rottura), presentando spesso speciali forme conoidali o piramidate di fratturazione, talora ad apici opposti. Nell'Appennino si incontrano spesso certi frammenti di Calcari, derivati da rottura di banchi calcarei, alternati fra gli Argilloschisti del Cretaceo superiore (Calcari che dovettero subire pressioni e stiramenti enormi) e ridotti a pezzi con foggia di biconi opposti, direi a clessidra; forma che, oltre a fenomeni di corrosione, è probabilmente dovuta in parte anche alle pressioni che agirono su di essi come sui blocchi delle esperienze fatte sui materiali da costruzione.

Le accurate esperienze e ricerche fatte dall'Ing. Dott. A. Nadai, Prof. all'Università di Gottinga e pubblicate nel Volume *Der Bildsame Zumstand der Werkstaffe* (Springer, Berlin, 1927), mostrano chiaramente, coll'aiuto di interessanti figure, come le forti pressioni, oltre alle rugule parallele ed alle pieghettature e fratturazioni incrociate (Figg. 36, 114-124, ecc.) che spiegano i noti Marmi brecciati (Fig. 94), possano produrre radiazioni a croce

Digitized by Google

(Figg. 70, 77, 100, ecc.) sino a giungere ad originare opposti coni di rottura (Figg. 73, 85) o *Bruchkegel* (Fig. 94).

Pure interessanti risultati di analoghe ricerche pubblicò Th. Wyss, *Die Kraftenfelder in festen elast. Körporen* (Berlin, 1926).

Queste speciali deformazioni di pressione credo possano spiegare quelle curiose forme che incontransi in terreni diversi (specialmente calcareo-argillosi) e che ricevettero il nome espressivo di *Cone-in-Cone* o *Tutenstein* (nei *Tutenbildung* o *Tutenmergeln*, già così indicati nel 1823), spesso con ripetute, numerose pieghettature, rugosità o raggrinzature, semplici od ondulate, biforcate, ecc. nelle pareti di queste strane figure conoidali fra loro irregolarmente parallele o disposte una dentro l'altra, talora coi coni disposti in senso opposto fra di loro anche se in strati verticalmente contigui. Il Prof. Nadai presenta la Fig. 94 di uno di questi *Bruchkegel* (ottenuti artificialmente con forte pressione verticale) che ricordano appunto i *Cone-in-Cone*.

Queste strane configurazioni furono riscontrate in quasi tutti gli orizzonti geologici dal Cambriano al Cretaceo specialmente negli Stati Uniti d'America, ma anche in alcune regioni europee; per cui è presumibile che esse rappresentino un fenomeno generale, di cui già si occuparono parecchi, da oltre un secolo, specialmente Cole, Gresley, Gumbel, Hall, Harnley, Keyes, Marsh, Newberry, Reiss, Sorby (sin dal 1858), Tarr, Twenhofel, Young, ecc., ecc. Tali impronte furono variamente interpretate, anche come fossili, giacchè l'Hildreth nel 1836 li descrisse come *fossil columnar Madrepore*, altri come *Cone-in-cone Coral*. Credo trattisi di fenomeni speciali di pressioni intense dovute a potenti depositi sovraincombenti a certi strati più atti ad essere così deformati, oppure a forti pressioni locali derivanti da trasformazioni chimiche o mineralogiche o litologiche che producono rigonfiamenti o, in qualsiasi modo, aumento di volume.

Come esempio del fenomeno presento la figura di un campione di compatto argilloschisto bruno della Cornovaglia (Fig. 12).

In Italia ciò fu già osservato dal Prof. G. De Stefano che ne raccolse campioni in terreni, forse eocenici, di Brancaleone (Calabria); studiato poi ed illustrato dal Prof. A. Neviani (che me ne volle cortesemente offrire alcuni campioni) nella sua nota *Delle*

Digitized by Google

Jcoliti (*Pietre figurate*) (" Boll. S. G. I. „, XXXV, 1916, Tav. XII e XIII) che crede non rientrino in alcuno dei 22 gruppi proposti dall'Issel nella sua Memoria *Prime linee di un ordinamento sistematico delle Pietre figurate* (" R. Acc. Lincei „, XI, 1916). Per ciò egli ne fa un gruppo nuovo che denomina delle *Ortofibroliti*, al quale assegnerebbe l'Amianto, il Crisotilo e simili forme fibrose;

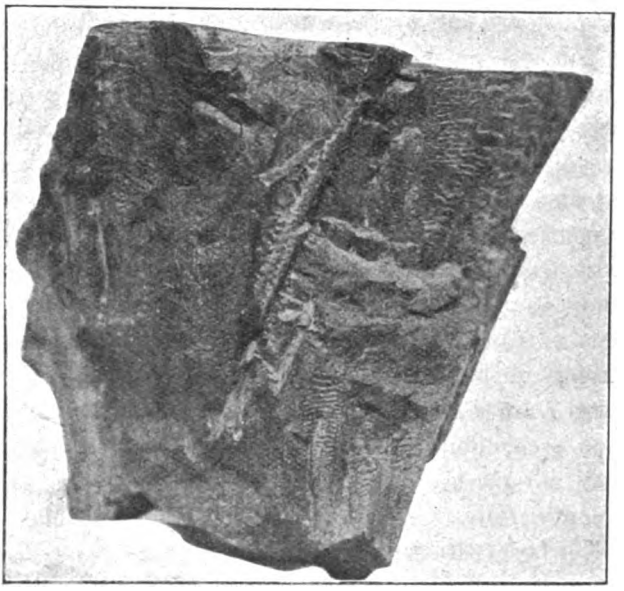


Fig. 12.
Blocchetto calcareo foggiato a *Cone-in-cone* (Cornovaglia).

parallelismo che non parmi accettabile trattandosi di fenomeni derivanti da cause ben differenti e che anche si mostrano con forme ben diverse fra loro.

La denominazione d'Ortofibroliti sta bene per l'Amianto e simili forme cristalline, mentre le forme esaminate sarebbero *Stimate geologiche* o *Stigmatoliti* di un gruppo speciale che si potrebbe denominare *Coniti*. Del resto non mancano i nomi (*Endoliti, Enteroliti*, ecc.) per indicare queste varie strutture di pressione, di contrazione, di fratturazione, ecc.

Non è improbabile che a questa categoria di fenomeni fisici,

Digitized by Google

prodotti da forti pressioni, generalmente ortogonali alla stratificazione, debbasi attribuire qualcuna di quelle strane forme fossili che si incontrano in tutti i piani (dal Cambriano al Pliocene) dei terreni sedimentari, specialmente marnosi, stati fortemente compressi; fossili che sono stati variamente denominati dai varî autori e riuniti nel cosidetto gruppo delle Alectoruridee che comprende forme assai diverse di origine organica; ma probabilmente gli si attribuiscono pure talora forme prodotte da pressione, come ebbi, per es., ad osservare su certi strati marnosi portati alla verticale, quindi già fortissimamente compressi, dell'Eocene di Gassino, su certi calcari marnosi del Cretaceo dell'Appennino, ecc. sempre coll'accompagnamento di fratture con scorrimenti, torsioni, liscioni, ecc., provanti l'intensità degli sforzi dinamici subìti da detti terreni.

Le Figg. 248, 250, 251, 264 del sovraccennato libro del Prof. Nadai, colle loro forme spiraloidi, semplici o intrecciate, indicano la reale produzione di curiose e varie forme spiraloidi per semplice pressione, talora con intrecciature delle spirali (anche in due sensi) veramente mirabili per regolarità.

Anche speciali colonne o aghi litoidi (disposti ortogonalmente o quasi ai piani di stratificazione), le cosidette *Stiloliti*, osservate già da Myleus nel 1751 e poi così denominate da Klodin nel 1826 che le credette fossili (*Stylolites sulcatus*), debbono la loro origine essenzialmente a pressioni agenti verticalmente sugli strati.

La nota struttura a *galestri* o frammenti più o meno aciculari degli Argilloschisti dell'Appennino, possono derivare da fenomeni di ritiro collegati ad azioni di intensa pressione.

Ricordo infine, come esempio di pseudofossili, che recentemente il Prof. A. Neviani pubblicò negli " Atti d. Pontif. Accad. delle Scienze dei Nuovi Lincei „ (Anno LXXVIII, Roma, Maggio, 1925) un lavoro sopra *Di una nuova Medusa appartenente alle Aequorideae* (*Craspedotae*) *rinvenuta nelle Argille classiche della Farnesina presso Roma*, costituendo sull'impronta trovata nella marna argillosa grigia del Pliocene romano un nuovo genere: *Aequorfossa*, colla specie *A. Farnesinae* Nev. (vedi anche:

Digitized by Google

A. Neviani, *I Fossili del territorio romano* (Rivista " Roma „, anno III, 1925).

Avendo avuto occasione di vedere tale impronta durante la seduta gen. ordin. tenuta dalla Soc. geol. ital. in Roma il 17 gennaio 1926, essa mi ricordò molto analoghe impronte di concentrazione e di pressione viste su marne terziarie, cosicchè emisi il dubbio trattarsi di fenomeno inorganico (" Boll. Soc. geol. it. „, Vol. XLV, pag. XXVIII, 1926). Malgrado le osservazioni fatte poi dall'amico Neviani (id., id., pag. 146), considerando non solo analoghe impronte naturali inorganiche, ma anche figure prodotte artificialmente con varie esperienze, per esempio quelle (Fig. 157 e seguenti) riprodotte dal Prof. Nadai, ritengo ancora che la *Aequorfossa Farnesinae* Nev. sia solo il prodotto di un fenomeno, se non di concentrazione, di compressione locale.

Sarà opportuno raccogliere dal vero svariati esempi dei prodotti di pressione, giacchè essi, più che non quelli ottenuti artificialmente in laboratorio, servono, sia per indicare l'intensità e talora anche la modalità delle pressioni naturali, sia per giungere più sicuramente alla loro esplicazione, giacchè probabilmente trattasi di varie cause generali e speciali.

Digitized by Google

Il Pliocene marino nel sottosuolo della pianura presso Novara.

Nota del Socio nazionale residente C. F. PARONA

Il moltiplicarsi dei dati sulla costituzione del suolo nella pianura padana è utile non solo per la conoscenza della evoluzione geologica nella vasta depressione fra Alpi ed Appennino, ma anche perchè il sempre più particolareggiato studio della composizione e struttura del sottosuolo rende più facili e sicure nel loro indirizzo le ricerche sulle acque sotterranee a scopo alimentare, agrario e industriale. È noto infatti, anche per numerose e pregiate pubblicazioni, il progresso rapido verificatosi al riguardo negli ultimi decenni.

Le trivellazioni riescono particolarmente interessanti allorchè nella pianura esse raggiungono e rivelano la presenza dei più recenti sedimenti marini, i pliocenici, quelli che per vasta parte della pianura padana devono costituire il fondo del golfo adriatico pliocenico nella sua prosecuzione fino a raggiungere le falde delle Alpi piemontesi, e che poi, nel neozoico, la potente coltre alluvionale ricoprì e nascose col sostituirsi del regime continentale al marino. Come si comprende facilmente, il moltiplicarsi dei dati sulla presenza ed estensione del Pliocene marino e sulla sua situazione a profondità sotto le formazioni diluvio-glaciali e alluvionali riesce prezioso per lo studio e per le induzioni sul disegno geografico-morfologico dell'estrema parte del golfo adriatico prima della sua trasformazione in terra emersa.

Non mi risulta che prima d'ora nella pianura vercellese-novarese, a destra e a sinistra della Sesia, i numerosi pozzi trivellati abbiano raggiunto i sedimenti marini, salvo i pozzi aperti a poca distanza dalle falde montane, in evidente dipen-

Digitized by Google

denza dei noti lembi pliocenici scaglionati e affioranti nell'alto vercellese-novarese. Infatti le recenti trivellazioni di Cossato (m. 262 s. m.) e Mottalciata (m. 208 s. m.) in provincia di Vercelli hanno incontrato strati pliocenici a pochi metri di profondità. A Cossato, sulla destra del torrente Strona, a 4 chilometri sopra la sua confluenza col Cervo, il pliocene fossilifero si trova a 6 metri di profondità; a Mottalciata, a sud di Cossato e sulla destra del Cervo, a profondità che variano da 25 a 34 m. A sud di queste trivellazioni (dovute ad iniziativa del sig. ing. Guglielmo Pozzi, e con esito positivo nelle ricerche di acqua abbondante e pura) i pozzi trivellati nell'alta (*Baraggia*) e bassa pianura vercellese raggiunsero parecchi e ricchi livelli acquiferi ad alta pressione sotto la falda freatica (a 4 m. di profondità, con oscillazioni di livello di circa 80 cm. a seconda delle stagioni) senza raggiungere il Pliocene marino. È noto per altro che esso si rinvenne in banchi di argille riccamente fossilifere durante i lavori (1898-99) di fondazione del ponte di Crescentino sul Po, al piede della collina di Verrua Savoia, dove il Pliocene emerge anche in banchi calcareo-arenacei gialli e costituisce la rupe del castello.

Nella piana vercellese, dalla destra della Sesia, i pozzi vanno moltiplicandosi per i bisogni dell'alimentazione, dell'irrigazione e dell'industria: nell'area relativamente ristretta della città di Vercelli e delle immediate vicinanze mi risulta che i pozzi trivellati, aperti sul piano di campagna a quote che variano da m. 126 a m. 130 sul livello del mare, sono già in numero di 26: essi attingono, da m. 59 a m. 186 di profondità, acque salienti, che danno forti getti sopra il suolo, e in parecchi di essi con livello piezometrico a 5 m.

Venendo ora all'oggetto particolare di questa nota, comunico che nella primavera dello scorso anno (1927) fui avvertito, che dalla perforazione di un pozzo a Fisrengo (Casalbeltrame) nel novarese, a sei chilometri dal corso della Sesia e alla sua sinistra, si erano raggiunti strati fossiliferi; e dalla cortesia dei signori Bertone, esperti e noti specialisti in pozzi artesiani, ho potuto avere notizie e materiali di studio, che mi permettono di pubblicare questi cenni, disgraziatamente sommari perchè

Digitized by Google

non arrivai in tempo per avere conoscenza precisa della serie completa degli strati attraversati e per raccogliere maggior numero di fossili pliocenici.

L'altezza s. m. di Fisrengo è di m. 144 ed a questo livello corrisponde la bocca del pozzo trivellato. La perforazione fu spinta fino a 188 m. in zone acquifere ad alta pressione determinante un violento getto, saliente a parecchi metri sopra la soglia del pozzo, con espulsione di sabbia in grande quantità con fossili e concrezioni piritose, quali si rinvengono frequentemente nelle argille e marne azzurre plioceniche: infatti colle sabbie su accennate furono anche dal pozzo di Fisrengo espulsi dei blocchetti di argilla dello stesso tipo, con frammenti di conchiglie ed esemplari di piccole specie. Si può presumere che questa argilla costituisca uno strato sovrastante e di protezione al banco sabbioso fossilifero e acquifero sotto forte pressione. Durante la trivellazione fu accertata la presenza di altra zona meno profonda ad acqua saliente, fra i metri 163 e 168, con espulsione di sabbie e frammenti di legno, con piccoli tronchi compressi, torbificati: così abbondante il materiale torbificato e in parte spappolato da annerire l'acqua (1). Mi si assicurò che col detrito torboso vennero emesse delle conchigliette; pur troppo non ho potuto averne saggi e verificare se si tratti di molluschi d'acqua dolce, come si può ritenere probabile.

Merita considerazione la profondità notevole, a 188 m., del livello pliocenico nel pozzo di Fisrengo ove si ricordi che la sua apertura è a m. 144 s. m.: gli strati pliocenici sono dunque qui a 44 m. sotto l'attuale livello marino. Se pensiamo che pochi chilometri a nord, a Cossato, a Masserano, a Villa del Bosco, ecc., nei primi rilevi alpini, i lembi pliocenici raggiungono quote da m. 270 a m. 354 s. m., e che sul lato opposto della pianura vercellese, al Po, il Pliocene affiora dalle alluvioni salendo sino

(1) Letti di materiali torbificati sono frequenti nei depositi a carattere alluvionale presso il contatto col Pliocene marino; ne fa cenno anche V. Novarese a pag. 52 della sua recente ed importante memoria: *Gli apparati morenici wurmiani del Lago Maggiore e del Lago d'Orta* (" Bollettino R. Uff. Geol. „ LII, 1927).

Digitized by Google

a 274 sul colle di Verrua, saremmo tentati di attribuire al profondo sottosuolo marino una disposizione a conca, se l'unico esempio della perforazione di Fisrengo non consigliasse prudenza nelle deduzioni.

Ciò premesso, passo a documentare l'età pliocenica del livello marino coll'elenco dei fossili raccolti e riconosciuti, quasi tutti molluschi.

Ostrea edulis L.
Aequipecten opercularis (L.)
Soldania mytiloides (Br.)
Pectunculus insubricus (Br.)
Divaricella divaricata (L.)
Cardium tuberculatum (L.)
Tapes senescens Dod.
Fuscoscala Turtonis (Turt.)
Neverita Josephinia Risso
Odontostomia conoidea (Br.)
Nassa tumida (Eichw.)
Nassa mutabilis (L.)
Raphitoma attenuata (Montg.)
Retusa truncatula (Brug.)
Donacilla cornea (Poli).

Coi molluschi si rinvenne anche una piccola vertebra di pesce (*Acanthias* sp.), che ricordo perchè identici avanzi fossili furono citati per altri giacimenti pliocenici. L'esame accurato fatto dalla sig^na^ D^r^ A. Martinotti ha verificato la mancanza quasi assoluta di foraminiferi, ad eccezione della comunissima *Rotalia Beccari* (L.) e della *Nonionina depressula* (Walker et Jacob), presenti nei ricordati blocchetti di argilla: interessante la seconda specie perchè qui, a Fisrengo, riscontrata nel Pliocene subalpino per la prima volta.

Già dissi che non mi riuscì di avere campioni della serie alluvionale sovrastante al livello pliocenico e attraversata dalla trivellazione: ma fortunatamente ebbi in comunicazione la serie accuratamente raccolta dai sigg. Bertone in occasione di altra

Digitized by Google

perforazione compiuta a qualche chilometro più a monte di Fisrengo, sempre sulla sinistra della Sesia e in prossimità del fiume, al Cascinone di Vicolungo. La trivellazione fu arrestata alla profondità di m. 162,25, dove si riscontrò la falda ricercata di abbondante acqua saliente, senza necessità di spingerla fino a raggiungere il livello pliocenico. Con tutta probabilità la serie alluvionale di Vicolungo è quella stessa di Fisrengo, e ne abbiamo una prova nel rinvenimento alla stessa profondità (m. 154-158) dello strato a vegetali torbificati. L'esame mineralogico del materiale pliocenico e di quello alluvionale fu condotto a mia preghiera dal collega prof. Repossi, che ne riferisce i risultati in apposita Nota che fa seguito alla mia.

Risulta da questo studio una apprezzabile differenza fra la composizione mineralogica della sabbia marina pliocenica e quella alluvionale: la prima nei minerali componenti dimostra la sua provenienza dai monti del Biellese, coi caratteri, cioè, mineralogici delle alluvioni anche recenti del Cervo e dell'Elvo: la seconda è evidentemente costituita da materiali valsesiani. Il corso della Sesia ha dunque migrato, spostandosi da sinistra a destra, invadendo il territorio dapprima soggetto alle influenze di acque di provenienza biellese. Infatti il corso attuale della Sesia, oltre il suo sbocco sul piano sotto il M. Fenera, piega ad ovest, allontanandosi dal terrazzo novarese, Romagnano-Sizzano (*diluviale antico*) e dal terrazzo più basso (*diluviale recente*) di Biandrate, sfumantesi verso il greto della Sesia. Più sotto (Vercelli), soltanto dopo l'incontro col Cervo e coll'Elvo, il fiume ripiega con larga curva verso oriente (Palestro) prima di raggiungere il Po.

Ma a parte il fatto dello spostamento a destra del corso della Sesia, richiama la nostra attenzione l'immediata sovrapposizione, nel pozzo di Fisrengo, come del resto si ripete altrove, di depositi schiettamente alluvionali e in stato di freschezza, e cioè punto alterati, agli strati marini fossiliferi, senza interposizione di zone a materiali in stato di alterazione atmosferica più o meno profonda (*ferretto*), che spesso guidano nella distinzione e separazione dei depositi postpliocenici, diluvio-glaciali, più antichi, da quelli sicuramente alluvionali e più recenti. Ne

Digitized by Google

viene che, se i sedimenti pliocenici del pozzo di Fisrengo rappresentano soltanto il *piacenziano*, come si può sospettare (mancando indizi sicuri delle zone superiori, *astiane*), si può pensare che la serie pliocenica marina in parte e quella *villafranchiana* e *diluvio-glaciale* siano state qui asportate per azione erosiva, prima che il regime fluviale iniziasse la tranquilla fase dei depositi alluvionali.

Digitized by Google

Osservazioni mineralogiche sopra alcune sabbie del sottosuolo della pianura presso Novara.

Nota del Socio nazion. resid. EMILIO REPOSSI

Quando mi accinsi, per gradito incarico del collega professore Parona, allo studio comparativo di un campione della sabbia pliocenica del pozzo di Fisrengo e di un campione di uno dei banchi di sabbia quaternaria attraversati dal pozzo del Cascinone di Vicolungo, avevo, per diverse ragioni, poca speranza di poter conseguire qualche risultato positivo circa la provenienza presumibilmente diversa dei materiali di cui quelle sabbie sono costituite. È noto infatti quanto sia difficile distinguere tra di loro i materiali alluvionali minuti provenienti da due bacini idrografici appartenenti entrambi alla regione alpina e specie da due bacini contigui, poichè le rocce dalle quali i minerali delle sabbie derivano non mutano essenzialmente natura da un bacino all'altro. Basterà a questo proposito ricordare come solo dopo numerosissime e pazientissime osservazioni l'Artini ed il Salmojraghi siano riusciti a cogliere qualche essenziale differenza, di carattere quantitativo e non qualitativo, tra la composizione delle sabbie del bacino ticinese e quelle del bacino abduano nel sottosuolo del territorio milanese.

Contrariamente alla mia poco fiduciosa aspettativa, tra i due campioni di sabbia esaminati, provenienti, quello pliocenico, dalla profondità di 188 m. sotto la superficie del suolo, e quello quaternario da 119-122 m., apparvero invece subito differenze che, pur essendo anch'esse piuttosto quantitative che qualitative, mi sembrano, nei limiti di attendibilità che si possono attribuire a determinazioni di questa natura, abbastanza nette

Digitized by Google

e d'accordo con l'ipotesi che, mentre la sabbia quaternaria sia di origine valsesiana, la sabbia pliocenica sia di origine più occidentale ed essenzialmente biellese.

Differenze assai spiccate fra sabbie plioceniche e sabbie postplioceniche ha constatato anche di recente il compianto prof. Artini studiando i materiali provenienti da trivellazioni profonde eseguite a Milano (1), nel senso che, mentre le prime contengono certo una quantità notevole di elementi di provenienza padana, nelle altre questi elementi si possono ritenere mancanti ed i componenti sono invece in forte prevalenza abduani, con miscela in quantità varia di elementi ticinesi e prealpini.

Che differenze tra sabbie plioceniche, marine, e sabbie postplioceniche, non marine, provenienti dallo stesso pozzo, possano esistere, è cosa ovvia, quando si pensi alla probabilità molto maggiore di una miscela tra elementi provenienti da bacini idrografici diversi nelle sabbie marine, spesso spostate dalle correnti costiere, in confronto delle alluvioni subaeree. E in realtà il carattere spiccatamente padano (abbondanza di glaucofane, di anfiboli di tipo actinolitico, ecc.) rilevato dall'Artini nelle sabbie plioceniche dei pozzi di Milano, forse più che ad un'idrografia pliocenica diversa dalla quaternaria, potrebbe essere dovuto semplicemente al diverso ambiente in cui si sono depositate le sabbie stesse.

Comunque sia, non mi pare inutile far rilevare che fra le sabbie plioceniche e quelle postplioceniche, l'Artini ha notato differenze perfettamente analoghe a quelle da me riscontrate nei materiali provenienti dai pozzi di Fisrengo e di Vicolungo, in quanto che gli elementi delle sabbie plioceniche rivelano una provenienza più occidentale di quelli delle successive, le quali (ed è questa un'altra analogia interessante col nostro caso) sono più spiccatamente abduane che ticinesi, anche nei livelli più alti.

Ma, a mio avviso, la sabbia pliocenica di Firsengo dice

---

(1) E. Artini, *Osservazioni mineralogiche sui materiali incontrati da due trivellazioni profonde recentemente eseguite a Milano* (" Atti Soc. Ital. d. Sc. Nat. „; Vol. LXVI, Milano, 1927).

Digitized by Google

qualche cosa di più di quella dei pozzi milanesi, alla quale si assegna una provenienza solo genericamente occidentale. Credo infatti che, come già rilevai, per la nostra sabbia si possa ritenere abbastanza fondata l'ipotesi che i suoi elementi derivino prevalentemente dal Biellese, poichè significativa è senza dubbio alcuno la presenza in essa di abbondante serpentino, di ortoclasio violaceo affatto identico a quello delle sieniti di quella regione, di pasta scura di melafiro e di porfirite, mentre vi mancano, o sono estremamente scarsi, il microclino, l'orneblenda bruna, la pasta felsitica rossa, la sillimanite, elementi tutti che sono invece affatto caratteristici delle sabbie di provenienza valsesiana e che nel pozzo di Vicolungo si trovano in maggiori o minori proporzioni in tutte le sabbie presumibilmente quaternarie ed attuali.

Infatti io, dopo aver subito notato le differenze ora accennate fra i due campioni di sabbia affidatimi, e dopo aver controllato le prime determinazioni in modo che mi parve esauriente, credetti pure opportuno studiare, almeno sommariamente, anche altri materiali provenienti da diversi livelli del pozzo di Vicolungo. Ed a questo scopo il collega prof. Parona gentilmente mi trasmise tutti i campioni prelevati durante la perforazione di questo pozzo, campioni che giudico opportuno elencare qui con le relative indicazioni fornite dai costruttori.

Pozzo del Cascinone di Vicolungo (Novara).

	Profondità		
1. m.	0 —	2 —	- Terreno vegetale.
2. „	2 —	8 —	- Ghiaia.
3. „	8 —	31 —	- Sabbia o ghiaietta rossiccia, compatta con ciottoli che scompaiono gradatamente verso il basso.
4. „	31 —	40 —	- Sabbia compatta gialla-rossiccia.
5. „	40 —	41 —	- Argilla gialla rossiccia.
6. „	41 —	47 —	- Argilla azzurrognola.
*7. „	47 —	52 —	- Sabbia gialla rossiccia compatta.
8. „	52 —	53 —	- Argilla azzurra con tracce di lignite.
*9. „	53 —	54 —	- Sabbia azzurra scura.
10. „	58 —	60 —	- Argilla azzurrognola verdastra.

Digitized by Google

		Profondità		
11.	m.	60 —	62 —	- Sabbia azzurro-scura contenente lignite.
12.	„	62 —	79 —	- Argilla scura verdastra.
*13.	„	79 —	83 —	- Sabbia azzurro scura compatta con lignite.
14.	„	83 —	87 —	- Argilla azzurro-scura.
*15.	„	87 —	91 —	- Sabbia azzurro-scura.
16.	„	91 —	96 —	- Argilla cenerognola con lignite.
*17.	„	96 —	101 —	- Sabbia azzurro-scura con lignite.
18.	„	101 —	113 —	- Argilla azzurra.
19.	„	113 —	115 —	- Sabbia azzurro-scura.
*20.	„	115 —	119 —	- Argilla azzurra.
*21.	„	119 —	122 —	- Sabbia azzurro-scura.
22.	„	122 —	122.50	- Lignite torbosa.
23.	„	122.50	126 —	- Sabbia argillosa con tracce di lignite torbosa.
24.	„	126 —	134 —	- Argilla azzurro-scura.
*25.	„	134 —	139 —	- Sabbia azzurro-scura.
*26.	„	139 —	147 —	- Sabbia compatta con straterelli di argilla cenerognola e tracce di lignite.
27.	„	147 —	152 —	- Argilla cenerognola e sabbia argillosa.
28.	„	152 —	154 —	- Sabbia azzurro-scura.
29.	„	154 —	158 —	- Lignite pura compatta.
	„	158 —	161 —	- Argilla azzurro-biancastra.
*30.	„	161 —	162.25	- Sabbia azzurro-scura.

Fra tutti questi campioni ho esaminato quelli segnati coi numeri 7, 9, 13, 15, 17, 20, 21, 25, 26 e 30, cioè quasi tutte le sabbie più pure incontrate, e in più un'argilla, separandone accuratamente lo scheletro sabbioso. A questo elenco va aggiunta la sabbia pliocenica di Fisrengo (n. 31).

I metodi usati per lo studio sono quelli oramai consacrati dall'uso e ben noti a tutti coloro che si occupano di ricerche del genere. I campioni furono tutti sottoposti ad una prudente levigazione per scacciarne il limo e ad una opportuna stacciatura per separarne gli elementi troppo grossolani. I materiali di grandezza adatta all'esame microscopico furono divisi in due porzioni mediante bromoformio (p. sp. = 2.84), in modo da fornire un'idea dal rapporto in cui si trovano gli elementi leggeri (essenzialmente quarzo e felspati) e gli elementi pesanti, e queste due porzioni furono esaminate al microscopio, immergendole a volta a volta in liquidi di indice di rifrazione diverso. Le deter-

Digitized by Google

minazioni ottiche furono a seconda delle necessità controllate mediante saggi chimici.

I materiali più grossolani separati con la stacciatura furono poi accuratamente esaminati con una lente binoculare a forte ingrandimento ed i granuli non riconoscibili in modo sicuro ad occhio furono frantumati ed esaminati al microscopio oppure sottoposti ad opportuni saggi di controllo.

Dato lo scopo che mi ero prefisso nelle mie ricerche, l'esame dei vari campioni non fu spinto sino al punto di poter fornire dati statistici completi dei vari minerali riscontrati, ma di ciascun campione, e specie dei primi due esaminati, i preparati studiati furono molti di più di quelli che il Salmojraghi, diligentissimo studioso di sabbie, ritiene sufficienti per dare un'idea precisa della composizione delle sabbie stesse (1).

I risultati delle osservazioni sono sinteticamente rappresentati nella tabella unita alla presente Nota; tabella in cui fu adottata la scala numerica di frequenza suggerita dall'Artini e da questo Autore sempre seguìta sino al suo ultimo lavoro (2).

Non credo necessario nè utile descrivere partitamente i singoli campioni, perchè i dati della tabella ne rappresentano a sufficienza la composizione, e mi limiterò invece ad esporre qualche considerazione, che mi sembra opportuna per meglio illustrare qualcuno dei componenti caratteristici, ed a fare qualche confronto tra le sabbie dei vari livelli e tra le sabbie nostre e

---

(1) F. Salmojraghi, *Sullo studio mineralogico delle sabbie e sopra un modo di rappresentarne i risultati* (" Atti Soc. Ital. d. Sc. Nat. "; Vol. XLIII, Milano, 1904).

(2) E. Artini, *Intorno alla composizione mineralogica delle sabbie di alcuni fiumi del Veneto, con applicazioni della ricerca microscopica allo studio dei terreni di trasporto* (Padova, 1898).

In questo lavoro, come è noto, l'Artini proponeva una scala di dieci termini, che è quella riportata, per maggiore comodità, al piede della tavola in fine della presente Nota. Il Salmojraghi, nel lavoro sopra citato, trovando difficile applicare una scala così complessa, tentò di semplificarla, riducendola a sei termini. Ho creduto opportuno conservare quella dell'Artini, che, del resto, non fu usata solo da lui ma anche dal Salmojraghi stesso in numerosi lavori.

Digitized by Google

quelle così magistralmente descritte dall'Artini nel suo lavoro sulle trivellazioni profonde del suolo di Milano.

Nella sabbia pliocenica di Fisrengo ci sono, come già accennai antecedentemente, alcuni elementi che appaiono singolarmente significativi.

Il semplice esame macroscopico rivela in essa, innanzitutto, una notevole ricchezza di granuletti bene arrotondati di un serpentino compatto, talvolta chiaro, talvolta scuro, talvolta persino bastitico, che non ha riscontro in nessuno dei campioni delle sabbie postplioceniche. Essi mi sembrano derivare, non dalle serpentine scistose, ma da serpentine massicce del tipo di quelle sviluppate al Musinè, a Baldissero, a Favaro sopra Biella, e credo di non andare errato supponendo che siano legati specialmente a quelle di quest'ultima località. Tanto più che ad essi si associano, in quantità non molto grande, ma tuttavia sensibile, frammenti di sfaldatura di un ortoclasio leggermente violaceo, affatto simile a quello delle sieniti del Biellese, delle quali ho creduto bene di preparare una sabbia artificiale a scopo di confronto. Questo confronto riuscì anzi tanto utile, che preparai sabbie artificiali anche con campioni di noriti di Cossila e d'Ivrea, con lo scopo di controllare le somiglianze di altri elementi delle sabbie, ed in particolar modo dei pirosseni rombici e monoclini.

Questo confronto è riuscito interessante, non tanto per le somiglianze, del resto perfette, fra i pirosseni della sabbia naturale e quelli della sabbia artificiale, quanto per l'assenza, che si può dire quasi assoluta, di anfiboli bruni tanto nell'una che nell'altra. Cosa questa che mi pare veramente fondamentale per la questione che ci interessa, perchè concorre validamente a dimostrare la provenienza occidentale della nostra sabbia, la quale trarrebbe i suoi elementi pirossenici essenzialmente dall'ultima propaggine verso occidente della zona d'Ivrea, dove l'orneblenda bruna sembra molto scarsa o affatto mancante. Le sabbie valsesiane invece, dal cuore della zona d'Ivrea dove moltissime forme petrografiche contengono, accanto al pirosseno, come elemento essenziale o subordinato, l'orneblenda bruna, traggono insieme con pirosseni identici a quelli della sabbia plio-

Digitized by Google

cenica, anche quest'ultimo elemento straordinariamente caratteristico,

Un altro carattere positivo della sabbia pliocenica è la presenza di non rari frammenti di pasta fondamentale nera o nerastra di porfirite o di melafiro. Anche in questo caso il confronto con sezioni di simili rocce provenienti dal Biellese riuscì, a mio avviso, molto probativo.

Nè posso lasciar di notare che questa sabbia è pure sensibilmente più ricca di glaucofane di quelle successive, le quali pur contengono quasi tutte questo minerale in notevole quantità. Se non erro, questa straordinaria abbondanza di glaucofane concorre essa pure a provare la provenienza occidentale della sabbia in discorso, perchè lo sviluppo delle rocce glaucofanitiche va rapidamente attenuandosi ad oriente della Val d'Aosta e del Biellese.

Ho già ricordato come carattere negativo, oltre all'assenza di orneblenda bruna, la scarsità di microclino. Quando infatti si pensi alla enorme diffusione di questo ultimo elemento nei graniti della bassa Valsesia, per non dire delle altre forme che pur lo contengono nel resto del bacino idrografico della Sesia, non può non colpire il fatto ch'esso sia mancante o scarsissimo nella sabbia pliocenica. Tanto è vero che nelle sabbie quaternarie o recenti, sicuramente valsesiane, esso invece è relativamente abbondante e non manca mai in nessuno dei preparati.

Significativa è pure la grande scarsità di frammenti di pasta felsitica rossa, manifestamente derivante dai porfidi della bassa Valsesia. E non meno significativa è l'assenza quasi completa della sillimanite. Elementi questi che compaiono subito, più o meno frequenti, talvolta frequentissimi, nelle sabbie postplioceniche di Vicolungo, e la cui provenienza rispettivamente dalle colate porfiriche valsesiane e dalla zona kinzigitica, ossia dai gneiss della Strona, mi sembra fuor di dubbio.

L'esame delle sabbie plioceniche, e specialmente quello della sabbia n. 21 fatto con particolare cura, rivela già macroscopicamente una netta differenza, in confronto con la sabbia pliocenica, nella natura degli elementi più grossetti; fra questi infatti, mentre scarseggiano i granuli di serpentino, sono relativamente

Digitized by Google

frequenti, oltre ai già citati frammenti di pasta porfirica, minuti ciottolini di quarzo con biotite e sillimanite e, in genere, frammentini di rocce gneissiche e micascistose, come pure granuletti di rocce gabbriche, che non mi fu dato riscontrare nella sabbia pliocenica.

Come già dissi, tutti i campioni di sabbia di Vicolungo contengono sillimanite. Aggiungerò che spesso vi si riscontra anche la cordierite, associata appunto alla sillimanite. Macroscopicamente e microscopicamente si riscontra subito abbondante l'orneblenda bruna, spesso scurissima, con pleocroismo nei toni del bruno e con tinta molto calda. Credo di poter affermare ch'essa proviene dalla grande massa della zona d'Ivrea, che nel cuore del bacino valsesiano risulta prevalentemente formata da gabbri, da noriti e da peridotiti varie (lherzoliti, harzburgiti, websteriti, peridotiti orneblendiche), in cui l'orneblenda bruna, coi caratteri qui riscontrati, è assai diffusa e non di rado elemento costituente essenziale (1). E ritengo anzi che questa orneblenda bruna, elemento certo poco frequente nella generalità delle sabbie alpine, caratterizzi con la sua eccezionale abbondanza in modo speciale le sabbie valsesiane.

Riguardo al microclino, come ho già osservato, dirò ch'esso compare quasi costantemente in quantità apprezzabile nelle sabbie postplioceniche, mentre manca od è decisamente raro in quella pliocenica. Il microclino è abbondantissimo nei graniti della bassa Valsesia (Roccapietra), dove sostituisce interamente l'ortoclasio, ma si trova come elemento frequente e talvolta abbondante anche in forme petrografiche del " gneiss della Strona „ e dei " gneiss-Sesia „. La prima di queste zone non passa nel Biellese, almeno con le sue forme a microclino, ma l'altra vi è largamente sviluppata; e dato questo, mi sembra alquanto strano il fatto che nella sabbia pliocenica il microclino sia così raro. È forse probabile che le forme con microclino, del resto abbastanza limitate anche nel bacino valsesiano, siano ancora più scarse nel tratto biellese della zona dei " gneiss-Sesia „.

---

(1) Vedi: Artini e Melzi, *Ricerche petrografiche e geologiche sulla Valsesia* (" Mem. R. Ist. Lombardo di Sc. e Lett. „; Milano, 1900).

Digitized by Google

Si è fondandomi sopra le considerazioni qui riportate, e su altre di minor peso, che, come ho già enunciato sin da principio, ritengo si possa attribuire alle sabbie postplioceniche in genere, a cominciare sin dalle più antiche, un'origine essenzialmente valsesiana, ed alla sabbia pliocenica, nettamente diversa dalle prime, un'origine più occidentale con miscela scarsissima od addirittura nulla (almeno per la sabbia studiata) con elementi provenienti dalla Valsesia. Tutto poi porta a credere che gli elementi di questa sabbia provengano, se non totalmente, in misura certo prevalente, dal bacino biellese, ossia dalla regione che segue immediatamente verso occidente al bacino valsesiano.

Ed a queste conclusioni generali del mio breve lavoro non credo inutile aggiungere ancora che il confronto coi risultati conseguiti dall'Artini nello studio sopra ricordato, oltre a mettere in evidenza un contrasto perfettamente analogo tra le sabbie plioceniche e quelle postplioceniche in quanto concerne la loro composizione e provenienza, ci permette pure di riscontrare qualche altra notevole somiglianza nei caratteri delle sabbie provenienti dai vari livelli.

Le sabbie di Vicolungo non presentano che scarsissimi carbonati, sia allotigeni che autigeni. La scarsità dei primi è più che naturale, perchè nelle nostre sabbie mancano gli elementi derivanti dalle Prealpi calcaree, che si trovano invece abbondantissimi in alcune delle sabbie di Milano (fra 60 e 120 metri di profondità). La scarsità di carbonati autigeni è probabilmente una conseguenza della prima (1). Ma non è forse privo d'interesse notare che, a somiglianza di quanto l'Artini ha notato in alcuni dei banchi di sabbia profondi fra 150 e 180 m., anche in una delle sabbie di Vicolungo, a profondità non molto diversa, ossia a 138-139 m., si trova una certa quantità di *siderite autigena*. E l'aspetto che questa presenta è assolutamento identico a quello descritto dall'Artini; si tratta cioè di fascetti di cri-

(1) Delle sabbie di Vicolungo esaminate, pochissime dànno qualche traccia di effervescenza col trattamento con acido cloridrico diluito, sia a freddo che a caldo.

Digitized by Google

stallini raggiato-divergenti, con una strozzatura mediana, così da farli rassomigliare a piccoli bozzoli, in cui ordinariamente la parte centrale è abbastanza intensamente colorata in bruno.

La calcite autigena, di rideposizione sotto la zona superficiale di decalcificazione, nelle nostre sabbie è invece assai scarsa.

Uno stato di cose perfettamente analogo a quello rilevato dall'Artini riguardo ai fenomeni di ossidazione superficiale, con produzione di limonite a spese dei silicati ferriferi e conseguente formazione di anfiboli cuspidati, nei primi strati, sino a 50-60 m. di profondità, si nota pure a Vicolungo.

Maggior interesse ha invece la constatazione che anche nelle nostre sabbie, sotto un certo livello, ossia sotto i 120-130 m. di profondità, in istrati quindi che son separati dalla superficie da numerosi banchi d'argilla, compare in quantità gradualmente crescente con la profondità la *pirite autigena*. Si tratta ordinariamente di gruppetti di sferule, grappoliformi, con superficie di solito distintamente cristallina, la cui origine concrezionare appare evidente. Nelle sabbie più profonde, e specialmente in quella pliocenica di Fisrengo, ho notato anzi con molta frequenza cristalli perfetti di pirite di neoformazione, o aggruppamenti di cristalli, con abito costantemente ottaedrico, quali non si sono osservati nelle sabbie milanesi. L'aspetto di questa pirite, che talvolta si presenta in ottaedrini isolati, perfetti, con faccette vivamente lucenti, è quanto mai caratteristico, e la sua presenza, indice di un ambiente nettamente riducente, non si può non collegare con quella, pure frequentissima, di noduli ed arnioni piritosi, del peso anche di parecchi grammi, che si nota nelle argille e nelle marne azzurre del pliocene. Anche il pozzo di Fisrengo, come ricorda il prof. Parona, col suo potente getto di acqua saliente incontrata nel banco pliocenico, ha portato a giorno in abbondanza simili noduli.

Digitized by Google

		7	9	13	15	17	20	21	25	26	30	31
1	Pirite	—	—	8	—	7	—	9	8	9	5	6
2	Quarzo	1	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2
3	Corindone	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10
4	Ilmenite	9	9	8	8	8	9	8	8	8	8	8
5	Magnetite	9	9	7	7	7	9	7	7	7	7	7
6	Rutilo	—	—	—	—	—	10	10	10	10	10	—
7	Carbonati romboedrici	—	—	—	—	—	—	9	7	9	9	9
8	Ortoclasio	6	6	5	5	4	6	4	4	6	3	3
9	Microclino	7	8	9	8	9	9	8	8	8	8	—
10	Plagioclasi sodico-calc.	7	7	7	8	6	8	7	7	8	7	7
11	Pirosseni rombici	7	7	7	8	6	8	6	6	6	7	7
12	„ monoclini	9	9	9	9	9	8	8	7	8	8	8
13	Tremolite	10	—	10	9	10	9	9	9	10	9	9
14	Anfiboli verdi chiari	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	7
15	Orneblenda verde	7	7	7	7	7	6	7	7	6	7	6
16	„ bruna	10	10	8	7	6	7	6	6	6	6	10
17	Glaucofane	7	7	8	7	9	7	7	8	7	8	6
18	Granato	6	7	7	6	6	8	6	6	6	6	7
19	Zircone	9	9	8	9	8	8	8	8	8	8	8
20	Andalusite	—	—	—	—	—	—	—	10	—	10	10
21	Sillimanite	8	8	9	8	9	8	7	8	7	8	—
22	Cianite	—	—	9	9	10	—	9	—	10	10	—
23	Cordierite	—	—	—	—	—	—	9	10	10	—	—
24	Epidoto-zoisite	6	6	6	6	7	7	6	6	6	6	6
25	Piemontite	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—
26	Tormalina	—	—	—	—	—	—	—	10	9	9	—
27	Staurolite	—	—	9	9	—	—	—	—	—	9	—
28	Muscovite	6	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
29	Biotite	7	7	7	7	7	8	8	7	7	6	7
30	Sericite	—	9	9	10	—	—	9	9	9	10	10
31	Cloritoide	10	10	10	10	10	—	10	10	10	10	9
32	Clorite	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
33	Serpentino	9	9	9	9	10	10	9	10	—	10	8
34	Titanite (e leucoxeno)	—	10	10	9	10	10	9	9	9	10	9
35	Spinello	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—
36	Apatite	9	9	10	9	9	8	9	8	9	9	8
37	Pasta felsitica rossa	7	9	9	8	9	7	8	7	8	7	10
38	Pasta di porfirite	—	—	9	10	9	—	9	10	—	—	7

Scala di frequenza (Artini): 1: Copiosissimo. — 2: Copioso. — 3: Abbondante. — 4: Discretamente abbondante. — 5: Molto comune. — 6: Comune. — 7: Piuttosto scarso. — 8: Scarso. — 9: Scarsissimo. — 10: Raro.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIII, DISP. 11ª, 12ª, 13ª E 14ª, 1927-1928

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1928

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Aprile 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Guidi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Boggio e Repossi, che funge da Segretario.

Scusano l'assenza il Presidente Senatore Ruffini e i Soci Sacco e Mattirolo.

Il Segretario legge il verbale dell'adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Socio Somigliana presenta in omaggio all'Accademia una sua *Commemorazione di Carlo Neumann,* fatta all'Accademia dei Lincei, ed una sua Nota *Sulla definizione della gravità normale.*

Il Vice-Presidente presenta quindi una Nota di J. I. Corral, *Nuevas formulas de transformación de coordenadas,* giunta in omaggio all'Accademia, ed un lingotto di alluminio, inviato, pure in omaggio, da E. A. Blanc.

Dietro invito del Vice-Presidente, è stato compilato un Elenco dei posti di Socio della nostra Accademia che risultano disponibili nelle varie categorie: esso viene comunicato ai Soci presenti perchè ne prendano visione e ne tengano conto per eventuali proposte.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 22 Aprile 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci D'Ovidio, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Pochettino, Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci Brondi, Einaudi, Patetta, Cian, Faggi, Luzio, Jannaccone, Solari, Bertoni e Vidari che funge da Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Sacco e Mattirolo.

È letto e approvato il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica che il Governo nazionale ha con suo recente decreto assegnato alla nostra Accademia, in considerazione delle sue benemerenze scientifiche e de' suoi bisogni, un assegno straordinario di L. 100.000: e ciò in seguito alle vive insistenti premure di S. E. il Ministro Fedele, il quale si dimostrò in questa occasione non solo, come è sempre, vigile custode e tutore dell'alta cultura, ma anche particolarmente affezionato alla Accademia di Torino. Le disposizioni, inoltre, dal Ministro date al Direttore generale dell'Accademia e Biblioteche perchè gli interessi della nostra Accademia vengano sempre tenuti in particolare considerazione, lo additano in modo evidente alla nostra riconoscenza. Il Consiglio d'Amministrazione provvederà in sua prossima seduta alla ripartizione dell'assegno ministeriale in rispondenza dei varii bisogni dell'Accademia.

Il Presidente continua rilevando come le cerimonie inaugurali riprese lo scorso anno hanno avuto il benefico effetto di

Digitized by Google

risvegliare, oltre che nel Ministero, nei poteri pubblici cittadini l'interesse per l'Accademia, alla quale, infatti, il Podestà di Torino ha pure assegnato un contributo *annuo* di L. 10.000.

Propone infine, e la Classe unanime approva plaudendo, che si esprima a S. E. il Ministro Fedele e all'on. Podestà il ringraziamento dell'Accademia ora per la prima volta convocata dopo le munifiche elargizioni. Egli, del resto, per suo conto, non ha mancato di esprimere già al Capo del Governo per telegramma, e all'on. Podestà per lettera, la riconoscenza dell'Istituto.

Il Presidente informa infine che la votazione fatta nella adunanza del 5 febbraio di una terna per la costituzione del Consiglio provinciale dell'Economia, deve essere sottoposta a revisione in seguito a lettera di S. E. il Prefetto De Vita, il quale, in base a disposizioni emanate dal Ministero dell'Economia nazionale, con sua circolare 10 marzo, n. 7470, richiede che la terna sia fatta d'accordo con la locale Accademia di Agricoltura.

Sull'argomento prendono la parola i Soci Patetta e Somigliana; infine si delibera di dare mandato di fiducia al Presidente della nostra Accademia perchè egli si metta, per la designazione della terna, d'accordo col Presidente della Accademia di Agricoltura.

Il Presidente accetta.

Chiusa la seduta pubblica, si passa in seduta privata e alla nomina del Presidente e del Vice-Presidente per il triennio 1928-1931 (20-IV-1928—19-IV-1931).

Risultano eletti Parona Presidente, De Sanctis Vice-Presidente. — Le due nomine s'intendono fatte salvo l'approvazione sovrana.

Gli Accademici Segretarii:
Oreste Mattirolo
Giovanni Vidari.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Aprile 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Parona Vice-Presidente, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Socio Guidi.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica una lettera diretta dal Presidente dell'*École Centrale des Arts et Manufactures* all'Accademia nostra, nella quale si fa presente, che nel giorno *6* di maggio p. v., alle ore 10, si celebrerà il Cinquantenario scientifico dell'illustre Émile Picard, Membro corrispondente del nostro Sodalizio; e si prega l'Accademia a voler farsi rappresentare alla cerimonia. Il Presidente invita i Soci matematici a volersi accordare per rispondere degnamente all'invito rivolto all'Accademia.

Il Presidente dà quindi la parola al Socio Garelli, il quale presenta, per la inserzione negli *Atti*, una Nota dal titolo: *Sulla ossidazione di alcune idrazine terziarie.*

La Nota è redatta dal Prof. Giua.

Digitized by Google

Nel nome del Socio MAIORANA viene quindi presentata altra Nota del Dott. O. SPECCHIA, avente il titolo seguente: *Sopra l'applicazione delle lamine prismatiche di Fabry e Perot nella misura dell'indice di rifrazione dei liquidi.*

Il Socio PEANO, nel nome e per incarico del Socio corrispondente GIOVANNI VACCA, comunica, per la inserzione negli *Atti,* una Nota la quale ha per titolo: *Sul principio della discesa di Fermat e sulle dimostrazioni dell'esistenza degli irrazionali quadratici.*

Il Socio Direttore della Classe SOMIGLIANA presenta una Nota dell'Ingegnere PAOLO VOCCA, nella quale si descrive un: *Apparecchio per dividere la circonferenza in qualunque numero di parti uguali.* Egli ne discorre brevemente facendo rilevare l'utilità che l'ingegnoso apparecchio può presentare nelle sue varie applicazioni.

Terminata così la presentazione delle Note destinate agli *Atti,* il Segretario comunica, nel nome del Socio corrispondente BIAGIO LONGO, in omaggio, una Nota da lui pubblicata in Pisa negli *Atti della Società Toscana di Scienze naturali,* e ne discorre brevemente, in considerazione della storica importanza del soggetto trattato, che fa riconoscere *indubbiamente* a G. B. AMICI la scoperta importantissima della fecondazione nelle piante per mezzo del *tubetto pollinico,* da lui pure scoperto. La Nota del LONGO porta il titolo: *Sopra un cimelio della scoperta di G. B. Amici sulla fecondazione delle piante.*

Il cimelio ritrovato dal LONGO consiste in una elegante artistica preparazione in cera, opera di LUIGI CALAMAI, nella quale, sotto la direzione dell'AMICI stesso, furono riprodotti tutti i particolari microscopici della scoperta, che fu poscia onestamente riconosciuta anche dai botanici tedeschi allo scienziato italiano.

Terminata così anche la presentazione degli omaggi, il Presidente invita gli Accademici a voler considerare, se non

Digitized by Google

sia il caso di procedere alla elezione di nuovi Soci, residenti e corrispondenti, destinati a coprire i posti rimasti vacanti. Egli legge la tabella seguente, nella quale sono riferiti i dati relativi al numero presente dei Soci, in relazione a quello che dovrebbe essere se tutti i posti fossero coperti:

		POSTI		
		in organico	occupati	disponibili
Soci Nazionali residenti . . .	N.	20	17	3
Soci Nazionali non residenti . .	„	10	9	1
Soci Stranieri	„	10	5	5
Soci Corrispondenti N. 100, suddivisi:				
1. Matematiche pure . . .	„	14	11	3
2. „ applicate . .	„	10	9	1
3. Fisica generale	„	14	11	3
4. Chimica generale . . .	„	16	8	8
5. Mineralogia, Geologia, Paleontol.	„	18	9	9
6. Botanica	„	12	9	3
7. Zoologia, Anatomia e Fisiologia	„	16	13	3
	N.	100	70	30

Dopo lettura del documento qui riferito, essendosi dimostrati concordi tutti i Soci presenti, si delibera di procedere nella prossima adunanza, seguendo le disposizioni dell'articolo 10 del Regolamento accademico, alla presentazione delle proposte per parte di ciascuno dei Soci; restando fermo che la votazione avrà poi luogo in una adunanza seguente.

Per i Soci nazionali residenti verranno messi a disposizione *2* posti, e così ciascun Socio avrà diritto di presentare, volendolo, 6 nomi. Di Soci stranieri si mettono a disposizione *3* posti, e per i Soci corrispondenti si dichiarano liberi quanti posti si crederà opportuno di coprire, sentito il parere dei Soci competenti.

Digitized by Google

LETTURE

Sul principio della discesa di Fermat e sulle dimostrazioni dell'esistenza degli irrazionali quadratici.

Nota del Socio corrispondente GIOVANNI VACCA

1. — Mi propongo in questa Nota di dimostrare che il principio della discesa indefinita di Fermat (da lui adoperato per scoprire e dimostrare, per la prima volta, molti difficili teoremi dell'aritmetica) si riduce immediatamente ad una particolare applicazione del principio di induzione completa; e che le critiche mosse da Angelo Genocchi all'applicazione fatta da Eulero e da Lagrange del principio di Fermat, non sembrano completamente esatte, dovendosi piuttosto ritenere che Eulero e Lagrange abbiano intuito, senza però enunciarla, la riduzione che qui si espone.

Fermat aveva invece dimostrato il suo principio per mezzo di un postulato premesso da Campano da Novara al suo Commento al VII libro di Euclide.

Il principio di *induzione completa* è stato poco adoperato nei secoli scorsi; è stato enunciato abbastanza chiaramente da Francesco Maurolico nel 1558. E da Maurolico ne apprese l'uso, e lo applicò metodicamente, Pascal, nel 1659. Formulato più completamente da Bernoulli, soltanto nella seconda metà del secolo XIX fu posto a base dell'aritmetica. Gli *Arithmetices Principia* del 1889, di G. Peano sono il primo trattato in cui il principio di induzione completa è adoperato come uno dei postulati da cui si deducono tutte le proposizioni aritmetiche. Tale metodo è da allora in poi generalmente seguìto.

Il principio della *discesa* invece, ovvero il postulato di Campano, a cui esso si riduce, si è forse presentato sotto forma geometrica, per la prima volta ai matematici greci, i quali scopri-

Digitized by Google

rono la dimostrazione della irrazionalità delle radici quadrate dei numeri non quadrati.

Questo principio fu adoperato forse da Teeteto, prima che fosse stata completata la teoria del massimo comun divisore, e la teoria dei numeri primi. Credo di esser riuscito, in quanto segue, a ricostruire con verosimiglianza i primi ragionamenti sull'irrazionalità delle radici dei numeri non quadrati, a cui accenna Platone. Queste dimostrazioni mi sembrano interessanti perchè permettono di giungere direttamente alla conclusione, senza l'uso dei teoremi relativi alla teoria dei numeri primi, o del massimo comun divisore. Tali dimostrazioni finora mancavano, e la mancanza apparve evidente allorchè le proposizioni dell'aritmetica sono state ordinate nelle varie edizioni del *Formulario matematico* di G. Peano, secondo l'ordine delle idee contenute nel loro enunciato.

2. — Aristotele (*Anal. pr.*, I, 23, 41, 26-27) accenna alla prima dimostrazione, dovuta, se non a Pitagora, certo ai suoi immediati discepoli, della incommensurabilità della diagonale e del lato di un quadrato.

Questa dimostrazione, per assurdo, conduce al risultato seguente: se $\sqrt{2}$ fosse un numero razionale, esisterebbe un numero intero pari e dispari ad un tempo. Essa dovrebbe quindi coincidere con la P 10 del libro X di Euclide, nel quale sarebbe stata interpolata (1).

3. — Platone (*Theaetetus*, 147 D) riferisce che il suo maestro, Teodoro da Cirene, aveva dimostrato per il primo, l'esistenza di altri irrazionali, che cioè i lati dei quadrati aventi l'area di 3,5, fino a 17 piedi quadrati, sono incommensurabili con un piede (cioè che $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, fino a $\sqrt{17}$ sono irrazionali).

Platone non indica quale via abbia seguìto Teodoro; ne sono state tentate perciò varie ricostruzioni.

---

(1) Cfr. Sir Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, 1921, p. 91.

Digitized by Google

4. — Eulero nel 1775 (2), aveva osservato che: " *propositis duabus quantitatibus* A *et* B, *earum relatio, seu ratio definitur, dum quaeruntur duo numeri integri* α *et* β, *iique minimi ut fiat* $\alpha A = \beta B$; *unde si quantitates* A *et* B *fuerint inter se commensurabiles, istos numeros* α *et* β *semper accurate assignare licebit; sin autem sint incommensurabiles, numeros* α *et* β *ita dare licebit, ut discrimen inter formulas* αA *et* βB *sit minimum, vel ita parvum ut propius ad aequalitatem inter has formulas* αA *et* βB *accedi nequeat, nisi pro* α *et* β *maiores numeri adhibeantur* ".

Questa osservazione conduce ad una definizione aritmetica del massimo comun divisore di due quantità positive che si può scrivere in simboli così:

$$a, b \in Q \,.\, \supset \,.\, D(a, b) = 1_1 [\mathrm{mod}\,(n a + n b) \sim 1 0].$$

Allora l'irrazionalità di un numero a si può esprimere dicendo che $D(a, 1) = 0$.

Quindi, con facili ragionamenti, che sono compendiati nelle seguenti eguaglianze, si ha subito:

$$D(1, \sqrt{3}) = D(2 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 3) = (2 - \sqrt{3})\, D(1, \sqrt{3}) = 0.$$

$$D(1, \sqrt{17}) = D(17 - 4\sqrt{17}, \sqrt{17} - 4) =$$
$$= (\sqrt{17} - 4)\, D(\sqrt{17}, 1) = 0.$$

A questi ragionamenti aritmetici corrispondono altrettanti ragionamenti su semplicissime figure geometriche. C. A. Bretschneider (3) ha indicato nel 1879 una dimostrazione per $\sqrt{3}$. Gli an-

---

(2) G. Peano, *Formulaire de Mathématiques*, tome IV, Additions, Torino, Bocca, 1903, p. 322, prop. 31 ; Euleri, *Opusc. Anal.*, II, 1785, p. 91, exhib. 1775, aug. 4.

(3) C. A. Bretschneider, *Synthetischer Beweis der Incommensurabilität zweier Geraden, die sich wie* $\sqrt{3} : 1$ *verhalten.* Grunert's Archiv, 1879, Bd. 3, p. 440. — La dimostrazione è ingegnosa, ma si può alquanto semplificare. La ricostruzione di Zeuthen, *Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles*, " Bull. de l'Acad., etc. ", Copenhagen, 1915, p. 342, coincide presso a poco con quella da me data nel 1903.

Digitized by Google

tichi conoscevano dimostrazioni geometriche semplici per $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$. Ecco una dimostrazione per $\sqrt{17}$. Se nel triangolo ABC rettangolo in B, il lato $AB = 4BC$, sarà $AC^2 = 17BC^2$. Allora con centro A e raggio AC si tagli sul prolungamento di AB un segmento $AE = AC$. Sia D il punto d'incontro delle altezze del triangolo AEC. Il triangolo BDE è simile al triangolo dato BAC, e quindi

$$BD = 4\,BE.$$

Inoltre

$$BE = AC - 4\,BC.$$

Quindi

$$DE = CD = BC - 4\,BE = 17\,BC - 4\,AC.$$

Quindi ogni comune misura di AC, BC misura altresì BE, DE. Ma questi segmenti sono più piccoli di AC, BC, ed il procedimento si può ripetere indefinitamente. Quindi tale comune misura è nulla, cioè non esiste.

(Il lettore può costruire facilmente questa e la seguente figura).

5. — È facile anzi pensare ad una dimostrazione geometrica della irrazionalità della radice di qualunque numero intero positivo non quadrato, simile a quella che Teeteto potrebbe aver dato.

Se a è un numero intero positivo non quadrato, e si ha un triangolo ABC rettangolo in A, avente i cateti legati dalla relazione $AC^2 = a\,AB^2$, e poichè a non è quadrato, esso sarà compreso tra due quadrati interi consecutivi:

$$r^2 < a < (r+1)^2,$$

e perciò:

$$r\,AB < AC < (r+1)\,AB.$$

Se quindi dal segmento $AN = (r+1)\,AB$ si stacca un segmento $AM = AC$, il rimanente $MN = (r+1)\,AB - AC$, ed inoltre $MN < AB$.

Se ora si costruisce un triangolo MNP, simile ad ABC, sarà:

$$MP\ MN = AC\ AB,$$

Digitized by Google

e perciò:

$$MP = AC[(r+1)AB - AC]\,AB = (r+1)AC - aAB.$$

Allora MN, MP hanno la stessa comune misura di AB, AC, ma sono più piccoli, ed il processo si può ripetere in infinito, di guisa che tale misura è necessariamente nulla.

6. — L'interesse di questa ricostruzione sta in ciò, che quando si liberi la dimostrazione dall'impalcatura geometrica, come ora faremo, rimane una pura dimostrazione aritmetica.

Tutte le dimostrazioni aritmetiche finora note sono in sostanza contenute nei libri aritmetici di Euclide, e si riconducono a considerazioni sul massimo comun divisore tra due numeri, od alla decomposizione dei numeri in fattori primi. La dimostrazione seguente evita invece la considerazione di concetti non contenuti nell'enunciato. In essa adopero soltanto una proposizione premessa come postulato da Campano da Novara nel suo commento al libro VII di Euclide. Questo postulato è implicito non solo, come ha rilevato A. Genocchi (*) nella VII *P*33, ma anche nella VII *P*2. In questa proposizione si descrive la proprietà dell'algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore di due numeri, per mezzo di sottrazioni successive. Tartaglia nel suo commento a questa proposizione, osserva che è implicito perchè l'operazione abbia un termine, il postulato IV del Campano: " *Se adimanda che sia concesso niuno numero poter*

(*) A. Genocchi, *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano, Note analitiche.* "Annali di Scienze matematiche e fisiche „, di B. Tortolini, Roma, 1855, p. 306 (p. 95 dell'estr.). Questo scritto di A. Genocchi contiene una lunga analisi critica del metodo della discesa. Sullo stesso argomento egli scrisse nuovamente, senza modificare le sue opinioni, allorchè fu pubblicata nel 1879, nel " Bull. „ di Boncompagni, XII, pp. 737-740, la *Relation des nouvelles découvertes en la science des nombres*, inviata da Fermat ad Huygens il 14 agosto 1659 (cfr. Huygens, *Œuvres*, t. 2, pp. 456-462).

Questo scritto del Genocchi fu recentemente ristampato in: Fermat, *Œuvres*, Suppl. aux tomes I-IV, Paris, Gauthier-Villars, 1922, pp. 151-156.

Digitized by Google

esser diminuito in infinito „ (5), ovvero, secondo il testo latino del CAMPANO: " *nullum numerum in infinitum posse diminui* „ (6).

Questo stesso criterio d'impossibilità figura anche nella dimostrazione della *P*31 del libro VII. Uno scoliaste greco (7) aggiunge per illustrarla la frase:

ἐν ἀριθμοῖς γὰρ ἀπειρία κατὰ τὸ ἔλαττον οὐκ ἔστι.

Però Campano, come A. Genocchi ha osservato, sembra il primo che abbia sentito il bisogno di considerare questa affermazione come un postulato, e lo abbia adoperato nella dimostrazione di difficili teoremi della teoria dei numeri.

7. — Vogliamo ora dimostrare che: " *se un quadrato divide un quadrato, anche la base divide la base* „ (EUCLIDE, VIII, *P*14).

Sia perciò a un numero non quadrato. Esisterà allora un intero positivo tale che

$$r^2 < a < (r+1)^2.$$

Se ora esistessero due interi positivi p, q, tali che $aq^2 = p^2$, si avrebbe:

$$r^2 q^2 < p^2 < (r+1)^2 q^2,$$

ossia:

$$rq < p < (r+1)q. \tag{1}$$

Esisterà quindi un numero intero q_1, tale che

$$p + q_1 = (r+1)q, \quad \text{con} \quad 0 < q_1 < q. \tag{2}$$

Moltiplico la (1) per p ed ho:

$$rpq < aq^2 < (r+1)pq;$$

---

(5) TARTAGLIA, *Euclide Megarense philosopho, etc.*, Venetia, 1565, carta 134 verso, libro settimo, Petitione 4; e commento alla P2, carta 137, recto.

(6) CAMPANO, nel commento ad Euclide (stampato per la prima volta in Venezia nel 1482), car. 94 verso dell'edizione di Parigi del 1516.

(7) EUCLIDIS *Elementa*, ed. Heiberg, Lips., Teubner, vol. V, 1888, *Scholia in Elem.*, p. 382.

Digitized by Google

e dividendo per q, sarà:

$$r p < a q < (r+1) p ;$$

quindi esisterà un numero p_1, tale che:

$$a q + p_1 = (r+1) p, \quad \text{con} \quad 0 < p_1 < p ; \tag{3}$$

dalle (2) e dalle (3), moltiplicate per p e per q, si deduce:

$$p^2 + p q_1 = p^2 + p_1 q , \quad \text{e quindi:} \quad p q_1 = p_1 q ;$$

ed elevando a quadrato ed osservando che:

$$a q^2 = p^2, \quad \text{si ha infine:} \quad a q_1^2 = p_1^2.$$

Abbiamo così trovato altri due numeri interi positivi, p_1, q_1, minori di p, q rispettivamente, che soddisfanno alla stessa relazione. Potremo ripetere lo stesso ragionamento e trovarne altri due ancora più piccoli, e così in infinito. Ma ciò contraddice al postulato di Campano, dunque non possono esistere due numeri p, q, ecc.

Si noti che in questa dimostrazione, oltre al postulato sopradetto, non si adoperano altri teoremi che quelli enunciati e dimostrati prima di quello in cui figura questa proposizione, nell'ordine adottato nella quinta edizione del *Formulario* di G. Peano (Torino, 1905-1908, p. 42).

8. — Si può ripetere una dimostrazione analoga per dimostrare che *se un cubo divide un cubo, anche la base divide la base*, che è la *P*16 del libro VIII di Euclide; occorre però servirsi della proposizione precedente.

Se a è un intero positivo, e non è cubo, esisteranno due cubi consecutivi tali che:

$$r^3 < a < (r+1)^3.$$

Esistano ora, se è possibile, due interi positivi p, q, tali che

$$p^3 = a q^3.$$

Digitized by Google

Sarebbe allora: $rq < p < (r+1)q$; (1)

quindi esisterebbe un intero q_1, tale che:

$$p + q_1 = (r+1)q, \quad \text{con} \quad 0 < q_1 < q;$$

quindi: $p^2 + pq_1 = (r+1)pq$; (2)

ma poichè: $apq^3 = p^4$, ossia $apq \times q^2 = (p^2)^2$,

in virtù della proposizione precedente, apq dovrà essere un quadrato. Quindi esisterà un intero k tale che:

$$k^2 = apq, \quad \text{e quindi:} \quad kq = p^2.$$

Ma dalla (1), moltiplicando per p:

$$rpq < p^2 < (r+1)pq;$$

quindi: $rpq < kq < (r+1)pq$;

e dividendo per q: $rp < k < (r+1)p$.

Esisterà quindi un intero p_1, tale che:

$$0 < p_1 < p \quad \text{e} \quad k + p_1 = (r+1)p;$$

e moltiplicando per q:

$$kq + p_1 q = (r+1)pq,$$

ossia: $p^2 + p_1 q = (r+1)pq.$ (3)

Dalla (2) e dalla (3) si ha:

$$pq_1 = p_1 q$$

e quindi elevando a cubo e sostituendo:

$$p_1^3 = aq_1^3.$$

Ma il ragionamento si può ripetere infinite volte, il che

Digitized by Google

contraddice al post. di Campano. Quindi non esistono due interi *p*, *q*, ecc.

Esistono dimostrazioni analoghe per qualsivoglia potenza intera e positiva.

9. — Queste proposizioni sono quindi dimostrate con lo stesso metodo della discesa infinita che Fermat dichiarava di aver finalmente scoperto "*non sine operosa et laboriosa meditatione*„ e dichiarava di altissima importanza: "*hoc nempe demonstrandi genus miros in arithmeticis suppeditabit progressus*„. Questa opinione è avvalorata da Lagrange: "*Le principe de la démonstration de Fermat est un des plus féconds dans toute la théorie des nombres, et surtout dans celle des nombres entiers*„ (8).

E questo stesso postulato che, sotto forma leggermente diversa, adopera Gauss, nella dimostrazione del § 13 delle sue *Disquisitiones arithmeticae*, ed anch'egli aggiunge che questo stesso metodo gli servirà, come difatti gli serve, "*ad multo recondidiora enodanda*„ nel seguito della sua opera.

La stessa proposizione VII *P*2 di Euclide è il punto di partenza delle lezioni sulla teoria dei numeri di P. G. Lejeune Dirichlet (9), e delle recentissime lezioni di E. Landau (10), i quali autori ammettono implicitamente il postulato senza enunciarlo.

(8) Diophanti *Arithmetica*, ed. Fermat, Tolosa, 1670, p. 339. — *Œuvres* de Fermat, t. 2, p. 431; t. 3, p. 271. Nella "Revue de Métaphysique et de Morale„, Paris, Colin, 1911, anno 19°, pp. 30-33 e 252-257 ho dato altre notizie sul principio della *descente infinie* di Fermat. Cfr. Lagrange, "Mém. de l'Acad. de Berlin„ pour 1777, p. 140.

(9) P. G. Lejeune Dirichlet, *Lezioni sulla teoria dei numeri*, trad. da E. Faifofer, Venezia, 1881, p. 6.

(10) E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Leipzig, Hirzel, 1927, v. I, p. 57. È notevole che in quest'opera l'A. sente il bisogno di introdurre alcuni simboli già adoperati dai cultori di logica matematica. Così egli scrive *a|b* per indicare che *a* è divisibile per *b*. Ora G. Peano, nei suoi *Mathematices Principia novo methodo exposita*, Torino, 1889, aveva introdotto la notazione *a∏b* per indicare la stessa relazione. L'esposizione del Landau avrebbe guadagnato in semplicità e chiarezza se avesse adoperato qualche altro simbolo logico.

Digitized by Google

10. — È infine da osservare che il postulato di Campano coincide in sostanza col IV postulato introdotto da Mario Pieri nel suo sistema di postulati per l'aritmetica [11]. M. Pieri ha osservato che il postulato di Campano permette di dimostrare il principio d'induzione completa; ammesso infatti che ogni classe esistente di interi abbia un minimo, dico che se è data una classe di numeri s a cui appartenga lo 0, e si ammetta che se un numero x appartiene ad s vi appartiene anche il successivo, tutti i numeri appartengono ad s. Infatti sia u la classe dei numeri che non appartengono ad s. Se esistono degli u, la classe u ha allora un minimo x, diverso da zero (per ipotesi zero appartiene ad s). Ma allora il numero precedente di x appartiene ad s, e in virtù dell'ipotesi x appartiene ad s; ma appartiene anche ad u, quindi non appartiene ad s. Quindi la classe u è nulla, cioè tutti i numeri appartengono ad s.

Inversamente, assumendo il principio d'induzione, il postulato di Campano [12], si dimostra così:

a) Se u è una classe di numeri e ad essa appartiene lo zero, esso è il minimo della classe u;

---

[11] M. Pieri, *Sopra gli assiomi aritmetici*, « Boll. dell'Acc. Gioenia », in Catania, serie 2ª, 1908. Cfr. altresì C. Burali-Forti, *Logica matematica*. 2ª edizione, Milano, Hoepli, 1919, p. 344. Non condivido l'opinione dell'A. che la proprietà commutativa della somma del prodotto di due interi non si possa dimostrare col postulato di Campano. Basta a tale scopo la bella Dm. di Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, 2e édition, Paris, 1908, p. 1, che ho riprodotto nella « Rev. de Méth. et de Morale », 1911, pp. 33, 256.

[12] La prop. di Campano coincide colla § min Pl' 8, in G. Peano, *Formulario matematico*, V, Torino, Bocca, 1908, p. 47. Ivi però non è data la dimostrazione. Anche dei due teoremi di Euclide, VII, 14, 16 sopra dimostrati è dato soltanto l'enunciato, senza dimostrazione (ibid., p. 42).

È notevole che la prop. di Campano è adoperata nella dimostrazione della prop. § mlt Pl' 1 (ibid., p. 53), la quale è dovuta a Stieltjes, *Essai sur la théorie des nombres*, Paris, 1895, p. 2.

R. Dedekind, nel suo scritto: *Was sind und was sollen die Zahlen*, Leipzig, 1888 (tradotto col titolo: *Essenza e significato dei numeri* da O. Zariski, Roma, A. Stock, 1926; n° 5 della « Collezione per la storia e la filosofia delle Matematiche », diretta da F. Enriques), dà una dimostrazione della prop. di Campano assai complicata.

Digitized by Google

b) Se si ammette per ipotesi che ogni classe u di numeri a cui appartiene il numero x ha un minimo, dico che anche ogni classe u a cui appartiene $x+1$ ha parimenti un minimo.

Se infatti non solo $x+1$, ma anche x appartiene ad u, per ipotesi, u ha un minimo.

Se invece x non è u, la classe formata aggiungendo x alla classe u, per ipotesi, ha un minimo che chiamerò m. Se $m = x$, allora $x+1$ è il minimo degli u. Se non è $m = x$, allora

$$m = \min u.$$

Quindi in ogni caso, la classe u, se contiene $x+1$ ha un minimo.

Per mezzo delle *a*), *b*) e del principio di induzione si ha così la dimostrazione del postulato di Campano. In simboli:

$$u \in \mathrm{Cls'}\, \mathrm{N}_0 \,.\, \exists\, u \,.\supset.\, \min u \in \mathrm{N}_0 .$$

Dem.
$$u \in \mathrm{Cls'}\, \mathrm{N}_0 \,.\, 0 \in u \,.\supset.\, 0 = \min u \qquad (1)$$

$$x \in \mathrm{N}_0 : u \in \mathrm{Cls'}\, \mathrm{N}_0 \,.\, x \in u \,.\supset_u .\, \min u \in \mathrm{N}_0 :\supset:$$
$$u \in \mathrm{Cls'}\, \mathrm{N}_0 \,.\, x+1 \in u \,.\, x \in u \,.\supset.\, \min u \in \mathrm{N}_0 :$$
$$\text{——————} \,.\, x \sim \in u \,.\supset.\, \min (u \cup \iota x) \in \mathrm{N}_0 \qquad (2)$$

$$Hp(2) \,.\, x \sim \in u \,.\, \min (u \cup \iota x) = x \,.\supset.\, \min u = x+1 \qquad (3)$$

$$\text{——————} \,.\, \min (u \cup \iota x) \sim = x \,.\supset.\, \min u = \min (u \cup \iota x) \qquad (4)$$

$$Hp(2) \,.\, (2) \,.\, (3) \,.\, (4) \,.\supset.\, u \in \mathrm{Cls'}\, \mathrm{N}_0 \,.\, x+1 \in u \,.\supset_u .\, \min u \in \mathrm{N}_0 \qquad (5)$$

(1) . (5) . Induct . ⊃ . P.

11. — Possiamo ora infine osservare che il metodo della *discesa* di Fermat si può ricondurre direttamente al principio d'induzione.

Osserviamo perciò che essendo u una proprietà del numero x, l'affermazione: " nessun numero intero e positivo x gode della proprietà u „, è dimostrata col principio d'induzione, se si dimostra che 1 non è un u; e che se x non è u. anche $x+1$ non è u.

Digitized by Google

A questa seconda condizione si può dare una forma leggermente diversa: basta dimostrare che se nessuno dei numeri compresi fra 1 ed x (cioè $1 \cdots x$) non è un u, nemmeno $x + 1$ è un u. Allora

(applicando una regola di logica: $\sim b \supset \sim a \,.=.\, a \supset b$),

questa seconda condizione dice se il numero $x + 1$ è un u, qualche numero minore di x è parimenti un u. E questo è appunto quanto dimostra Fermat per poter applicare il metodo della *discesa*.

Così per dimostrare che nessun cubo è somma di due cubi interi e positivi, egli dimostra che se un cubo maggiore di 1 fosse somma di due cubi interi e positivi, esisterebbe un cubo minore di esso, parimenti intero e positivo, anch'esso somma di due cubi. Ciò val quanto dire che fissato il numero $x + 1$, maggiore di 1, se nessuno dei cubi dei numeri $1 \cdots x$ è somma di due cubi, neppure $(x + 1)^3$ è somma di due cubi. Da cui, per il principio d'induzione, risulta che nessun cubo intero e positivo è somma di due cubi interi e positivi.

Si noti che avendo interpretato in questo modo il metodo della *discesa*, occorre aggiungere che 1 non è somma di due cubi, secondo l'osservazione fatta da EULER nella sua *Algebra* e da LAGRANGE, e contro l'opinione di Legendre e di Genocchi (l. c.).

Quindi si può supporre che Euler e Lagrange, senza ben rendersene conto, abbiano intravisto che il metodo della discesa implica l'uso del principio d'induzione, e che quindi la critica di A. Genocchi esige qualche riserva.

Digitized by Google

Sopra l'applicazione delle lamine prismatiche di Fabry e Perot nella misura dell'indice di rifrazione dei liquidi.

Nota del Dott. O. SPECCHIA
presentata dal Socio nazionale Q. Majorana.

Tra le numerose disposizioni sperimentali, che applicano i fenomeni di interferenza prodotti da sottili lamine prismatiche alla determinazione degli indici di rifrazione dei liquidi, accenno alla disposizione di Williams-Brace, dalla quale, in un certo senso, deriva il mio metodo che fa oggetto di questa Nota.

I due autori citati disponevano il liquido, di cui volevano determinare l'indice, tra due lastre piano-parallele formanti un prisma di piccolissimo angolo, e proiettavano su una regione A del prisma, mediante una lente, l'imagine di una fenditura parallela allo spigolo del prisma. Con una disposizione ottica opportuna, la luce riflessa dal prisma era proiettata sulla fenditura di uno spettroscopio.

Ottenevano così un sistema di frange (*cannelures*) parallele alle righe di Fraunhofer, delle quali le frange corrispondenti, per es., alle lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 soddisfano alle condizioni:

$$1) \qquad 2 n_1 e = N\lambda_1 \; ; \qquad 2 n_2 e = (N+p)\lambda_2$$

(dove n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione del liquido relativi alle λ_1 λ_2; e è lo spessore del prisma nella regione A considerata, e N è l'ordine di interferenza).

Le condizioni scritte mostrano come la determinazione di n_1 ed n_2 dipendano dalla conoscenza di N e di e.

Per determinare N i due autori procedevano così: facendo subire al prisma, perpendicolarmente allo spigolo, uno sposta-

Digitized by Google

mento dalla posizione A ad una posizione B, contavano il numero s di frange che passavano nella regione dello spettro corrispondente alla λ_1. Se e' è il nuovo spessore relativo alla regione B, le condizioni (1) diventano:

$$2 n_1 e' = (N + s)\lambda_1 \; ; \qquad 2 n_2 e' = (N + s + q)\lambda_2 .$$

Da queste e dalle (1) si ricava:

$$N = \frac{p s}{q - p},$$

dove tutti i termini, ad eccezione di N, sono noti.

Più difficile è la determinazione degli spessori. Si può effettuarla, o direttamente, conoscendo l'angolo del prisma e la posizione di A e di B; oppure, più vantaggiosamente, indirettamente, facendo in modo che il prisma racchiuda, in basso, il liquido in esame, in alto, dell'aria, il cui indice di rifrazione è noto, ed osservando i due sistemi di frange relativi ai due mezzi.

Il metodo descritto presenta indubbiamente molti vantaggi. Oltrechè consente di raggiungere, senza difficoltà, una grande precisione nella determinazione degli indici, permette anche la ricerca della legge di dispersione della sostanza in esame. Presenta però lo svantaggio di esigere l'uso di uno spettroscopio a grande potere dispersivo. Williams infatti si serviva di un reticolo di Rowland con 550 tratti per millimetro e 3 metri di distanza focale.

Il metodo che passo ora a descrivere, e che m'ha dato ottimi risultati, presenta sugli altri metodi, compreso quello di Williams-Brace, il vantaggio di un'estrema semplicità della sua realizzazione. Esso applica i fenomeni di interferenza presentati dalle lamine sottili argentate, osservate per trasmissione: fenomeni, com'è noto, scoperti e studiati da Fabry e Perot.

Le frange che si ottengono con queste lamine presentano la seguente caratteristica: trattandosi di un fenomeno di interferenza ad onde multiple, se la sorgente luminosa è monocromatica, i massimi di intensità sono localizzati su delle righe finis-

Digitized by Google

sime molto brillanti, separate da intervalli completamente oscuri. La finezza e l'intensità di queste righe permettono di poterle puntare con la massima precisione.

L'apparecchio di cui mi son servito era un prisma costituito da due lastre di vetro a facce piane, semiargentate su una faccia, e con le facce semiargentate affacciate. Queste erano separate da una guarnizione di gomma disposta in modo da costituire il bordo di una vaschetta prismatica, di cui le facce eran le lastre semiargentate. L'angolo del prisma era variabile, e le sue variazioni erano ottenute manovrando quattro viti che, agendo sui due vetri, assicuravano inoltre l'adesione di questi sulla guarnizione di gomma. Le dimensioni delle lastre erano di cm. 10×3; lo spessore medio della vaschetta di qualche decimo di millimetro; l'angolo del prisma era variabile, nelle mie esperienze, intorno ai $10'$.

Indicheremo con α l'angolo del prisma, e supponiamo che il mezzo interposto fra le facce argentate sia l'aria, il cui indice di rifrazione assumiamo, in prima approssimazione, uguale all'unità.

Osserviamo le frange sotto l'incidenza normale e in luce monocromatica. Se l'apparecchio è ben regolato esse sono rettilinee, parallele allo spigolo ed equidistanti. L'intervallo Δx fra due frange consecutive, contato secondo la normale alle frange, è tale che in esse il cammino ottico varia di λ. Tra questa variazione e la variazione di spessore Δe esiste la relazione:

$$2\,\Delta e = \lambda.$$

D'altra parte, essendo α molto piccolo, si ha ancora:

$$\frac{\Delta e}{\Delta x} = \alpha;$$

quindi l'equidistanza ϵ delle frange è data da

$$\epsilon = \Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

Supponiamo che α si aggiri, come nelle mie esperienze, intorno ai $10'$ (per precisare poniamo $\alpha = 0{,}003$ radianti) e

Digitized by Google

che λ sia uguale a 5460 U. A (riga verde del mercurio). L'equidistanza risulta uguale a mm. 0,091.

Se il mezzo interposto è diverso dall'aria, l'equidistanza ϵ' risulta uguale a $\frac{\lambda}{2n\lambda}$, dove n è l'indice di rifrazione del nuovo mezzo. Se questo è l'acqua, come nelle mie esperienze, essendo il suo indice a 20°, relativamente all'aria e alla riga verde del mercurio, in base alle misure da me effettuate, uguale a 1.3345, ϵ' risulta uguale a 0,068.

Se il prisma è pieno d'acqua solo fino a una certa altezza, esso è solcato da due sistemi di frange rettilinee e parallele allo spigolo, posti uno al disopra dell'altro: per il primo sistema l'equidistanza è di 0,0,091; per il secondo di 0,068.

Questi due sistemi di frange possono paragonarsi a due sistemi di divisioni tracciate sulla lamina prismatica, divisioni che indicano spessori geometrici rispettivamente multipli di $\frac{\lambda}{2}$ e di $\frac{\lambda}{2n}$: la linea di separazione fra i due sistemi essendo rappresentata dal menisco del liquido.

Da quanto precede si deduce come si possa effettuare, col dispositivo descritto, la misura dell'indice di rifrazione di un liquido. Basta contare quante frange relativamente all'aria e quante relativamente al liquido sono contenute in una stessa regione del prisma: il rapporto fra i due numeri dà l'indice cercato, riferito all'aria e alla radiazione monocromatica impiegata. Da questa determinazione si può risalire immediatamente all'indice assoluto, essendo noti con estrema precisione gli indici di rifrazione dell'aria. La ricerca della legge di dispersione si può effettuare, operando successivamente con le varie radiazioni monocromatiche dell'arco a mercurio: radiazioni che, come osserva il Fabry, si prestano egregiamente allo scopo, data la loro distribuzione nello spettro visibile. Naturalmente la ricerca andrebbe integrata con qualche misura nella regione meno rifrangibile dello spettro, nella quale l'arco a mercurio è privo di radiazioni.

La precisione del metodo descritto dipende e dal numero delle frange contate e dalla precisione con cui possono essere

Digitized by Google

misurate le frazioni di un intervallo fra frangia e frangia. Le frange di Fabry e Perot si prestano bene allo scopo, date le loro caratteristiche di finezza e di luminosità. Se il potere riflettente delle superfici argentate è elevato, e la radiazione impiegata ha un notevole coefficiente di finezza, tali frange risultano ancora molto nette, anche se osservate con un microscopio a forte ingrandimento, e la misura dell'eccesso frazionario può ancora effettuarsi con grande precisione.

Dato il notevole spessore della lamina prismatica (qualche decimo di mm., ciò che corrisponde ad un ordine di interferenza un po' elevato, perchè il fenomeno di interferenza sia netto, oltre che operare con un fascio quasi rigorosamente parallelo (l'angolo del cono dei raggi incidenti deve essere dell'ordine del grado) è opportuno limitare l'osservazione su una piccola regione dell'apparecchio interferenziale; ciò che del resto si realizza facilmente, adoperando uno strumento di osservazione di piccola apertura.

Dipendentemente da questa circostanza, ed essendo necessario ai fini della precisione delle misure contare un numero elevato di frange che non potevano essere contenute se non in una regione piuttosto estesa della lamina, l'apparecchio interferenziale descritto era disposto sul carrello di una macchina a dividere, mentre il microscopio era fissato ad un supporto indipendente. La vite della macchina permetteva non solo di far subire all'apparecchio uno spostamento normale allo spigolo e portare quindi successivamente nel campo di osservazione le varie regioni del prisma, ma anche la misura dell'eccesso frazionario.

Inoltre, nelle misure, preferivo iniziare il computo delle frange, partendo da una coincidenza esatta fra due righe dei due sistemi: coincidenza che era facile ottenere, facendo subire, mediante le viti di regolaggio, piccolissime variazioni all'angolo del prisma. Il computo delle frange veniva effettuato finchè non si raggiungeva una nuova coincidenza esatta o una coincidenza approssimata. In questo caso, che era il caso generale, la macchina a dividere permetteva la misura dell'eccesso frazionario.

Per il puntamento ho preferito di munire lo strumento di

Digitized by Google

osservazione, in luogo di un reticolo, di un diaframma opaco semicircolare, a bordo rettilineo, che occultava metà del campo; ed era questo bordo che portavo a coincidere con un bordo di ciascuna frangia.

Qualora non si richieda una grande precisione e si abbia di mira solo la determinazione approssimata dell'indice medio di rifrazione, il dispositivo descritto si presta bene allo scopo. Basta utilizzare le frange di combinazione prodotte dalle varie radiazioni dell'arco a mercurio, e osservare, nei due sistemi, le coincidenze dei massimi relativi.

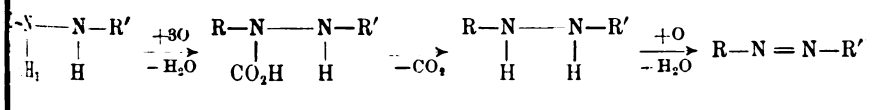
Digitized by Google

Sulla ossidazione di alcune idrazine terziarie.

Nota di MICHELE GIUA
presentata dal Socio nazionale residente Felice Garelli.

Gli studi recenti di St. Goldschmidt (1) hanno messo in evidenza il comportamento caratteristico verso gli agenti ossidanti di alcune idrazine terziarie, le quali possono dare origine a composti contenenti un atomo di azoto bivalente, ossia a « radicali liberi ». Avendo altra volta avuto occasione di studiare alcune idrazine terziarie alifatico-aromatiche (2), contenenti due gruppi arilici (di cui uno sostituito) e un gruppo alchilico (metilico), ho indagato ora sull'azione di alcuni agenti ossidanti — ossido di mercurio, biossido di piombo, ipoazotide — verso le seguenti idrazine: α-metil-α-fenil-2,4-dinitro-5-metilfenilidrazina, α-metil-α-fenil-2,6-dinitro-5-metilfenilidrazina e α-metil-α-fenil-2,4-dinitro-5-clorofenilidrazina.

Rispetto agli agenti ossidanti ora indicati, il comportamento di queste idrazine è davvero notevole, in quanto si ha l'eliminazione del gruppo metilico unito all'azoto. Poichè la reazione avviene senza sviluppo di gas e in condizioni assai blande, non mi sembra probabile che il gruppo metilico venga ossidato a carbossile e quindi si abbia la eliminazione di anidride carbonica, con formazione di un idrazo- e successivamente di un azo-composto, come si potrebbe dedurre dallo schema seguente:



(1) « Ber. chem. Gesell. », *55*, 628 (1922).
(2) « Gazz. chim. ital. », *50*, II, 328 (1920); *53*, 846 (1923).

Digitized by Google

Trattando le dette idrazine terziarie con ossido di mercurio si ottiene realmente un azo-composto del tipo ora scritto, in cui R ed R′ rappresentano i due gruppi arilici, di cui uno sostituito, ma la reazione avviene più probabilmente secondo lo schema:

$$\begin{matrix} R-N & -- & N-R' \\ | & & | \\ CH_3 & & H \end{matrix} \xrightarrow[-CH_3OH]{+O} R-N=N-R'$$

La formazione dello stesso azo-composto si ha trattando l'idrazina terziaria con ipoazotide in soluzione di etere anidro. In tal caso è però necessario ammettere, dato l'andamento della reazione, la formazione di un composto di sostituzione molto instabile, che per eliminazione successiva di acido nitroso, passerebbe poi ad azo-derivato, secondo lo schema:

$$\begin{matrix} R-N & -- & N-R' \\ | & & | \\ CH_3 & & H \end{matrix} \xrightarrow{+N_2O_4} \begin{matrix} R-N & -- & N-R' \\ | & & | \\ NO_2 & & H \end{matrix} \xrightarrow[-HNO_2]{} R-N=N-R'$$

Più complessa si è dimostrata la reazione del biossido di piombo con l'α-metil-α-fenil-2,6-dinitro-5-metilfenilidrazina.

Trattando l'idrazina col biossido di piombo in presenza di cloroformio, ad una temperatura di 50-60° per circa 15′, si ottiene, oltre all'azo-composto, un aznitrosoderivato. Ora è noto che gli aznitrosocomposti si formano per disidratazione degli o-nitroidrazocomposti (1), oppure per riduzione degli o-nitroazoarili (2) e o-nitroazossiarili (3). La formazione dell'aznitrosocomposto con un ossidante come il biossido di piombo si deve ricercare dunque nell'azione specifica di quest'ultimo composto, che, pur non appartenendo agli ossidi del tipo dell'acqua ossigenata, potrebbe in parte agire come riducente sul nitroazocomposto formatosi. È questa una spiegazione che mi pare possa interpretare l'andamento della reazione, per quanto non sia da escludere l'influenza della costituzione dell'idrazina stessa.

---

(1) Willgerodt e Hermann, « Journ. prakt. Ch. », *40*, 252 (1889).
(2) Cusmano, « Gazz. chim. ital. », *51*, I, 66 (1921).
(3) Zinin, « Ann. Chem. », *114*, 222 (1861).

Digitized by Google

Parte sperimentale.

Preparazione dell' α-metil-α-fenil-2,4-dinitro-5-metilfenilidrazina. — Fu seguìto il metodo indicato in una Nota precedente (1), ma impiegando una quantità maggiore di sostanze. Gr. 22,7 di γ-trinitrotoluene, sciolti in 250 cc. di alcool etilico, si trattano a poco a poco con gr. 18,9 di metilfenilidrazina as. distillata di fresco; dal liquido colorato intensamente in rosso-bruno si separa un'abbondante massa resinosa, che dopo poco solidifica completamente; pesa gr. 20 e allo stato greggio fonde fra 110-127°; dopo cristallizzazione dall'alcool fonde a 140-141°.

Azione dell'ossido di mercurio sull'idrazina. — Gr. 5 dell'idrazina precedente, disciolti in 30 cc. di cloroformio anidro, si trattano con gr. 15 di ossido di mercurio giallo e si riscalda debolmente a b. m. per circa 15'. Dopo filtrazione si ottiene un liquido colorato in rosso-cupo; si concentra a piccolo volume e dopo aggiunta di etere di petrolio si separa una sostanza colorata in rosso-granato, che cristallizza dall'alcool in lamelle fusibili a 117-118°.

Gr. 0,1611 di sostanza dettero gr. 0,3212 di CO_2 e gr. 0,0589 di H_2O.
Gr. 0,1986 „ „ „ cc. 34,3 di N a 17° e 738 mm.

Calcolato per $C_{13}H_{10}O_4N_4$:	Trovato
C % : 54,52	54,38
H „ : 3,52	4,06
N „ : 19,58	19,74

Questa sostanza corrisponde al 2,4-dinitro-5-metilazobenzene, da me ottenuto per altra via (2).

Azione dell'ipoazotide sull'idrazina. — Gr. 5 di idrazina, disciolti in 200 cc. di etere anidro si trattano con 10 cc. di ipoazotide, raffreddando con ghiaccio. Dopo riposo di circa 12 ore

(1) « Gazz. chim. ital. », *53*, 170 (1923).
(2) « Gazz. chim. ital. », *53*, 171 (1923).

Digitized by Google

si raccolgono grossi cristalli colorati in rosso-granato, che presentano i caratteri dell'azocomposto precedente.

Preparazione dell' α-metil-α-fenil-2,6-dinitro-5-metilfenilidrazina. — Gr. 22,7 di β-trinitrotoluene, sciolti in 250 cc. di alcool etilico, si trattano con gr. 18,9 di metilfenilidrazina as.; per raffreddamento si separa una sostanza colorata in giallo-aranciato (pesa gr. 25), che cristallizzata dall'alcool, fonde a 147°.

Azione dell'ipoazotide sull'idrazina. — Gr. 5 di idrazina, disciolti in 250 cc. di etere anidro, si trattano con cc. 10 di ipoazotide, raffreddando con ghiaccio e agitando vigorosamente. Dopo alcune ore incomincia a separarsi un'abbondante sostanza colorata in giallo-rossastro, che cristallizza dall'alcool in lamelle fusibili a 148-149°. Una miscela di questa sostanza con l'idrazina precedente fonde a 120-125°, mentre non si ha abbassamento del punto di fusione nella miscela di questo corpo col 2,6-dinitro-5-metilazobenzene, descritto in una Nota precedente ed ottenuto per altra via (1).

Gr. 0,1551 di sostanza dettero gr. 0,3102 di CO_2 e gr. 0,0486 di H_2O.
Gr. 0,1899 „ „ „ cc. 32,7 di N a 16° e 743 mm.

Calcolato per $C_{13}H_{10}O_4N_4$:	Trovato
C % : 54,52	54,55
H „ : 3,52	3,51
N „ : 19,58	19,88

Azione del biossido di piombo sull'idrazina. — Gr. 5 di idrazina, disciolti in 50 cc. di cloroformio, si trattano con gr. 15 di biossido di piombo e si riscalda debolmente a b. m. per circa 10'; dopo filtrazione si concentra il liquido colorato intensamente in rosso-oscuro e si aggiunge etere di petrolio fino ad intorbidamento. Col riposo si separa un'abbondante massa cristallina, che greggia fonde verso i 130°; essa è costituita da un miscuglio di due composti, di cui uno colorato in giallo-chiaro e l'altro in giallo-rossastro. Con ripetute cristallizzazioni frazionate dall'al-

(1) " Gazz. chim. ital. „ *53*, 170 (1923).

Digitized by Google

cool e dal benzene si riesce a separare la sostanza colorata in giallo-rossastro, fusibile a 148-149°, che corrisponde all'azocomposto precedente, dalla sostanza colorata in giallo-chiaro che fonde a 154° e che corrisponde all'ossido N di fenilpseudoazimidometilnitrobenzene, descritto in una Nota precedente (1). Infatti, una miscela di questa sostanza con l'aznitrosocomposto cennato, ottenuto per via diversa, fonde a 154°.

Gr. 0,2128 di sostanza dettero gr. 0,4481 di CO_2 e gr. 0,0742 di H_2O.
Gr. 0,2308 „ „ „ cc. 41,5 di N a 15° e 745 mm.

Calcolato per $C_{13}H_{10}O_3N_4$:	Trovato
C % : 57,75	57,43
H „ : 3,73	3,90
N „ : 20,80	20,89

Azione del biossido di piombo sull'α-metil-α-fenil-2,4-dinitro-5-clorofenilidrazina. — Gr. 3 dell'idrazina, preparata secondo le indicazioni di una Nota precedente (2) e disciolta in 30 cc. di cloroformio si trattano con gr. 8 di biossido di piombo e si riscalda a b. m. per circa 15'. Dopo riposo prolungato si filtra e il liquido si concentra a piccolo volume, indi si aggiungono 20 cc. di alcool assoluto e 10 cc. di etere anidro. Lentamente si separa una sostanza colorata in rosso-granato, che cristallizza dall'alcool in lamelle lucenti, fusibili a 149-150° in un liquido denso, colorato in rosso-bruno.

Gr. 0,1994 di sostanza dettero cc. 32 di N a 14° e 739 mm.

Calcolato per $C_{12}H_7O_4N_4Cl$:	Trovato
N % : 18,30	18,56

La sostanza, che corrisponde al 2,4-dinitro-5-cloroazobenzene, si scioglie nei comuni solventi organici con una intensa colorazione rossa.

Ossidando l'idrazina in soluzione acetica con perhydrol si ottiene un composto fusibile a 206-208°, che non contiene più alogeno. Esso non fu ulteriormente studiato.

---

(1) * Gazz. chim. ital. „ *53*, 170 (1923).
(2) * Gazz. chim. ital. „ *55*, 665 (1925)

Digitized by Google

Di alcuni prodotti ottenuti in base alle reazioni indicate in questa Nota ho determinato il peso molecolare col metodo crioscopico, usando come solvente il benzene. I risultati ottenuti sono indicati nella tabella seguente:

COMPOSTO	Concentrazione %	Abbassamento osservato	PESO MOLECOLARE	
			Trovato	Calcolato
α-Metil-α-fenil-2,4-dinitro-5-metil-fenilidrazina	0,2479	0°,04	309	302
	0,7225	0°,120	299	
2,4-Dinitro-5-metilazobenzene .	0,5302	0°,110	240	286
	1,1410	0°,240	237	
	1,9480	0°,410	237	
2,6-Dinitro-5-metilazobenzene .	0,5440	0°,105	259	286
2,4-Dinitro-5-cloroazobenzene .	0,5200	0°,093	280	306

Torino. — Laboratorio di Chimica organica
della R. Scuola d'Ingegneria.

Digitized by Google

Apparecchio per dividere automaticamente la circonferenza in qualunque numero di parti uguali.

Nota dell'Ing. PAOLO VOCCA
presentata dal Socio nazionale residente Carlo Somigliana.

Il problema della divisione immediata della circonferenza in qualsiasi numero di parti uguali sembra a tutta prima di ben difficile soluzione. Ma dopo molti tentativi io son riuscito

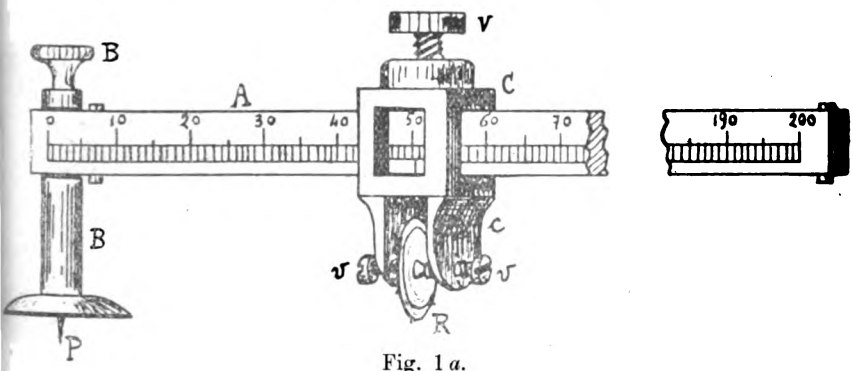


Fig. 1 *a*.

a trovarne una semplicissima, concretata nei due tipi di apparecchi per disegno, che qui descrivo.

Le figg. 1 *a* e 2 *a* riguardano il primo tipo — semplicissimo — di apparecchio divisore; le figg. 1, 2, 3, 4 *b* il secondo tipo. Entrambi sono basati sullo stesso elementare principio, pur funzionando in modo diverso.

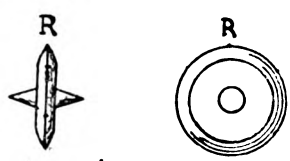


Fig. 2 *a*.

Il principio suddetto è il seguente: Si abbia una rotina il cui *raggio* sia misurato da *n unità intere* (per es.: *n* millimetri)

Digitized by Google

e sia essa divisa *nello stesso numero n di parti uguali* (le quali possano *lasciar traccia* sul foglio da disegno): se si fa *svolgere*, *sviluppare* tale rotina lungo una circonferenza di *raggio m*, $m + 1$, $m + 2$, ecc. *unità intere*, le n divisioni uguali di quella imprimeranno m, $m + 1$, $m + 2$, ecc. volte la loro traccia sulla detta circonferenza, la quale resterà così divisa in m, $m + 1$, $m + 2$, ecc., *parti uguali*.

Infatti: stando tra loro le circonferenze come i raggi, la rotina si *svolgerà* sulla circonferenza $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+2}{n}$, ecc. volte; ma in *ogni sviluppo* vi sono n divisioni uguali; dunque: le divisioni *totali* che si avranno sulla circonferenza saranno

$$\frac{m}{n} \times n = m, \quad \frac{m+1}{n} \times n = m + 1, \quad \frac{m+2}{n} \times n = m + 2, \text{ ecc.}$$

Come si vede, tutto il principio si riduce, in sostanza, a costruire — una volta per sempre — un *arco costante* $= 2\pi$ (la circonferenza della rotina è $2\pi n$, ed essendo n le sue divisioni uguali, ognuna di queste varrà $\frac{2\pi n}{n} = 2\pi$, *qualunque sia n*): tale arco 2π *sviluppato successivamente* lungo una circonferenza di raggio m, $m + 1$, ecc. (ossia di lunghezza $2\pi m$, $2\pi(m + 1)$, ecc.) vi sarà compreso *esattamente* m, $m + 1$, ecc. volte

$$\left(\frac{2\pi m}{2\pi} = m, \quad \frac{2\pi(m+1)}{2\pi} = m + 1 \text{ ecc.}\right).$$

Trovato dunque il principio, è facile immaginarne le attuazioni pratiche. La fig. 1 *a* ne indica una:

Un'asta graduata (per es. in millimetri) *A* reca una punta *P*, sostenuta da un bottone *B* e intorno a cui l'asta stessa può rotare; lungo quest'ultima può correre un cursore *C* (con " linea di fede " per le letture) munito di una vite di arresto *V* e di due guance *c* recanti — imperniata su due punte *v* — la rotina *R*, *base del sistema*. Questa — che in figura è stata disegnata di 7 mm. di raggio (n) e divisa in 7 parti uguali (v. fig. 2 *a*) — porta 7 (n) *puntine* equidistanti, appena appena sporgenti dall'orlo, e può ruotare intorno al proprio asse per attrito sulla carta, incidendo

Digitized by Google

via via — con le sue puntine — dei forellini su questa, quando l'asta *A* si faccia girare intorno a *P*. I perni *v* sono entrambi a vite, allo scopo di permettere le rettifiche e la " messa a zero " dell'apparecchio.

Con una sbarretta lunga solo 200 mm. e usando il *millimetro* come *unità di misura* (raggio di *R*: *n millim. interi*; divisioni su *R*: *n*; divisioni su *A*: *millimetri*) si può dividere immediatamente una circonferenza — ossia si può *tracciarla divisa* — in un numero *qualunque* di parti uguali *compreso* fra *2* e *200*. Usando invece come *unità di misura* il *mezzo millimetro* (raggio di *R*: *n mezzi millimetri interi* $= \frac{n}{2}$ *millimetri interi*; divisioni su *R*: *n*; divisioni su *A*: *mezzi millimetri*, ossia: 0,5 millim. = *1 unità*, 1 millim. = *2 unità*, ecc.) la stessa lunghezza della sbarretta *A* permetterà di dividere la circonferenza in *qualsiasi* numero di parti uguali *compreso 2* e *400*. Non ci sarà che da leggere su *A*, con la " linea di fede " portata da *C*, il numero *intero m* delle *parti* in cui si vuol divisa la circonferenza; stringere *V*; porre *P* al centro della circonferenza stessa e ruotare lo strumento intorno a *P*, avendo cura di fare una lieve pressione su *R* affinchè essa si *svolga senza slittare* sulla carta. Si avrà senz'altro la circonferenza tracciata per mezzo dei suoi *m* forellini equidistanti, che la dividono quindi in *m* parti uguali.

Dalla descrizione fatta si vede come, con tale apparecchio, il *raggio m*, $m + 1$, ecc. della circonferenza da dividere va *crescendo* col numero *m*, $m + 1$, ecc. delle divisioni desiderate, mentre l'*arco* di ognuna di queste rimane *costante* ($= 2\pi$) essendo costante l'arco della rotina *R*.

Ma si può immaginare un sistema che, pur attuando lo *stesso principio-base*, permetta di tracciare tutte le divisioni su una circonferenza di *raggio costante*, variando allora la *lunghezza di quelle* in ragione inversa del loro *numero*.

Tale apparecchio è quello rappresentato nella fig. 1*b* in sezione e nelle figg. 2, 3, 4*b* nei particolari costruttivi.

C è un *cono* di apertura *rigorosamente stabilita* e solidale con la base *N*, la quale reca al centro la punta *P* e all'orlo la punta *P'* (onde evitare che l'apparecchio abbia a spostarsi

Digitized by Google

sul foglio); *ff* sono due fori inclinati e diametrali fatti nella base, allo scopo di potere *illuminare* attraverso uno e *vedere* attraverso l'altro la punta *P* e poterla quindi introdurre al centro della circonferenza da dividere. Lungo le guide *G* (e mosso preferibilmente a mezzo di una vite micrometrica *V*, che può essere

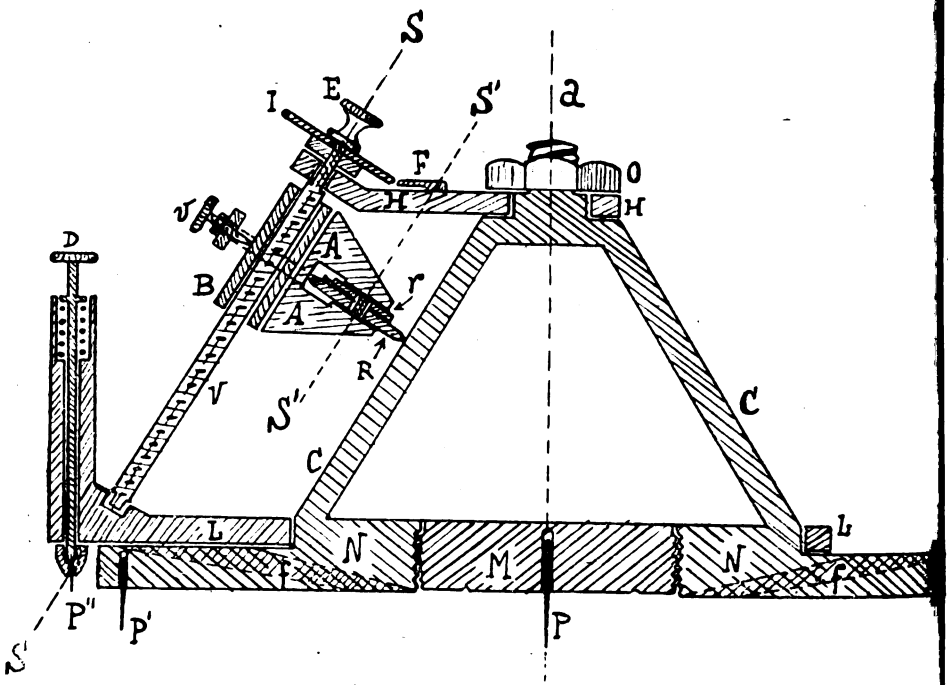


Fig. 1 *b*.

di passo noto e costante e avere un tamburo *I* diviso in parti di rotazione, lette con " linea di fede " su *F*) scorre — *parallelamente alla generatrice* del cono — un cursore *B* recante un pezzo *A* il quale a sua volta porta imperniata la ruota *R*. Questa è premuta contro il cono da due mollette (v. fig. 3 *b*), ma può allontanarsene (per mezzo della vite *v*) quando, con *V*, si debba fare scorrere il sistema *B-A-R* lungo la generatrice del cono. Quando la *R* venga tenuta aderente e premuta contro il cono, e a tutto il sistema *L-V-H* recante la *R* stessa si faccia compiere una *rotazione* intorno all'asse *a*, ossia intorno al cono te-

Digitized by Google

nuto fermo, la R stessa girerà per attrito intorno al proprio centro, *sviluppando* la propria periferia sulla circonferenza della *sezione retta* corrispondente del cono.

Ora, se R ha il raggio di n *unità intere* ed è stata divisa in n parti uguali (non più individuate, ora, da n puntine equidistanti e sporgenti, ma per mezzo di un acconcio sistema di n *scatti* od *arresti* equidistanti: per es. con un " nottolino „ premuto contro una rotina r a n denti, come in fig. 3*b*), la

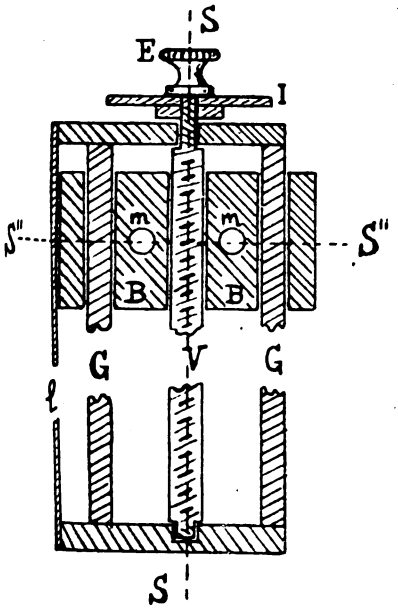


Fig. 2*b*.

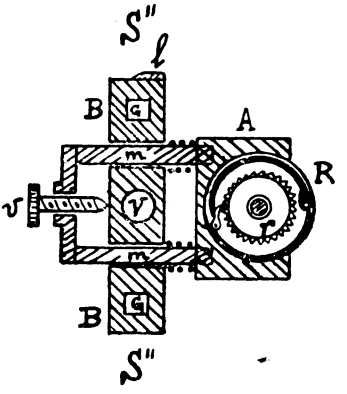


Fig. 3*b*.

lunghezza dell'*arco* di *ogni sua divisione* tra uno scatto e l'altro è sempre 2π; se quindi si fa sviluppare essa rotina R lungo una *sezione retta* del cono il *raggio della quale* sia di m unità intere, si avranno in totale m scatti o arresti di R. E poichè con R, nella *rotazione intorno al cono*, è solidale tutta la parte *L-V-H* recante la punta P'', premendo quest'ultima *ad ogni arresto* di R, per mezzo del bottone D, si segnerà con un forellino sulla carta la divisione corrispondente allo spostamento angolare fatto da P'' stessa intorno all'asse a del cono.

Qui dunque le divisioni verranno fatte tutte su una *circonferenza fissa* (di raggio PP''): ciò che fa *variare l'ampiezza* (e quindi, in ragione inversa, il *numero*) delle divisioni su tale

Digitized by Google

circonferenza è il trovarsi la R a rotare in *punti diversi* della generatrice del cono.

Al cono è comodo dare una semi-apertura di 30°: si avrà allora che, per ottenere la *variazione* di *una unità* nel *raggio della sezione retta* del cono stesso, bisognerà spostare di *due unità* la ruota R lungo la generatrice. Una graduazione l, allora (v. figg. $2b$ e $4b$), *parallela* alla generatrice stessa, permetterà — leggendo su di essa $2m$ *unità intere* — di conoscere il raggio m della sezione retta lungo la cui circonferenza bisognerà fare svolgere la R per avere, con P', m divisioni.

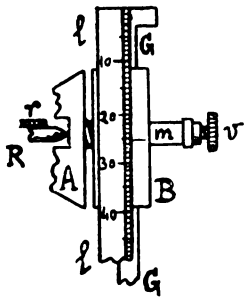


Fig. 4*b*.

L'uso del primo apparecchio è molto più semplice e rapido e presenta minori possibilità di errori. Con quello, infatti — ammessa esatta la costruzione della rotina R e delle sue divisioni — si ha un errore possibile nella *chiusura* della circonferenza, per un'errata stima nella lettura di m su A; ma tale errore si può subito eliminare, correggendo leggermente tale lettura e ripetendo l'operazione fino ad avere una chiusura perfetta. Col secondo invece, a questa possibilità di errore si aggiungono quelli accidentali *ad ogni scatto* e *ad ogni pressione* su P'' fatta con D. Inoltre, un eventuale errore costruttivo *nelle divisioni* di R, col primo apparecchio influisce in modo *costante* e *indipendente dal numero delle divisioni* da eseguire, essendo l'*arco tracciato costante*; mentre col secondo apparecchio, esso ha effetto *variabile* col *numero delle divisioni* richieste.

Il primo apparecchio può anche essere semplificato usando un comune ma robusto compasso: al posto della punta mobile o del tiralinee di questo si potrà applicare un'asticciuola recante la rotina R. La lettura, allora, del raggio m potrà farsi su una comune riga millimetrata, misurando — in *millimetri* o *mezzi-millimetri*, ecc. secondo l'unità usata per R — la distanza fra la *punta fissa* del compasso e l'*orlo* sottile della ruota R stessa.

Evidentemente, dovendo con tali apparecchi eseguire un *piccol* numero di divisioni (da 2 a $10 \div 15$), sarà preferibile divi-

Digitized by Google

dere la circonferenza nel *doppio* o *triplo,* ecc. numero di parti e considerare poi queste *di due in due, di tre in tre,* ecc.

È anche chiaro inoltre che il limite nel numero di divisioni eseguibili, imposto dalle dimensioni dello strumento, è superabile per *numeri multipli* di quelli compresi in detto limite; per esempio, volendo, con la sbarretta considerata prima e permettente di dividere fino a 200, dividere una circonferenza in 210 parti, basterà dividerla prima in 105 parti; quindi, divisa una di queste per *metà,* si ripeterà l'operazione *cominciando* da tale *punto di mezzo*: ogni successiva divisione precedentemente tracciata verrà così a sua volta divisa *per metà* e si avranno quindi $105 \times 2 = 110$ parti uguali. Con tale metodo però non potrà esser fatto un numero di divisioni superiore al *limite* e che sia *numero primo.*

***

Tutti gli apparecchi per l'attuazione pratica del principio fondamentale da me trovato e qui descritti, sono stati, fin dal 1927 da me brevettati in Italia e all'estero; in tali brevetti è, insieme, considerata l'applicazione — per mezzo di opportuni adattamenti meccanici — dello stesso principio alle *macchine per dividere,* alle *macchine per fresare ruote dentate,* ecc.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Maggio 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: GRASSI, SOMIGLIANA, PANETTI, PONZIO, SACCO, HERLITZKA, POCHETTINO, BOGGIO, GARELLI, REPOSSI e il Segretario MATTIROLO.

Scusano la loro assenza il Presidente RUFFINI e i Soci D'OVIDIO e GUIDI.

Il Segretario legge il verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Non essendovi comunicazioni di omaggi da parte della Presidenza, il Socio PANETTI chiede la parola per presentare, per la inserzione negli *Atti*, una Nota del Prof. Giuseppe ALBENGA, dal titolo: *A proposito di un teorema di Volcovitch*, e ne discorre brevemente.

Il Socio POCHETTINO presenta quindi per la pubblicazione negli *Atti* due Note: la prima, della dott. M. COSSI, ha per titolo: *Alcune esperienze su la riflessione metallica*; della seconda sono autori le signorine: G. ALIVERTI e A. ROSTAGNI e si riferisce a: *Misure di elettricità atmosferica*.

Terminata la presentazione delle Note, il Presidente, rife-

Digitized by Google

rendosi all'Ordine del giorno (comma 5°), legge l'articolo 10 del Regolamento accademico, nel quale sono regolarmente indicate le modalità che devono regolare la nomina dei Soci della Reale Accademia; dopodichè prega i Soci presenti di voler comunicare, per schede firmate, i nomi che intendono possano essere presi in considerazione per la futura votazione, alla quale non saranno presentati altro che i nomi che ottennero nella presentazione odierna almeno tre voti.

Dopo la votazione l'adunanza è dichiarata chiusa.

Digitized by Google

LETTURE

A proposito di un teorema di Volcovič.

Nota del Socio corrispondente Prof. GIUSEPPE ALBENGA
presentata dal Socio nazion. residente M. Panetti.

Nella seduta del 25 luglio 1927 Volcovič comunicò all'Accademia delle Scienze di Parigi, insieme con una sua dimostrazione, un teorema che, adottando la terminologia di Culmann, di regola usata dai cultori della scienza delle costruzioni, può formularsi così (1):

Per la trave perfettamente incastrata agli estremi, se si trascura l'influenza del taglio, la retta di chiusa del diagramma dei momenti flettenti è la retta baricentrica coniugata della verticale nel sistema antipolare definito dalle masse

$$dw = \frac{dz}{EJ}$$

(cioè dai pesi elastici considerati nella teoria dell'ellisse di elasticità) (2) proiettate sulla curva limite della superficie semplice dei momenti, sé:

dz è la lunghezza dell'elemento di trave,

E è il modulo di Young,

(1) Wolkovitch, *Sur une interprétation géométrique du théorème de Castigliano dans un cas particulier,* « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences », 1927, II, p. 244.

(2) Volcovič preferisce scrivere il peso elastico sotto la forma $\frac{ds \cos\alpha}{EJ}$, dove ds è l'elemento d'arco della curva limite della superficie semplice ricordata ed α è l'angolo che la tangente a questa curva nel punto geneico fa con la fondamentale di riferimento, che conviene prendere parallela all'asse della trave.

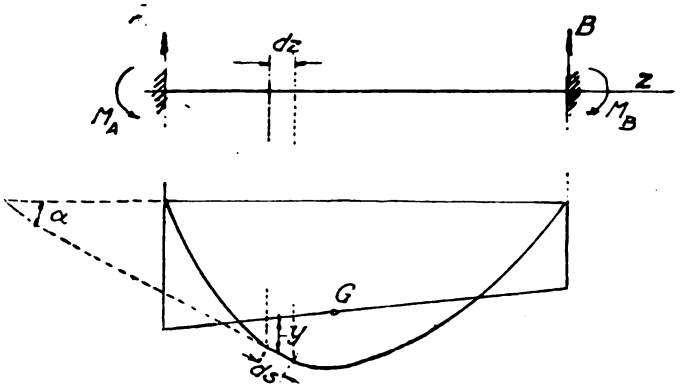
Digitized by Google

J il momento d'inerzia della sezione trasversale corrente rispetto all'asse neutro.

Volcovič dimostrò il suo teorema partendo dal principio del minimo lavoro: ha qualche interesse il dedurne una nuova dimostrazione immediata dalla teoria dell'ellisse di elasticità.

***

Sia la trave rappresentata in figura, incastrata perfettamente agli estremi: se fosse elastico un solo elemento della



trave, lungo dz, immaginando abolito l'incastro di sinistra e detto M il momento flettente in corrispondenza dell'elemento elastico, si troverebbe come rotazione dell'estremo libero:

$$d\varphi = M dw$$

e come spostamento verticale dello stesso estremo:

$$d\eta = Mz\, dw.$$

Poichè tutta la trave è elastica, se gli incastri sono perfetti, otterremo, per le relazioni ora scritte, le due equazioni di elasticità:

(1) $$0 = \int_0^l d\varphi = \int_0^l M dw$$

Digitized by Google

e

$$0 = \int_0^l d\eta = \int_0^l Mz\, dw. \tag{2}$$

Detta H la distanza polare ed y la ordinata generica del diagramma dei momenti flettenti, è:

$$M = Hy.$$

Introducendo questa espressione nella (1) e nella (2) otteniamo subito:

$$0 = \int_0^l y\, dw \tag{1}$$

e

$$0 = \int_0^l zy\, dw. \tag{2}$$

Queste due equazioni esprimono il teorema di Volcovič:

la prima ci dice che la retta di chiusa del diagramma dei momenti flettenti è baricentrica per le masse dw distribuite lungo la curva che limita la superficie semplice dei momenti;

la seconda che questa retta di chiusa ha direzione coniugata con la verticale.

La determinazione della retta di chiusa del diagramma dei momenti flettenti, utilizzando le relazioni ora trovate si fa nel modo migliore per via grafica, mediante costruzioni che non è il caso di indicar qui, tanto sono ovvie.

Ed è appena necessario osservare come il procedimento qui svolto abbia una molto stretta analogia con quello di Eddy per gli archi, come si vede subito confrontando le considerazioni qui accennate con quelle svolte nella Nota di Camillo Guidi, dal titolo: *Contributo alla teoria degli archi elastici* [1].

La teoria dell'ellisse di elasticità dà anche mezzo di tener conto dell'influenza delle tensioni tangenziali.

---

[1] "Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino", vol. XLIII, anno 1907-8.

Digitized by Google

Misure di elettricità atmosferica.

Nota di G. ALIVERTI e A. ROSTAGNI
presentata dal Socio nazionale resid. A. Pochettino.

Nei mesi di agosto del 1926 e del 1927 effettuammo misure di elettricità atmosferica presso l'Istituto A. Mosso al Col d'Olen (m. 2900 s. m.) (*). Ci servimmo principalmente di un apparecchio costruito nel laboratorio dell'Istituto Fisico, secondo il modello di C. T. R. Wilson (1), con le innovazioni introdotte da Lutz (2), che ne rendono più sicuro il funzionamento, e qualche ulteriore modificazione costruttiva, intesa ad agevolarne il trasporto e il rapido montaggio, in rapporto alle esigenze delle misure di campagna.

Con l'apparecchio di Wilson, come è noto, si misura separatamente la carica indotta su un piatto metallico isolato esposto al campo elettrico atmosferico, e la corrente che giunge ad esso. Il valore della corrente letto direttamente dipende naturalmente in modo essenziale dal valore del gradiente di potenziale in prossimità del piatto: gradiente che dipende dalla posizione dell'apparecchio, ed avrebbe il valore normale soltanto se il piatto fosse a livello del suolo e l'osservatore in una buca sottostante per modo da non turbare l'andamento delle superficie equipotenziali. Sollevandocisi nell'aria le superficie equipotenziali si addensano intorno all'apparecchio e il gradiente cresce; in

(*) Ringraziamenti vivissimi dobbiamo al chiar.mo Prof. A. Herlitzka, Direttore dell'Istituto, per la cortese e larga ospitalità.

(1) Wilson, « Proc. of the Cambridge Phil. Soc. », vol. 13, 1905-1906. Id., « Proc. Roy. Soc. of London », A, 80, 1908, p. 537.

(2) Lutz, « Berichte der Kgl. Bayer. Akademie der Wissensch. », 1911.

Digitized by Google

corrispondenza cresce la corrente, poichè la conducibilità non varia in modo apprezzabile.

Questo, che a priori non si potrebbe escludere, fu da noi controllato in una serie di misure sulla torretta dell'Istituto Fisico, nelle quali si variava l'altezza dell'apparecchio: per un innalzamento di un metro il gradiente variava in media da 4.10^{-2} a 8.10^{-2} U. E. S. $cm.^{-1}$ e la corrente da $1{,}3.10^{-6}$ a $2{,}5.10^{-6}$ U. E. S. $cm.^{-2}$: il rapporto è quindi approssimativamente costante. Questo risultato conforta ad ammettere che la conducibilità misurata, che è quella dell'aria in vicinanza immediata del piatto, sia precisamente quella che regna in vicinanza immediata del suolo.

Si vede d'altra parte che per istituire confronti fra i valori della corrente misurati in diverse condizioni bisognerebbe stabilire i corrispondenti fattori di riduzione per il gradiente; a fattore assoluto di confronto si può assumere soltanto la conducibilità, in quanto il valore misurato per questa non risente della influenza reciproca fra l'apparecchio di misura e i corpi circostanti.

Particolare interesse ci parve rivestire il confronto fra le misure di conducibilità eseguite con questo metodo e col metodo di Gerdien: e sovratutto da un punto di vista che non sembra sia stato ancora rilevato da altri. È nota la questione più volte sollevata: se l'apparecchio di Wilson dia una misura della corrente totale che attraversa l'unità di superficie di una sezione orizzontale qualunque dell'atmosfera; oppure soltanto di quella parte dovuta agli ioni discendenti, cioè, in caso di gradiente normale, agli ioni positivi, come sostiene, ad es., Lutz (1).

La seconda eventualità darebbe luogo al dilemma: o la terra, come il piatto dell'apparecchio di Wilson, riceve solo metà della corrente che attraversa l'atmosfera — metà, dato che i due tipi di ioni nella libera atmosfera vi concorrono press'a poco in ugual misura — oppure emette per parte sua tanti ioni negativi per compiere l'altra metà. La prima di queste ipotesi.

(1) Lutz, loc. cit.

Digitized by Google

data la stazionarietà della corrente, è vietata dal principio di conservazione dell'elettricità; la seconda implica un intervento essenziale del suolo nella produzione della corrente: l'emissione di ioni, e quindi l'intensità della parte negativa di quella, sarebbe legata necessariamente alla costituzione superficiale del suolo stesso: fatto che non si osserva, in generale; mentre la necessità di ammettere l'esistenza di superficie estese incapaci di emettere ioni ci farebbe ricadere nell'assurdo della prima ipotesi.

Queste considerazioni impongono dunque di respingere il modo di vedere di Lutz: il metodo di Wilson e i metodi analoghi (Simpson, Ebert) (1) misurano la corrente totale e non la parte positiva sola. Ma per quanto si tratti di considerazioni già sviluppate in parte da Schweidler e Kohlrausch nel 1915 (2), ancora in lavori recenti ci si astiene dal prender posizione (3).

Dalle nostre misure la conducibilità λ dedotta come rapporto tra la corrente e il gradiente dati dall'apparecchio di Wilson risultò sempre uguale all'incirca alla somma delle conducibilità polari λ_+ e λ_- misurate contemporaneamente con l'apparecchio di Gerdien (v. Tabella, pag. seguente).

Il rapporto fra le conducibilità polari varia così con l'altezza sul suolo, per modo che ne rimane approssimativamente costante la somma; e nello strato adiacente al suolo è $\lambda_+ = \lambda$ nei limiti dell'incertezza di misura: per la quale non si può assegnare un valore numerico definitivo, in quanto non dipende soltanto dalla sensibilità degli strumenti ma essenzialmente dalla variabilità delle condizioni esteriori. Gli errori strumentali importano una incertezza del 10 % nel valore del gradiente e del 15 % nella conducibilità misurata con i due metodi.

In questi limiti dunque si può affermare che nello strato

---

(1) Simpson, " Philosophical Magazine „, t. 19, 1910.
Ebert, " Physikalische Zeitschrift „, t. 3, 1902.

(2) Schweidler e Kohlrausch, *Atmosphärische Elektrizität*, in: Graetz, *Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus*, vol. III.

(3) Mathias, *Traité d'électricité atmosphérique et tellurique*, Parigi, 1924, p. 174.

Digitized by Google

Luogo e Data	Ora (1)	Valori ottenuti col Gerdien			Valore ottenuto col Wilson
		λ_+	λ_-	$\lambda_+ + \lambda_-$	λ
Col d'Olen					
6-8-1926	$9^h\ 46^m$	2,4	1	3,4	3,9
9-8-1926	$11^h\ 26^m$	0,85	0,45	1,3	1,9
» » »	$15^h\ 18^m$	1,4	1	2,4	1,8
Carmagnola					
11-10-1926	$10^h\ 34^m$	0,56	0,52	1,1	1,2
» » »	$11^h\ 10^m$	1	0,5	1,5	1,6
» » »	$16^h\ 30^m$	0,6	0,55	1,15	1,2
Col d'Olen					
10-8-1927	$9^h\ 2^m$	2,1	2	4,1	4
» » »	$15^h\ 30^m$	0,8	0,6	1,4	1,3
11-8-1927	$9^h\ 44^m$	1	0,7	1,7	1,8
» » »	$9^h\ 55^m$	1,5	1,3	2,8	2,6
» » »	$10^h\ 24^m$	1,7	1,2	2,9	3

adiacente al suolo si ha, trascurando le differenze di mobilità, un numero di ioni positivi per cc. uguale alla somma dei corrispondenti numeri di ioni dei due segni negli strati superiori. Una rigorosa uguaglianza non si potrebbe attendere, sia fra il numero di ioni, sia fra le λ totali corrispondenti alle diverse altezze: al contrario, si deve escludere a priori, perchè un addensamento di ioni positivi implica una carica spaziale e quindi un aumento di gradiente in base alla legge di Poisson: la costanza della corrente richiede perciò una diminuzione della conduttività (2). Le nostre misure dicono che questa variazione è piccola.

(1) È indicato un istante intermedio fra l'inizio e la fine della misura riferita.

(2) Vedi le considerazioni generali sul meccanismo di conduzione nei gas p. es. in: J. J. Thomson, *Passage de l'électricité à travers les gaz.*

Digitized by Google

È facile stabilire del resto un limite superiore per l'aumento di gradiente derivante dalla causa suaccennata. L'ordine di grandezza della densità di carica spaziale dato da un numero di ioni positivi eguale al numero totale di ioni di conduzione è di 10^{-6} U. E. S. Moltiplicando per 4π si ha un valore di $-\frac{d^2V}{dh^2}$ dell'ordine di 10^{-5} U. E. S. cm^{-2}. Se anche si avessero esclusivamente ioni positivi per un'altezza di 50 cm. sul suolo, ipotesi certo esagerata, l'aumento di gradiente sarebbe di 5.10^{-4} U. E. S. cm^{-1}: il valore normale del gradiente è di 5.10^{-3} U. E. S. cm^{-1} è solo eccezionalmente scende al disotto di questo valore. L'aumento di gradiente dovuto all'addensamento di ioni che partecipano alla conduzione non può quindi raggiungere il 10 % del valore normale. Si può così affermare a priori che la conducibilità totale ad una certa altezza sul suolo non potrebbe per questa causa superare neanche del 10 % la conducibilità dovuta agli ioni positivi soli in prossimità del suolo.

Non basterebbero però le precedenti considerazioni ad escludere l'eventualità di un aumento di gradiente dovuto all'addensamento di ioni positivi di piccola mobilità, i cosidetti ioni di Langevin, che senza partecipare in misura apprezzabile alla conduzione possono dar luogo a cariche spaziali considerevoli. I risultati da noi ottenuti permettono di escluderlo.

Premesse queste considerazioni generali prendiamo ora in esame i risultati speciali delle misure. Non possiamo disporre di serie estese di osservazioni che permettano di assegnare valori medî ben definiti delle diverse variabili in questione: non è facile raggiungere una continuità nelle misure d'alta montagna senza una installazione apposita con mezzi adeguati. Nella prima metà d'agosto 1926 e in tutto l'agosto 1927 le condizioni meteorologiche furono sempre instabili e spesso cattive, in modo da accrescere la irregolarità già sempre lamentata dei fattori caratterizzanti lo stato elettrico dell'atmosfera, e rendere ad un tempo materialmente difficili le misure all'aperto. Ciononostante dai valori relativi ad alcune buone giornate si può trarre qualche

Digitized by Google

indicazione che acquista valore in quanto concorda coi risultati generali degli altri osservatori: per cui non crediamo inutile di darne notizia, anche perchè si riferiscono ad una regione non ancora studiata sotto questo riguardo.

Non ha un interesse particolare il valore assoluto rilevato per il gradiente, e quindi anche per la corrente, poichè, come sopra si è notato, esso dipende nettamente dalla posizione dell'apparecchio rispetto ai corpi circostanti: nè crediamo, trattandosi di regione accidentata e profondamente addentro nelle montagne, abbia senso assumere un coefficiente di riduzione delle misure ad un valore normale contemporaneo di pianura. Indichiamo tuttavia, per fissare le idee, gli ordini di grandezza.

L'apparecchio si trovava su un dosso poco rilevato a nord-est dell'Istituto Mosso, nella parte centrale della conca di Cimalegna, col piatto ad 80 cm. dal suolo, di natura rocciosa. Il gradiente dato da $f = 4\pi\sigma$, dove σ è la densità di carica indotta sul piatto dell'apparecchio, era compreso generalmente fra 300 e 600 V/m. Misure fatte a poca distanza sullo stesso dosso con due collettori a miccia di carta imbevuta di nitrato di piombo (1), posti rispettivamente a livello del suolo e ad un metro d'altezza, collegati ad un elettrometro diedero valori intorno a 200 V/m. Lo stesso apparecchio di Wilson diede a Carmagnola (240 m. s. m., 11 ottobre 1926) valori fra 300 e 400 V/m; e sul mare (Noli, 5-7 settembre 1927) fra 450 e 600 V/m, sempre con tempo bello.

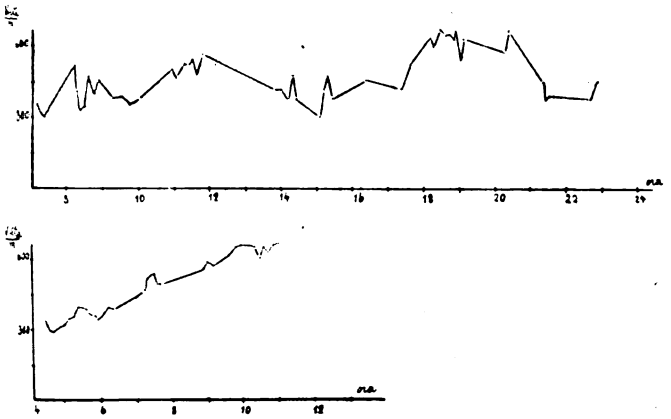
Avvenne spesso di notare un abbassamento del gradiente quando una calotta di nebbia veniva a coprire la conca; i valori risalivano quando la calotta si squarciava. Non si ebbero però valori più bassi del normale quando invece la nebbia riempiva stabilmente la conca. In giornate apparentemente meno perturbate si rileva una diminuzione del gradiente dopo mezzogiorno ad un minimo raggiunto nelle prime ore del pomeriggio, con ritorno ad un massimo fra le 18 e le 20: in accordo con quanto risulta dagli andamenti diurni medî registrati da molte altre stazioni.

---

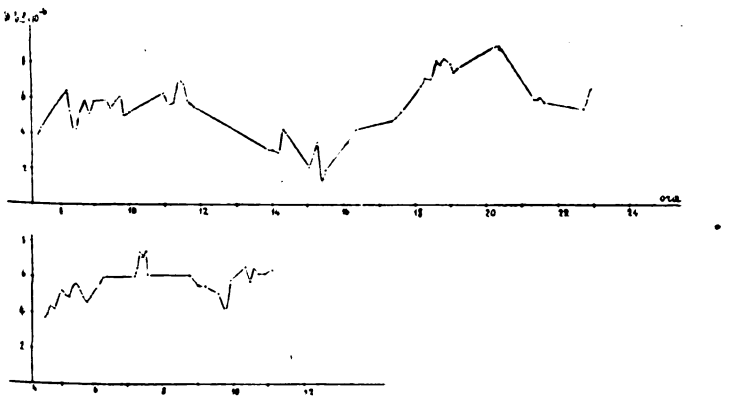
(1) Moulin, "Annales de Chim. et de Phys.„ 1907, 1, p. 40.

Digitized by Google

A titolo illustrativo riportiamo i diagrammi del gradiente, della corrente e della conducibilità nel giorno 10 e parte dell'11 agosto 1927: lo stesso andamento generale indicato da questi si ritrova nelle altre giornate apparentemente normali.



I. Gradiente. - 10-11 agosto 1927.

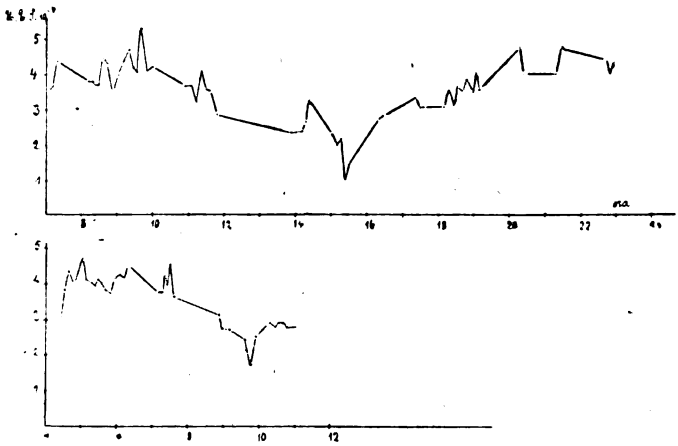


II. Corrente. - 10-11 agosto 1927.

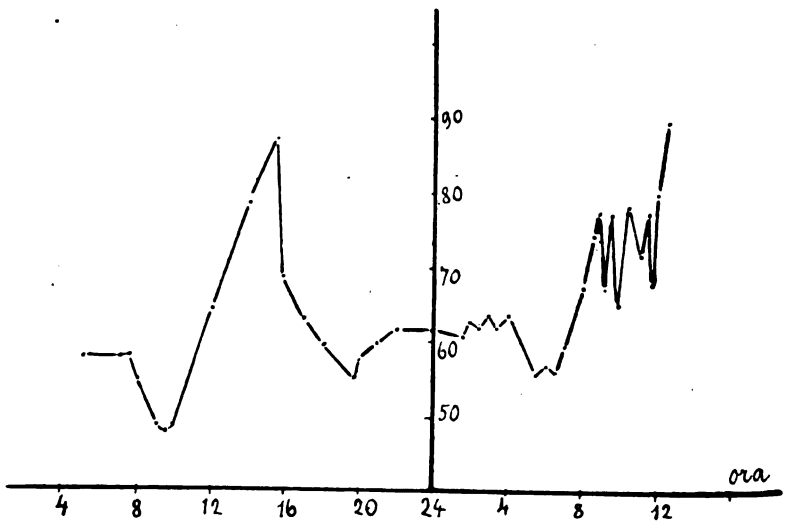
La conducibilità risulta in media compresa fra 10^{-4} e 6.10^{-4} U. E. S. Si aggira così intorno al valor medio assegnato di solito per la pianura (3.10^{-4}). Noi misurammo d'altra parte con tempo bello valori compresi fra 10^{-4} e 2.10^{-4} a Carmagnola (11 ott. 1926) e invece compresi fra $0{,}2.10^{-4}$ e $0{,}5.10^{-4}$ sulla torretta dell'Istituto Fisico a Torino (20 e 26 nov. 1926).

Digitized by Google

La conducibilità cresce con tempo bello, decresce fino al disotto del limite di sensibilità dell'apparecchio di Wilson con nebbia fitta e umida: in 10 minuti, nonostante la perfetta



III. Conducibilità. - 10-11 agosto 1927.



IV. Umidità. - 10-11 agosto 1927.

tenuta dell'isolamento e il valore non piccolo del gradiente (300 V/m), la carica totale non raggiungeva 0,01 U. E. S.: da

Digitized by Google

cui risulta $\lambda < 0{,}2.10^{-4}$ (10 agosto 1926). In generale si nota una netta dipendenza dalle condizioni igrometriche: in proposito riportiamo un diagramma dell'Osservatorio del Col d'Olen relativo ai giorni 10 e 11 agosto 1927. Si ha di regola un massimo di conducibilità nelle prime ore del mattino, che risulta accompagnato da un minimo di umidità, mentre al minimo di conducibilità nelle ore più calde del pomeriggio corrisponde un massimo di umidità.

In corrispondenza con gli andamenti del gradiente e della conducibilità si ha un forte minimo della corrente fra le 14 e le 16, apparentemente alquanto più tardi di quanto non appaia dalle medie generali che lo pongono verso il mezzogiorno. In condizioni normali la corrente misurata oscilla fra 2.10^{-6} e 8.10^{-6} U. E. S. cm^{-2}.

Oltre alle misure del Col d'Olen se ne tentarono pure con l'apparecchio di Wilson alla Capanna Osservatorio Regina Margherita sulla Punta Gnifetti del Monte Rosa (4556 m. s. m.) sia nel 1926 che nel 1927. Si pose l'apparecchio sulla torretta per modo che il piatto si trovava a livello delle travi superiori orizzontali. Nel mattino del 14 agosto 1926 si ebbe, con tempo limpido, vento piuttosto forte dal Nord, mare di nebbie a 2500 m., un gradiente approssimativamente costante sui 3500 V/m. fra le $6^h\ 30^m$ e le 10^h, mentre la corrente variava fra 60.10^{-6} e 70.10^{-6} U. E. S. cm^{-2} corrispondente ad una conduttività di 5.10^{-4} a 6.10^{-4} U. E. S. Questa conduttività non è molto elevata come si potrebbe attendere data l'altezza: e bisogna notare che nelle stesse ore al Col d'Olen aveva precisamente gli stessi valori: come risulta da misure contemporanee effettuate col Gerdien da uno di noi.

Nella seconda metà d'agosto 1927 si riportò l'apparecchio alla Capanna e si tentarono più volte le misure con tempo estremamente instabile e spesso burrascoso. Il vento era quasi sempre di parecchie decine di chilometri all'ora (1) e il gradiente faceva sbalzi bruschi con inversioni di senso non rare, con valori

(1) Velocità media misurata con anemometro a mulinello.

Digitized by Google

di qualche migliaio di Volta per metro. Nè sempre si poteva escludere che cariche non fossero portate da particelle di ghiaccio lanciate dal vento. Fu così impossibile nel periodo di circa dieci giorni di permanenza alla Capanna, a diverse riprese, ottenere misure regolari ed attendibili.

Qui si presentano spontanee, a titolo di conclusione, alcune considerazioni sul contributo delle misure di montagna ai problemi generali della elettricità atmosferica.

Per risolvere il problema primo, della conservazione della carica negativa della terra, o, almeno, per precisarne la natura, occorre poter redigere un bilancio dell'acquisto e della cessione di cariche nelle condizioni più disparate di tempo e di luogo: importa quindi aggiungere elementi a quelli, non certo numerosi, sinora disponibili, atti a stabilire che anche in montagna la corrente di conduzione è con assoluta prevalenza diretta verso il basso, ed ha un valore medio complessivo non lontano dal normale.

Ma dove le misure di montagna acquistano un interesse prevalente è nella ricerca di eventuali legami tra l'andamento dei vari fattori che caratterizzano lo stato elettrico dell'atmosfera e quello dei fattori meteorologici propriamente detti; nell'intento ultimo di utilizzare ancora quelli, come nuovi elementi di osservazione, a base delle previsioni meteorologiche. Chè appunto là dove le perturbazioni di tutti i fattori nominati sono più frequenti e profonde si può attendere che i rapporti risultino più appariscenti. Soltanto, le condizioni di misura non sono agevoli, di solito, come si è rilevato, e i metodi comportano ancora degli adattamenti.

Torino — Istituto Fisico della R. Università,
aprile 1928.

Digitized by Google

Alcune esperienze su la riflessione metallica.

Nota di M. COSSI
presentata dal Socio nazionale residente A. Pochettino.

1. — Wheeler in una sua nota (1), intorno allo studio della riflessione a superfici di mercurio, immerse in liquidi trasparenti, sviluppa una teoria, la quale conduce ad una formula per il calcolo dell'indice di rifrazione del mezzo posto sopra la superficie metallica. Se indichiamo tale indice con n_0, la formula è:

$$n_0 = \frac{S}{S_0}(1 + \delta),$$

nella quale:

$$S = \operatorname{tg}\frac{P}{2}\operatorname{sen} i \operatorname{tg} i, \qquad \delta = -\frac{\operatorname{sen}^2 i}{S^2}(n_0'^2 - 1)\cos 2Q;$$

i è l'angolo di incidenza sullo specchio metallico della luce polarizzata a 45° rispetto al piano di incidenza, n'_0 è l'indice di rifrazione del mezzo trasparente determinato direttamente, P e Q sono definiti dalle relazioni:

$$\cos P = \cos\Delta \operatorname{sen} 2\psi, \qquad \operatorname{tg} Q = \operatorname{sen}\Delta \operatorname{tg} 2\psi,$$

dove Δ è la differenza di fase tra le due componenti, parallela e perpendicolare al piano di incidenza, della luce ellittica riflessa nel mezzo trasparente aria, ψ è l'azimut di polarizzazione ristabilita per la riflessione nel mezzo trasparente aria.

$$S_0 = \operatorname{tg}\frac{P_0}{2}\operatorname{sen} i \operatorname{tg} i,$$

(1) « Phil. Mag. », 1911, 22, p. 229.

Digitized by Google

dove P_0 si calcola con i valori osservati per Δ e ψ quando il mezzo trasparente sopra la superficie metallica è il liquido di cui si vuol calcolare l'indice di rifrazione (1). Per applicare la formula di Wheeler si richiede che la superficie metallica sia assolutamente pulita, altrimenti bisogna introdurre un termine correttivo; secondo questo autore si ottiene generalmente $n_0 = n'_0$ almeno entro i limiti degli errori di osservazione.

Ora io osservo che se calcoliamo, applicando ai numeri riportati da Wheeler la nota formula della riflessione metallica:

$$n = \operatorname{sen} i \operatorname{tg} i \frac{\cos 2\psi}{1 + \cos\Delta \operatorname{sen} 2\psi},$$

i valori dell'indice per il mercurio sotto aria e sotto un liquido qualunque, e poi calcoliamo lo stesso indice servendoci del valore ottenuto per n_{Hg} e degli n_0 si hanno i seguenti risultati:

$\lambda = 589$.

	$n = \operatorname{sen} i \operatorname{tg} i \frac{\cos 2\psi}{1 + \cos\Delta \operatorname{sen} 2\psi}$	$n = \frac{n_{Hg}}{n_0}$	Differenza tra gli n
Aria-mercurio	1,545	—	—
Acqua-mercurio . . .	0,887	1,162	0,257
Acqua acidulata con HCl-mercurio	0,863	1,152	0,289
Trementina-mercurio .	0,729	1,054	0,325

Le differenze riportate nell'ultima colonna superano gli errori di osservazione perciò volli determinare l'indice di rifrazione del mercurio in aria e sotto qualche liquido (2) per vedere se la differenza fra gli n, calcolata a quel modo, era dovuta a causa rilevabile. Le osservazioni fatte hanno dato i seguenti valori (3):

(1) " Phil. Mag. „, 1911, 22, p. 236.

(2) I liquidi usati, purissimi, sono stati gentilmente favoriti dal Professore Ponzio, Direttore dell'Istituto Chimico della R. Università di Torino.

(3) Operando con $\lambda = 589$ ottenni, per il mercurio in aria, in tre misure successive, i valori: 1,54; 1,52; 1,57.

Digitized by Google

$\lambda = 670.$

	i	Δ	2ψ	$n = \operatorname{sen} i \operatorname{tg} i \dfrac{\cos 2\psi}{1 + \cos\Delta \operatorname{sen} 2\psi}$	$n = \dfrac{n_{Hg}}{n_0}$	Differenza tra gli n
Mercurio:						
Aria . . .	68° 20′	131°	74°	1,74	—	—
Acqua . .	»	117° 20′	74° 45′	1,11	1,32	0,21
Acqua acidulata con H_2SO_4 . . .	»	115° 20′	74° 50′	1,04	1,27	0,23
Ligroina .	»	114° 40′	74° 55′	1,02	1,25	0,23
Eugenolo.	»	109° 30′	75° 10′	0,88	1,14	0,26

Mezzo trasparente	$n_0 = \dfrac{S}{S_0}(1 + \delta)$	n_0'	$n_0' - n_0$
Acqua	1,322	1,330	0,008
Acqua acidulata con H_2SO_4 . .	1,369	1,370	0,001
Ligroina	1,387	1,380	0,007
Eugenolo	1,520	1,580	0,060

L'ultima colonna della prima tabella mostra che gli scarti tra gli n sono notevoli, e dello stesso ordine di quelli di Wheeler; la differenza dunque sussiste, ma fin'ora non ne ho potuto dare la ragione. Dalla seconda tabella risulta buona la concordanza tra gli n_0 e gli n'_0.

Le osservazioni fatte per il platino hanno dato i seguenti valori:

$\lambda = 670.$

	i	Δ	2ψ	$n = \operatorname{sen} i \operatorname{tg} i \dfrac{\cos 2\psi}{1 + \cos\Delta \operatorname{sen} 2\psi}$	$n = \dfrac{n_{Pt}}{n_c}$	Differenza tra gli n
Platino:						
Aria . . .	68° 20′	136° 58′	76°	1,95	—	—
Acqua . .	»	126° 5′	76° 30′	1,28	1,53	0,25
Acqua acidulata con HCl	»	124° 54′	76° 40′	1,22	1,48	0,26

Digitized by Google

Mezzo trasparente	$n_0 = \frac{S}{S_0}(1+\delta)$	n_0'	$n_0' - n_0$
Acqua	1,27	1,33	0,06
Acqua acidulata con HCl . . .	1,31	1,36	0,05

Cioè risultati del tutto analoghi a quelli ottenuti con il mercurio.

2. — È noto fin dalle esperienze di Lippmann (1) che con la polarizzazione catodica di una lamina metallica, immersa in un liquido trasparente conduttivo, la differenza di fase Δ' tra le due componenti, parallela e perpendicolare al piano di incidenza, della luce ellittica riflessa non varia sensibilmente. Ho studiato il comportamento delle superfici metalliche mercurio e platino, immerse in acqua acidulata con H_2SO_4 e con HCl, polarizzandole elettroliticamente non solo catodicamente ma anche anodicamente. Non ho osservata nessuna variazione sensibile della differenza di fase Δ e ancora nessuna variazione dell'azimut della polarizzazione ristabilita. Mantenendosi costanti i valori di Δ e ψ per la luce ellittica riflessa dallo specchio metallico in un liquido trasparente conduttivo, con la polarizzazione sia catodica che anodica, rimangono costanti anche le differenze trovate per i valori degli indici relativi di rifrazione.

3. — Con opportuni accorgimenti sono riuscita ad ottenere per via elettrolitica, usando come catodo uno specchio di platino, dei depositi di rame ottimi per lo studio della riflessione. Determinate le costanti Δ e ψ della luce ellittica riflessa dal platino in soluzione di $CuSO_4$, diedi inizio all'elettrolisi con una corrente di mA. 0,125 per cm^2. L'osservazione accurata offrì l'interesse di far notare dopo 60^s una leggera variazione per i valori di Δ e ψ; inoltre la variazione continuò progressivamente finchè dopo altri 20^m Δ e ψ raggiunsero valori costanti. Il cal-

(1) « Journal de Physique », 1882, p. 202.

Digitized by Google

colo dà per gli spessori del metallo deposto, corrispondentemente ai quali si inizia e termina la variazione della differenza di fase e dell'azimut della polarizzazione ristabilita, i valori: 2.10^{-6} mm. e 58.10^{-6} mm. Si trae quindi dai dati sperimentali: che uno spessore di rame minore di 2.10^{-6} mm. non altera ancora apprezzabilmente (data la sensibilità del dispositivo sperimentale usato) le proprietà della luce riflessa dal platino; che a partire dallo spessore 2.10^{-6} mm. i valori di Δ e ψ variano e progressivamente col crescere del deposito; infine che a partire dal valore 58.10^{-6} mm. per lo spessore del deposito si hanno per Δ e ψ i valori costanti caratteristici del rame compatto. Infatti si calcola $n = 0{,}52$ ($\lambda = 670$) per l'indice di rifrazione nell'aria, valore in accordo con i dati delle tabelle.

Riunendo i risultati si ha:

Cu.

Corrente mA 0,125 per cm^2.
Si incomincia a notare la variazione di Δ e ψ dopo 60".
Spessore corrispondente del deposito 2.10^{-6} mm.
Si raggiungono i valori costanti per Δ e ψ dopo 21'.
Spessore corrispondente del deposito 58.10^{-6} mm.
Indice di rifrazione del **rame** in aria 0,52 ($\lambda = 670$).

Per gli specchi di nichel e di argento ottenuti anche per via elettrolitica si hanno i seguenti risultati:

Ni.

Corrente mA 0,066 per cm^2.
Si incomincia a notare la variazione di Δ e ψ dopo 2' 15".
Spessore corrispondente del deposito 3.10^{-6} mm.
Si raggiungono i valori costanti per Δ e ψ dopo 48'.
Spessore corrispondente del deposito 64.10^{-6} mm.
Indice di rifrazione del **nichel** in aria 1,73 ($\lambda = 670$).

Ag.

Corrente mA 0,166 per cm^2.
Si incomincia a notare la variazione di Δ e ψ dopo 50".
Spessore corrispondente del deposito 7.10^{-6} mm.
Si raggiungono i valori costanti per Δ e ψ dopo 1h 31' 40".
Spessore corrispondente del deposito 70.10^{-6} mm.
Indice di rifrazione dell'**argento** in aria 0,22 ($\lambda = 670$).

Digitized by Google

Le proprietà della luce riflessa su uno specchio metallico incominciano a variare progressivamente a partire da un certo valore per lo spessore del metallo deposto su di esso; per il rame, il nichel e per l'argento si sono trovati rispettivamente gli spessori di circa: 2.10^{-6} mm., 3.10^{-6} mm. e 7.10^{-6} mm.; gli spessori minimi cui corrispondono le proprietà ottiche del metallo compatto sono rispettivamente: 58.10^{-6} mm., 64.10^{-6} mm., 70.10^{-6} mm.

4. — Depositando elettroliticamente i metalli: rame, nichel e argento sopra gli specchi di platino ho rilevato che all'istante in cui si incomincia a notare la variazione delle costanti ottiche della superficie riflettente si ha un aumento dell'intensità di corrente nel circuito. Per esempio, studiando un deposito di rame ho osservato che con una corrente iniziale di mm. 0,616 per cm^2 dopo 10^s incominciava la variazione dei valori di Δ e ψ (spessore del deposito dopo 10^s 2.10^{-6} mm.) e corrispondentemente la corrente aumentava fino a mA. 0,630 per cm^2. Continuando il metallo a depositarsi, la variazione continua dei valori di Δ e ψ è accompagnata da un aumento pure continuo e lentissimo dell'intensità di corrente, aumento che cessa quando Δ e ψ dopo 4^m raggiungono i valori costanti caratteristici del rame. Si può ricercare la causa dell'aumento istantaneo dell'intensità di corrente da 0,616 a 0,630 mA. per cm^2, nella variazione della f. e. m. di contatto del platino con la soluzione di $CuSO_4$ perchè sul platino si va depositando un metallo di natura diversa; dai calcoli eseguiti con i valori sperimentali, risulta che la variazione della corrente, da 0,616 a 0,630 mA. per cm^2, corrisponde ad una variazione di 0,20 Volta della f. e. m.; valore non molto diverso da quello 0,17 Volta che corrisponde alla f. e. m. di contatto platino-rame.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Maggio 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Herlitzka, Pochettino, Boggio, Garelli, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Socio Guidi.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza che risulta approvato.

Il Socio Grassi chiede la parola per rilevare e raccomandare un cambiamento nell'Elenco degli Accademici, e precisamente nel titolo della Sezione di *Fisica*, la quale, meglio che *Fisica generale e sperimentale*, deve essere invece indicata col nome da lui proposto e accettato dall'Accademia, di: *Fisica generale e applicata*; cambiamento di dizione che potrà soltanto essere effettuato nel venturo anno accademico.

Il Socio Sacco presenta e fa omaggio alla Biblioteca accademica di un suo lavoro dal titolo: *Le pietre litografiche in Italia*. L'autore fa rilevare il vantaggio che deriverebbe al nostro paese, qualora alle pietre litografiche che attualmente si impor-

Digitized by Google

tano da *Solenhofen* in Baviera, si potesse sostituire materiale nostro, quale egli ha l'onore di raccomandare nella sua Nota.

Il Presidente comunica quindi l'omaggio fatto all'Accademia dal Direttore del *Bureau international des Poids et Mesures* dell'opera pubblicata nella ricorrenza del Cinquantenario della fondazione dell'importante Istituto internazionale.

Il Presidente presenta l'omaggio fatto all'Accademia dalla Direzione del giornale *La Gazzetta del Popolo*, del volume pubblicato in occasione dell'ottantesimo anno di fondazione del giornale.

Terminata la presentazione degli omaggi, viene dal Socio PEANO, a nome del Socio Senatore D'OVIDIO, data lettura di una Nota del Dr. Quido VETTER, dal titolo: *Nota alla risoluzione dell'equazione cubica di Leonardo Pisano,* e ne discorre brevemente.

Il Socio BOGGIO, che doveva leggere la Commemorazione del compianto Socio SEGRE, rinuncia alla lettura, perchè essa dovrà essere fatta in modo solenne nella adunanza a Classi Unite.

Dopo di che si procede, secondo le disposizioni dell'art. 10 del Regolamento Accademico, alle votazioni, secondo i criteri già fissati nella precedente adunanza.

La votazione, salvo approvazione sovrana, ha portato alla nomina di due Soci nazionali residenti nelle persone del Professore Piero GIACOSA, della R. Università di Torino, e del Prof. G. C. VALLAURI, del R. Politecnico di Torino.

Terminata la votazione per la nomina dei Soci nazionali residenti, si procede, colle norme regolamentari, a quella dei Soci stranieri. Risultano eletti, salvo l'approvazione sovrana: il Prof. Hugo DE VRIES, dell'Univers. di Amsterdam, P. TERMIER, Prof. all'École des Mines e Membro dell'Institut de France e T. KARMANN, dell'Università di Aachen.

In ultimo, vennero nominati Soci corrispondenti i signori:

Digitized by Google

Proff. L. Tonelli, G. Vitali, A. Signorini, E. Pistolesi, G. A. Blanc, N. Parravano, G. Pellizzari, L. Rolla, M. Betti, G. Rovereto, R. Fabiani, F. Millosevich, A. Karpinsky, L. Colomba, G. Boeris, E. Douvillé, C. Déperet, G. Negri, A. Forti, D. Perrot, F. Lori, E. Fermi, A. Gallardo, G. Houssay e B. Lippschütz.

Digitized by Google

LETTURE

Nota alla risoluzione dell'equazione cubica di Leonardo Pisano.

Nota del Dott. QUIDO VETTER
presentata dal Socio nazionale residente Enrico D'Ovidio.

La risoluzione del grande matematico Pisano nella sua opera intitolata " Flos „, stampata la prima volta da B. Boncompagni nell'anno 1854, ha provocato un grande interesse dei matematici per la sua straordinaria esattezza. La letteratura, che studia quest'equazione, si trova in un interessante articolo del prof. Ugo Cassina (" Atti Acc. Torino „, 1924, 14-20), di cui il contenuto è la risoluzione graduale dell'equazione sopradetta sino a 14 cifre decimali. Il calcolo del Cassina è basato sulla bella Nota del prof. G. Peano sulla risoluzione graduale delle equazioni numeriche (ibidem, 1918-19).

L'equazione del Leonardo è la seguente:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

colla risoluzione espressa nel sistema sessagesimale

$$x = 1^{o}\,22^{I}\,7^{II}\,42^{III}\,33^{IV}\,4^{V}\,40^{VI},$$

il quale valore di Leonardo Pisano è più piccolo di meno che $1^{VI}\,30^{VII}$ del valore preciso. Nel " Flos „ Leonardo ha dato soltanto il valore della radice, senza trasmettere alla curiosa posterità il metodo, col quale ha calcolato la sua risoluzione.

M. Cantor (*Vorlesungen*, II, 2ª ed., 47) dice, che tutte le restituzioni del calcolo di Leonardo sinora fatte sono sbagliate. A. Genocchi (" Ann. mat. e fis. „, 1855, 165-168), secondo il Cantor, suppone, che Pisano ha conosciuto la " regula aurea „

Digitized by Google

di Cardano. H. Hankel (*Zur Geschichte der Mathematik, etc.*, 290-293) descrive il metodo arabo del sec. XV, come calcolare la radice dell'equazione $x^3 + Q = Px$, quando x^3 è molto piccolo nel rapporto a Q, e dice, che Leonardo Pisano, discepolo degli Arabi, già circa l'anno 1200 calcolava per approssimazione le equazioni cubiche. M. Cantor è un po' audace, quando fa supporre da Hankel, che Leonardo abbia calcolato la sua radice con un metodo simile all'arabo sopradetto. J. P. Gram (*Overs. Selsk. Forh. Kjöbenhaven,* 1893-1894, 18-28) suppone, che Leonardo ha ridotto l'equazione cubica nella forma senza il termine di 2° grado, cioè il metodo conosciuto dal sec. XVI. Queste ipotesi mi paiono troppo audaci.

Più probabile mi pare, quando M. Cantor dimostra, che Leonardo molto stimava la " regula falsi „. Perciò nasce la questione, se Leonardo poteva calcolare la sua risoluzione con questo metodo tanto favorito dai suoi maestri arabi e dagli altri matematici medioevali. Naturalmente, non si può affermare, che egli abbia calcolato veramente così. Io voglio soltanto mostrare, come avrebbe potuto calcolare.

La radice cercata è fra 1 e 2, cosa che Leonardo dimostra. La più semplice regola falsi, usata alle equazioni di primo grado, è la seguente:

Nell'equazione lineare $f(x) = k$ si sostituisce x con un valore scelto A e si moltiplica A per il rapporto

$$\frac{k - f(A)}{f(A)}.$$

Questo prodotto è l'aumento che si deve sommare con A per ottenere la cercata radice.

Poichè nell'equazione di Leonardo i coefficienti dei termini della terza e della seconda potenza sono piccoli in rapporto al coefficiente del termine lineare ed al termine assoluto, e poichè x non differisce molto da 1, si può calcolare l'aumento sovradetto col metodo dell'equazione lineare. Naturalmente si ottiene con tale calcolo soltanto un valore approssimato. Ripetendo questa calcolazione coll'ultimo valore approssimato come valore scelto, si approssima sempre più alla cercata radice. Poichè tutti i ter-

Digitized by Google

mini nel primo membro sono positivi, perciò il valore assoluto dell'aumento così calcolato è più grande che il valore assoluto della differenza della radice cercata e del valore approssimato. Perciò si può arrotondare il valore assoluto dell'aumento così calcolato, cioè nel rapporto

$$\frac{k - f(A)}{f(A)}$$

si può diminuire il numeratore ed aumentare il denominatore, poi si può anche diminuire il fattore A.

Sia x_n l'n-esimo valore approssimato della radice x e

$$V_n = x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n.$$

Rappresentiamo x_n ed il valore assoluto della differenza $20 - V_n$ nel sistema sessagesimale. Se p è il numero dei posti sessagesimali di x_n, arrotondiamo in giù la differenza sopradetta al multiplo di 20 unità dell'ordine sessagesimale $(p+1)$. Sia la differenza così arrotondata D_n. Il denominatore della frazione sopradetta dovrebbe essere V_n, ma arrotondiamolo in su a 20. Infine diminuiamo il fattore x_n ad 1. Dunque è l'aumento

$$d_n = \frac{D_n}{20}.$$

Poi sia

$$x_{n+1} = x_n + d_n.$$

Mettiamo i valori così calcolati in una tavola, dove segniamo la colonna degli interi con 0, dei numeratori delle frazioni sessagesimali con I-VII, abbreviando tutti i valori a 6 frazioni sessagesimali, soltanto x_{10} a 7.

(*Vedi tavola a pag. seguente*).

Calcolando i valori della tavola, i principi sovradetti sono abbandonati soltanto per D_2, che è arrotondato al multiplo di 20^{I}, per semplificare il calcolo, e D_8, che è abbreviato al multiplo di 20^{VI} per calcolare x_9 a 6 frazioni sessagesimali.

Digitized by Google

Numero	x_n								V_n							D_n		d_n	
	0	I	II	III	IV	V	VI	VII	0	I	II	III	IV	V	VI				
1	1	—	—	—	—	—	—	—	13	—	—	—	—	—	—	7^{o}	—	21^{I}	—
2	1	21	—	—	—	—	—	—	19	36	19	21	—	—	—	20^{I}	—	1^{I}	—
3	1	22	—	—	—	—	—	—	19	57	17	28	—	—	—	2^{I}	40^{II}	8^{II}	—
4	1	22	8	—	—	—	—	—	20	—	6	8	8	32	32	-6^{II}	—	-18^{III}	—
5	1	22	7	42	—	—	—	—	19	59	59	48	22	11	4	11^{III}	20^{IV}	34^{IV}	—
6	1	22	7	42	34	—	—	—	20	—	—	—	19	27	50	-19^{IV}	20^{V}	-58^{V}	—
7	1	22	7	42	33	2	—	—	19	59	59	59	59	2	15	57^{V}	40^{VI}	2^{V}	53^{VI}
8	1	22	7	42	33	4	53	—	20	—	—	—	—	5	43	-5^{V}	—	-15^{VI}	—
9	1	22	7	42	33	4	38	—	19	59	59	59	59	59	48	11^{VI}	—	33^{VII}	—
0	1	22	7	42	33	4	38	33	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Il valore di Leonardo Pisano riceviamo, arrotondando x_9 al multiplo di 10^{VI}.

È vero, che Leonardo passò, usando la regola falsi semplice, dal valore scelto A alla radice x colla moltiplicazione. Ma usando la regola falsi doppia, egli calcola nel " Liber abaci „, cap. 13 (vide M. Cantor, l. c., p. 27 sg.) anche l'aumento di A per ottenere x. Dunque questo passo non gli era ignoto.

Praga, Università Carolingia, maggio 1928.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 10 Giugno 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono intervenuti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: D'Ovidio, Peano, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Herlitzka, Pochettino, Boggio, Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: De Sanctis, Brondi, Einaudi, Patetta, Cian, Faggi, Luzio, Jannaccone, Bertoni e Vidari che funge da Segretario.

Scusa l'assenza il Socio Panetti.

Letto e approvato il verbale della seduta precedente, il Presidente dà notizia del modo onde il Consiglio d'amministrazione ha deciso, in sua recente seduta, di erogare la somma pervenuta dal Ministero quale sussidio straordinario.

L'Accademia ne prende atto approvando.

Il Socio Parona presenta all'Accademia, come interessanti ambedue le Classi, i quattro volumi recentemente pervenuti in dono all'Accademia e riferentisi tutti alla spedizione italiana De Filippi nell'Himalaya, Caracorum e Turkestan cinese. Tre di essi riguardano argomenti di scienza naturale, cioè uno di *Astronomia geodetica, Geodesia e Topografia,* dovuto a G. Abelli e altri; il secondo su *Le condizioni fisiche attuali,* dovuto a G. Dainelli e O. Marinelli; il terzo sui *Fossili del secondario e del terziario,* dovuto a Fossa Mancini, Parona e Stefanini.

Digitized by Google

Il quarto riguarda i *Tipi umani,* ed è dovuto a Biasutti e Dainelli.

Il Segretario comunica la notizia della morte del Prof. Senatore L. Bianchi, Accademico nazionale non residente, e il telegramma di condoglianza inviato dal Vice-Presidente Parona al Rettore della R. Università di Pisa.

Il Presidente dà quindi la parola al Socio Boggio per la commemorazione del compianto Socio Segre. La lettura del discorso commemorativo è seguìta con attenzione e qua e là sottolineata da approvazioni; alla fine è coronata da un unanime commosso applauso.

Il Socio Senatore D'Ovidio si fa interprete del pensiero comune ringraziando il Socio Boggio della commemorazione che non solo è uno studio perspicuo e preciso della vasta e originale opera scientifica del compianto collega, ma che anche ritrae di Lui in felici tocchi la nobile figura indimenticabile di uomo, di insegnante, di cittadino, di padre esemplare.

Gli Accademici Segretari:
Oreste Mattirolo
Giovanni Vidari

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIII, DISP. 15ª, 1927-1928

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1928

Digitized by Google

Digitized by Google

LETTURE

Nel 4° anniversario della morte di CORRADO SEGRE

Commemorazione letta dal Socio naz. TOMMASO BOGGIO
nella seduta a Classi Unite del 10 giugno 1928.

Egregi Colleghi,

Non è senza viva commozione e preoccupazione che, assolvendo il ponderoso incarico affidatomi dalla nostra Accademia, mi accingo a parlare della vita e delle opere del compianto nostro collega CORRADO SEGRE, la cui elevata parola risuonò per tanti anni in questo alto Consesso, al quale apparteneva sin dal 1889, e il cui ricordo è tuttora ben vivo nei cuori vostri.

Tale commozione è prodotta in me dalla singolare e duplice ventura di essere stato prima Suo allievo e poi suo collega, per tre lustri, nel glorioso Ateneo torinese, che Egli illustrò in modo così cospicuo con tutta l'opera Sua, e di essere per tal modo legato a Lui da sentimenti di riconoscenza, come son quelli che dobbiamo nutrire verso i nostri Maestri, e da sensi di affettuosa e cordiale colleganza. Ragione di preoccupazione si è il fatto che il parlare in modo adeguato della copiosa e svariata produzione del Nostro è impresa tale che " mi fa tremare le vene e i polsi „, specialmente se penso, da un lato, che le mie forze non sono abbastanza idonee all'arduo còmpito, e d'altra parte che i miei studi abituali si riferiscono a campi di ricerche molto lontani da quelli ove si è svolta la massima parte dell'attività scientifica del Segre. È perciò vivo e giustificato in me il timore di non essere riuscito, malgrado il buon

Digitized by Google

volere, a mettere in tutta la sua vivida luce la grandiosa opera geometrica del Nostro, la quale è tutta contrassegnata da un'impronta così altamente personale ed originale.

Comunque, confidando nella benevola indulgenza vostra, spero che vorrete scusarmi se, per la scarsa efficacia del mio dire, non vi appariranno in tutta la loro pienezza le Sue doti preclare di mente e di cuore, le elettissime Sue qualità di Maestro e di Scienziato, e l'importanza dei servigi da Lui resi all'insegnamento e alla Scienza.

Così pure spero non vorrete ritenere troppo tardivo il mio discorso, perchè degli uomini veramente grandi, come il Nostro, si può utilmente parlare ancora dopo qualche anno, ed anche dopo alcuni decenni.

Vi ringrazio ancora della benevola attenzione che vorrete prestare alle mie parole, le quali, sebbene povere e disadorne, sono pur sempre la manifestazione d'una gratitudine di antico allievo e l'espressione dei sensi di una lunga e deferente amicizia.

***

Corrado Segre nacque il 20 agosto 1863 in Saluzzo, ove compì gli studi primari, essendo sempre primo della classe e mostrando già spiccate attitudini ai calcoli e alla soluzione dei problemi elementari.

Essendosi poi trasferita la famiglia a Torino, fece privatamente le scuole tecniche, indi seguì i corsi della sezione Fisico-matematica presso l'Istituto Tecnico Sommeiller, ove venne presto notato per il suo carattere mite e riflessivo, e specialmente per le singolari attitudini che dimostrava per le Scienze esatte, qualità che avevano destato l'ammirazione del suo insegnante di Matematica prof. Giuseppe Bruno, che era pure titolare di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università.

A neppure 16 anni Egli ottenne la licenza d'onore dell'Istituto Tecnico, col primo premio di 300 lire, che Egli impiegò per comperare le opere di Lagrange, che studiò subito avidamente.

Il corso universitario compiuto nel nostro Ateneo, riuscì

Digitized by Google

quanto mai brillante, e il 1° luglio 1883, non ancora ventenne, vi ottenne la laurea con lode, con una amplissima tesi, di singolare valore, che dovette elaborare pure in mezzo a gravi rovesci finanziari che colpirono la Sua famiglia, e a dolorose vicissitudini familiari che culminarono colla tragica morte del padre, avvenuta nel gennaio di quello stesso anno!

Nel successivo novembre il prof. D'Ovidio lo volle suo assistente per l'Algebra e Geometria Analitica, e più volte il Nostro ebbe a sostituirlo nelle lezioni, dimostrando già d'allora quelle doti di chiaro insegnante, che poi rifulsero durante tutta la sua carriera universitaria.

Nel 1884-85 dovette compiere il servizio militare, in qualità di volontario di un anno, uscendone sottotenente di complemento, dopo di che, rientrato nella famiglia universitaria, passò assistente del prof. Bruno, che gli affidò anche l'insegnamento della Geometria proiettiva, che tenne fino al 1888, in cui, essendo venuto a morire il prof. Faà di Bruno, titolare dell'Analisi superiore, il prof. D'Ovidio, che aveva l'incarico della Geometria Superiore, con gesto nobilissimo di collega, lasciò al giovane Segre, che già era salito in meritata fama per i ricchi contributi che le sue ricerche avevano apportato alla Geometria, l'incarico di Geometria Superiore, assumendo invece quello dell'Analisi Superiore. Frattanto era messa a concorso la cattedra di Geometria Superiore, che venne brillantemente conquistata nel novembre 1888, dal Nostro, il quale poi, nel 1892, non ancora trentenne, veniva promosso ordinario: tale cattedra conservò poi sino alla morte.

Furono quelli gli anni in cui l'attività scientifica del Segre raggiunse le più eccelse vette della Scienza: le memorie si succedevano alle memorie, i risultati nuovi andavano moltiplicandosi sempre più e la fama del giovane Geometra torinese rapidamente si diffondeva anche oltr'Alpe, in guisa che avendo Egli intrapreso allora un viaggio in Germania per visitarvi le principali biblioteche, ebbe accoglienze cordialissime e molti onori dal Kronecker e dal Weierstrass, che lo fecero anzi assistere ad una seduta dell'Accademia di Berlino, come pure dal Nöther, dal Reye, dallo Sturm, e da molti altri.

Digitized by Google

Però nè l'avere raggiunto l'apice della carriera universitaria, nè la felicità domestica mai scemarono in lui l'amore al lavoro, o gli fecero sentire men vivo lo stimolo che spinge i veri pionieri della Scienza ad avanzarsi continuamente per le molteplici vie inesplorate di essa. Infatti la sua produzione scientifica, consegnata in buona parte nei nostri volumi accademici, continuò incessante e cospicua fino al giorno fatale in cui il gelido soffio della morte lo colse sulla breccia, arrestandogli la mano scorrente sulle pagine, e troncandogli a mezzo la frase.

Egli interveniva assiduamente alle sedute della nostra Accademia, che illustrò con sì gran copia di pubblicazioni; e, ancora nella seduta che ebbe luogo nella mattina della domenica 10 maggio del 1924, Egli appariva in buone condizioni di salute. Senonchè nella sera stessa venne colpito da gravi dolori viscerali che consigliarono il suo trasporto all'Ospedale Mauriziano. Ivi, dopo due giorni, venne sottoposto ad un atto operatorio che, secondo i sanitari, riuscì egregiamente, senonchè, pare a causa di difficoltà insorte per la nutrizione, nella sera della domenica successiva, 18 maggio, in seguito ad improvvisi e gravi disturbi cardiaci sopraggiunti, Egli dovevá soccombere, lasciando inconsolabili a piangerne la perdita, la moglie e le due figlie, nonchè un largo stuolo di allievi ed amici.

Quel cuore, che tanto intensamente aveva pulsato durante l'elaborazione delle Sue ricerche, e che tanto aveva gioito ad ogni nuovo risultato conseguito, non aveva saputo resistere agli attacchi del male, forse perchè troppo logorato per l'intenso e continuo lavorìo a cui per tanti anni era stato sottoposto!

***

Corrado Segre entra brillantemente nell'agone scientifico con due poderose Memorie presentate nel 1883 per la stampa nei nostri volumi accademici e che costituirono, insieme, la sua dissertazione di laurea; nella prima egli studia varie quistioni attinenti alla geometria di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, e precisamente quelle che si riferiscono alle proprietà proiettive di una quadrica, o di un fascio, o

Digitized by Google

schiera, di quadriche, alle loro quartiche d'intersezione, ecc. e con ragionamenti in gran parte geometrici riesce a stabilire in modo semplice risultati noti e vari risultati nuovi.

Conscio della grande portata dei metodi geometrici da lui escogitati e delle svariate applicazioni che la sua mente acuta aveva già intraviste, egli scrive in tale Memoria: " La geometria " proiettiva degli spazi lineari apre ai cultori della matematica " un campo sconfinato di ricerche piene d'interesse, le quali " comprendono come caso particolare tutta la geometria ordi- " naria; e si può affermare con sicurezza che da queste ricerche " più generali anche questa trarrà un giovamento immenso ".

Queste così perspicue parole sembrano dettate da un autore provetto, anzichè da un principiante! E si può dire che tutta l'opera scientifica del Segre è informata a tali concetti, i quali, da tale opera, ricevettero una luminosa illustrazione.

Nella seconda memoria, egli considerando la geometria della retta come quella di una quadrica a quattro dimensioni, contenuta in uno spazio lineare a cinque dimensioni, è riuscito a fare la teoria generale del complesso quadratico, dei suoi complessi lineari fondamentali, ecc.

In tal modo egli ritrova in modo sistematico, con procedimenti sempre geometrici, alcune proprietà che altri autori avevano ottenuto con metodi svariati, senza alcuna connessione fra loro, inoltre rettifica qualche inesattezza in cui era incorso qualcuno di tali autori, e vi aggiunge grande copia di risultati nuovi.

Con tali metodi di ricerca egli aveva dischiuso agli studiosi nuovi campi in cui era possibile mietere numerosi e importanti risultati; basti notare, ad es., che la geometria sopra una quadrica ad un numero qualunque di dimensioni dà come caso particolare tutta la geometria della retta, cioè la geometria proiettiva dello spazio ordinario, e mediante un'opportuna proiezione, come già aveva osservato il Klein, dà tutta la geometria metrica dello spazio ordinario, sia essa euclidea o non-euclidea.

Veramente, molti esempi notevoli di proprietà dello spazio ordinario, ricavate da considerazioni di Geometria iperspaziale, erano già stati dati qualche tempo prima dal Veronese, il quale,

Digitized by Google

in una poderosa memoria stampata nel 1882 nei *Mathematische Annalen* adoperò costantemente il metodo delle proiezioni e sezioni negli spazi a più dimensioni, mostrando così, ad es., che per studiare certe proprietà di classi di curve e superficie dello spazio ordinario, è molto utile ricorrere ad una conveniente figura ad una o due dimensioni, dello spazio ad n dimensioni, dalla quale poi, con opportune proiezioni e sezioni, si ricavano le proprietà volute.

Ma questi metodi non vennero subito applicati, e perciò spetta al Segre il merito di averli sistematicamente adoperati come efficaci strumenti di ricerche, e di aver costantemente richiamato su di essi l'attenzione degli studiosi.

In un lavoro di poco posteriore, sulle rigate razionali di uno spazio lineare qualunque, il Segre studia le superficie rigate a due dimensioni, d'ordine n, dello spazio lineare ad $n+1$ dimensioni, rettifica un'affermazione del Veronese e ritrova per via geometrica molto semplice dei risultati che per le rigate razionali dello spazio ordinario il Clebsch aveva ottenuto alcuni anni prima, in modo più complicato, per via analitica; così fornisce un nuovo esempio della utilità dell'uso della geometria degli spazi ad un numero qualunque di dimensioni, per lo studio di certe proprietà dello spazio ordinario (1).

Completamente padrone ormai dei metodi della Geometria della retta, il Nostro ne fa, nel 1884, un'elegante applicazione meccanica, al problema riguardante le quattro possibili posizioni d'equilibrio che un corpo rigido, girevole intorno ad un punto fisso, può assumere quando è soggetto all'azione di forze aventi direzione e intensità costanti; in tal modo ritrova alcune proprietà stabilite, un paio d'anni prima, da Siacci, e ne aggiunge parecchie nuove, facendo inoltre una interessante e completa

(1) Che tale utilità sia effettivamente grandissima si riconosce senz'altro, anche nel campo elementare, ove si rifletta, ad es., che nel piano non è possibile stabilire per via puramente proiettiva, il teorema di Desargues sui triangoli omologici, mentre invece esso si deduce subito con considerazioni geometriche nello spazio ordinario. E altri esempi elementari si potrebbero portare ancora.

Digitized by Google

analisi delle posizioni d'equilibrio stabile, o instabile, o indifferente.

Assai notevole per i risultati ottenuti è una memoria pubblicata nello stesso anno nei *Mathematische Annalen*, ove con metodo nuovo e assai fecondo, fa uno studio completo delle proprietà delle superficie di 4° ordine dotate di conica doppia. Tale metodo, che permette di risolvere colla massima facilità, e in modo sistematico, tutte le questioni che si possono porre sopra le superficie accennate, consiste nel considerare tali superficie come proiezioni centrali, sullo spazio ordinario, della quartica base di un fascio di quadriche dello spazio a quattro dimensioni. Veramente tale idea era già stata messa innanzi, sin dal 1869, da Darboux (e poco dopo più esplicitamente da Klein), il quale però non seppe in alcun modo sfruttarla perchè a quell'epoca non si parlava ancora di geometria proiettiva degli spazi a più dimensioni; Darboux stesso diceva infatti candidamente: poichè non esistono spazi a quattro dimensioni, i metodi di proiezione non si estendono alla geometria di tali spazi!

Risulta di qui quale immenso progresso abbia fatto la scienza geometrica negli ultimi quaranta anni, per opera specialmente del Segre: mentre nel 1870 non si concepiva neanche lo spazio a quattro dimensioni, oggi (e non da oggi soltanto) si discorre colla massima disinvoltura degli spazi, lineari o no, a un numero qualunque di dimensioni, e si ragiona su di essi press'a poco come se fossero vere entità fisiche, come lo spazio ordinario! Non solo, ma andando sino all'esagerazione, si è voluto creare, di recente, una nuova Meccanica, operando in uno spazio a quattro dimensioni, nel quale il tempo funziona da quarta coordinata, o taluno ha anche manifestato la speranza che i nostri sensi riescano ad affinarsi in modo tale da *sentire* la curvatura del nostro spazio!

Nella memoria in discorso il Segre ritrova in modo uniforme tutte le proprietà già note delle superficie considerate, ne stabilisce delle nuove, e trova numerosi nuovi tipi di tali superficie, e inoltre riesce a penetrare la ragione intima di varie proprietà che avevano già stabilito Darboux, Moutard, Loria ed altri, ma i cui mutui legami erano rimasti completamente oscuri.

Digitized by Google

Con ciò Egli ha portato una nuova splendida prova dell'efficacia grandissima del metodo cosidetto *iperspaziale*, del quale aveva già fatto interessanti applicazioni.

In alcuni altri lavori il Segre si occupa della teoria generale delle omografie e correlazioni in uno spazio lineare ad n dimensioni, e traendo profitto da ricerche di Hermite, Cayley e da altre di Weierstrass, Frobenius pubblicate allora allora, ottiene importanti proprietà di tali omografie, che in casi particolari dànno proposizioni che erano già state prima ottenute da altri autori, e ne fa la classificazione completa.

Questo gruppo di lavori, che stabilisce notevoli rapporti, prima non sospettati, fra la Geometria iperspaziale e noti teoremi algebrici, ha poi dato luogo a importanti lavori di altri autori, che in alcuni punti hanno portato delle semplificazioni alle considerazioni, pur già semplici ed eleganti, del Nostro.

Della teoria delle rigate algebriche il Segre si occupò ancora in altri lavori pubblicati fra il 1886 e il 1889; di questi è specialmente importante una estesa memoria, pubblicata in due parti nei *Mathematische Annalen*, nella quale, oltre essere sistematicamente esposti i risultati che aveva già ottenuti precedentemente, vi aggiunge una larga messe di risultati nuovi e di fondamentale interesse. Il metodo in essa adoperato consiste essenzialmente nel ricorrere, per lo studio della corrispondenza fra due curve algebriche di uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni, alla superficie rigata formata dalle congiungenti coppie di punti omologhi di esse, procedimento che in casi particolari era stato già adoperato dal Cremona. Dalle proprietà di tali rigate si deducono varie proprietà importanti delle curve iperspaziali.

In questa Memoria apparisce per la prima volta quell'indirizzo, che si può a buon diritto chiamare italiano, che il Segre stesso e poi altri geometri nostri, e specialmente il Severi, hanno seguito per lo studio delle serie lineari sopra una curva algebrica.

Siffatto indirizzo Egli sviluppò completamente nel corso di Geometria superiore che tenne nel 1890-91, svolgendo la Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito. Tale

Digitized by Google

ramo di Geometria, fondato dal genio di Riemann nel 1857, si sviluppò poi secondo vari punti di vista: quello funzionale, iniziato da Riemann stesso, quello algebrico-geometrico di Brill e Nöther, e quello che potrebbe dirsi algebrico-aritmetico di Kronecker, Dedekind e Weber.

Ora, il Nostro aveva precedentemente osservato, nelle sue ricerche sulle rigate algebriche, e più in generale sulle varietà semplicemente infinite di spazi, che le proprietà delle serie lineari studiate da Brill e Nöther si potevano ritrovare con semplici ragionamenti geometrici iperspaziali, ricorrendo alle rigate e alle accennate varietà di spazi; in tal modo venivano evitati i calcoli algebrici e le considerazioni funzionali che occorrono per stabilire il teorema fondamentale di Nöther; unico modo con cui comparisce l'algebricità degli enti è col principio di corrispondenza per le forme semplici razionali.

In base a queste osservazioni, che Egli amplificò ed applicò variamente a numerose questioni geometriche, che espose nel corso di Geometria già accennato, Egli compose un'ampia Memoria, di ben 100 facciate, stampata nel 1893 negli *Annali di Matematica*, ove sono posti i fondamenti della Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito; tale Memoria divenne ben tosto classica, e ora costituisce il *vade-mecum* del geometra moderno. Nello stesso volume degli *Annali* si trova pure una memoria del Bertini, ove le stesse quistioni sono studiate con procedimenti algebrici.

Nel 1886, svolgendo il corso di Geometria proiettiva, il Segre ebbe occasione di esaminare quale fosse la via migliore per introdurre in Geometria sintetica gli elementi immaginari. Di tale questione si era già occupato qualche decina di anni prima, un grande geometra tedesco, lo Staudt, del quale il Nostro era fervente ammiratore (il Segre promosse infatti l'ottima traduzione fatta in lingua nostra, nel 1889, dal Pieri della *Geometrie der Lage* dello Staudt), il quale mediante la considerazione di una conveniente involuzione ellittica e dei due versi della forma di 1ª specie considerata, era riuscito in modo mirabile a definire isolatamente gli elementi immaginari di una tale forma. Ora il Segre osservò che nelle proposizioni consuete

Digitized by Google

della geometria proiettiva gli elementi immaginari si presentano sempre a coppie, anzichè isolati, e allora reputò opportuno di dare una definizione diretta di tali coppie (che risulta evidentemente più semplice di quella di Staudt) e ne indicò varie applicazioni.

Tre anni dopo, ritornò ad occuparsi di questioni attinenti agli elementi immaginari in alcuni lavori che si distinguono per la loro originalità. Staudt stesso aveva già osservato che la sua ben nota definizione di proiettività sopra una forma di 1ª specie non era più sufficiente quando, oltre agli elementi reali, si considerino anche elementi immaginari. Orbene, il Nostro indagò, con penetrante analisi, le proprietà di quelle corrispondenze più generali in cui i birapporti di due quaterne di elementi corrispondenti sono numeri immaginari, non più eguali, ma coniugati. Queste nuove corrispondenze Egli chiamò *antiproiettività*, e di esse studiò le proprietà generali, fondando così una teoria completa delle antiproiettività. Da essa dedusse poi la nozione di enti *iperalgebrici* di una forma complessa, e inoltre fece uno studio esteso delle relative corrispondenze iperalgebriche.

Questo complesso di importanti lavori costituisce un'altra delle grandi pietre angolari dell'edificio geometrico costruito dal Segre.

L'importanza fondamentale di tutti questi lavori e di altri minori fu bentosto da tutti riconosciuta: numerose accademie italiane e straniere lo vollero socio. Nel 1898 poi, la Commissione per il premio reale dell'Accademia dei Lincei per la Matematica, composta di Beltrami, Bianchi, Cerruti, Cremona e D'Ovidio che ne fu relatore, gli assegnò una metà del premio reale (essendo l'altra metà assegnata ad un altro valoroso scienziato che fu Suo collega nell'Ateneo nostro, Vito Volterra) con una relazione altamente lusinghiera, della quale mi piace riportare qualcuna delle conclusioni: " L'opera scientifica del Segre è delle " più ammirevoli. Egli ha lasciato tracce del suo forte ingegno " e della sua grande e continua operosità in vasti campi, in " parte ancora inesplorati. La Geometria degli iperspazi ha " acquistato, specialmente per opera sua, uno sviluppo ed una " diffusione di somma importanza. Alcune teorie fondamentali,

Digitized by Google

" come quella delle quartiche, delle omografie e delle rigate in " un S_n, si possono dire *organicamente formate* e compiutamente " svolte da lui. ..... Altre teorie, come quella degli enti iperal- " gebrici, sono interamente dovute a lui. Nè è da tacersi un " altro e principale merito del Segre: di avere, cioè, avviato " il presente indirizzo italiano degli studi di Geometria sopra " una curva ed una superficie, contribuendovi egli stesso effi- " cacemente „.

La produzione successiva del Nostro, pure si raccomanda per importanza e copia di risultati e perspicuità di vedute.

Nelle Sue ricerche di Geometria iperspaziale più volte aveva avuto occasione di studiare questioni attinenti alla geometria delle superficie algebriche, sulle quali le conoscenze erano assai scarse, specialmente in quanto si riferisce alla estensione ad esse del fecondo concetto di genere di una curva, e alla struttura dei punti singolari.

A tali quistioni, così vitali per la teoria delle superficie, Egli dedicò alcuni lavori, in uno dei quali, pubblicato nel 1896 negli " Atti „ della nostra Accademia, Egli estendendo alle superficie e varietà superiori i procedimenti così promettenti che aveva esposto nella Memoria, sopra citata, degli *Annali di Matematica*, giunse a stabilire un carattere fondamentale delle superficie, mediante una relazione fra il genere superficiale e il genere lineare della data superficie. Tale relazione era stata incontrata poco prima, da un punto di vista completamente diverso, dallo Zeuthen, e ora, per generale consenso, essa viene designata col nome di " invariante di Zeuthen-Segre „.

In altra poderosa Memoria Egli affronta il difficile problema della scomposizione dei punti singolari di una superficie algebrica, estendendo alle superficie un concetto che era già stato utilmente adoperato da Nöther per lo studio delle singolarità delle curve piane algebriche, cioè quello di riguardare la singolarità come composta di un numero finito di punti multipli infinitamente vicini.

Nel 1901, con una breve ma succosa comunicazione alla nostra Accademia, moveva una acuta obbiezione ad un ragionamento del Nöther relativo alla decomponibilità di una trasfor-

Digitized by Google

mazione cremoniana in un prodotto di un numero finito di trasformazioni quadratiche. Tale obbiezione produsse una viva sorpresa e anche un certo senso di smarrimento fra i geometri, giacchè essa infirmava tutto un tipo di ragionamento che era stato pacificamente applicato anche nello studio dei sistemi lineari di curve piane, e perciò pareva che dovessero vacillare grandiosi edifici che si ritenevano fondati su solide basi.

Fortunatamente le cose poterono presto accomodarsi, giacchè poco dopo il Castelnuovo indicò come dovevano essere modificate e completate le argomentazioni di Nöther, per renderle completamente rigorose ed esenti da critiche.

Un'altra e cospicua serie di lavori, ove pure Egli impresse orme profonde del Suo sapere e del Suo ingegno, è costituita da quelli attinenti a quistioni di Geometria proiettivo-differenziale, ai quali problemi era stato portato dallo studio dei ben noti volumi di Darboux sulla teoria delle superficie, che Egli aveva avuto occasione di svolgere nei Suoi corsi. Nel primo di tali lavori, stampato nel 1907 negli *Atti* della nostra Accademia, Egli fa una rappresentazione geometrica delle soluzioni linearmente indipendenti delle equazioni a derivate parziali di 2° ordine a un numero di variabili maggiore di 2, essendo il caso di due variabili ampiamente trattato dal Darboux. Valendosi della Sua eccezionale maestria nel maneggiare gli spazi superiori, Egli stabilisce importanti proprietà di certe classi di superficie in relazione appunto alle equazioni differenziali considerate. Queste ricerche schiusero un nuovo fertile campo di studi analitico-geometrici!

In un successivo lavoro, pure riguardante la Geometria differenziale, generalizzando il noto concetto di tangenti coniugate di una superficie, fu portato a considerare, per una superficie qualunque, un sistema notevole di curve, analoghe alle linee di Darboux; esse vennero giustamente chiamate "linee di Segre, e la loro importanza venne messa in luce da ricerche compiute poi da vari autori, specialmente dal Fubini.

Oltre a queste ricerche di così alta importanza, Egli, in lavori di minor mole, studiò svariatissime altre questioni, come ad es. le varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni, le varietà

Digitized by Google

che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi, e che vengono denominate " varietà di Segre „, la teoria delle schiere rigate, o *regoli*; nè vanno dimenticati i suoi studi su questioni di Geometria enumerativa, che diedero origine a vari lavori di Suoi discepoli, fra i quali emergono per generalità e importanza di risultati quelli del Giambelli.

In tutti questi lavori spiccano le eccelse doti di geniale geometra, di chiaro e preciso espositore del Nostro, il quale, grazie alla Sua non comune cultura analitica, oltre che geometrica, sa cogliere un'infinità di rapporti, non prima sospettati, fra i più disparati capitoli della Scienza (1).

***

Tale, o colleghi, fu la multiforme attività scientifica di Corrado Segre, il quale spaziava veramente da gran maestro e da gran signore nei campi sconfinati della Geometria.

Dal rapido esame fatto dell'eredità intellettuale lasciataci da Lui, esame senza dubbio troppo rapido e inadeguato alla Sua meravigliosa ricchezza, risulta evidente la grandezza monumentale dell'opera Sua, e l'azione notevolissima da essa esercitata sullo sviluppo degli studi geometrici nel nostro Paese.

L'indole del Suo spirito lo portava ad affrontare sempre problemi nuovi e di grande generalità, piuttosto che soffermarsi su quelle quistioni, pure molto interessanti, di critica e di analisi dei principî della Geometria, per le quali è specialmente segnalata ed apprezzata l'opera del Peano, del compianto Pieri e di altri ancora.

Ma la Sua mente poderosa era aperta, non meno, agli studi ed alle letture di altro genere, chè amava assai la letteratura e la storia, e, al pari di altri grandi scienziati, era appassionato di musica, specialmente classica.

---

(1) Un elenco completo delle pubblicazioni del Segre, redatto dal professore Togliatti, si trova riportato nell'articolo di G. Loria, *L'opera geometrica di Corrado Segre* (" Annali di Matematica „, serie IV, tomo II, a. 1924).

Digitized by Google

Quando nel 1886, per l'eccessivo lavoro, fu colpito da una forma di nevrastenia che gli dava acuti dolori nervosi agli occhi, sì da impedirgli, per vari mesi, di attendere ai Suoi studi prediletti, si faceva leggere dai familiari gli interessanti volumi di Adolfo Thiers sulla Storia della rivoluzione francese, dimostrando molto interesse anche per gli studi storici che, unitamente agli studi economici, sono, come ben si sa, quelli che meno si discostano dal rigore di ragionamento che domina nelle discipline matematiche.

Il Nostro, nelle Sue ricerche, ebbe sempre, e soltanto, di mira l'alto ideale scientifico, senza mai preoccuparsi di eventuali applicazioni pratiche, prossime o remote, dei Suoi studi; e il domandarsi ora quali possano essere tali applicazioni sarebbe questione non solo oziosa, ma indecorosa.

Basti citare l'esempio dei Greci, che ci tramandarono teorie geometriche meravigliose, come ad es. quella delle coniche; forse che essi si domandarono a che cosa servissero, in pratica, i loro studi? Pensavano forse all'applicazione che le loro mirabili investigazioni avrebbero avuto molti secoli dopo, in Astronomia, grazie alle leggi di Keplero?

Un altro grande Scienzato torinese, immaturamente rapito alla Scienza, e che pure illustrò fulgidamente la nostra Accademia, voglio dire Galileo Ferraris, che al Nostro era legato da profonda amicizia, scrisse in proposito queste scultoree linee: " Un trovato scientifico, come un lavoro artistico, ha in se stesso " i caratteri che lo debbono fare apprezzare, e la sua importanza, " la sua bellezza, il suo diritto alla nostra considerazione sono " indipendenti dalla utilità pratica che quel trovato e quell'opera " possono avere. Quando, contemplando un prodotto della Scienza, " od un'opera d'arte, sentiamo in noi quella soddisfazione che " ci fa dire: *bello*, allora quel prodotto o quell'opera sono " utili in sè.

" Chi nelle ricerche scientifiche avesse sempre in mira le " applicazioni, non troverebbe mai nulla, e chi, nel giudicare " dell'importanza di una scoperta, non sapesse vedere altro che " l'utilità che essa può avere, proverebbe di non avere gustato " mai la vera gioia del sapere „.

Digitized by Google

Il Nostro fu un cultore della Matematica per la Matematica, trovando in essa quel fascino che i poeti trovano nella Poesia, la quale, secondo il Leopardi, avrebbe colla Matematica una comune origine; egli scrive infatti nei suoi *Pensieri*: " È certo ' che il grande poeta può essere anche gran matematico, e ' viceversa. Se non è, se il suo spirito si determinò ad un solo ' genere (che non sempre accade) ciò è puro effetto delle cir- ' costanze ".

Questo concetto il Leopardi ribadisce poi ancora, affermando che " ... da una stessa sorgente, da una stessa qualità dell'animo, ' diversamente applicata e diversamente modificata, e deter- ' minata da diverse circostanze e abitudini vennero i poemi ' di Omero e di Dante e i " Principii matematici della filosofia ' naturale " di Newton ".

Come si vede, siamo perfettamente agli antipodi rispetto a quel cumulo di ... amenità scritte alcuni anni fa da un filosofo nostrano, che pure raggiunse le più alte cariche dello Stato, secondo il quale la Matematica non è scienza, non è poesia, non è logica, e non è nemmeno un linguaggio. E allora, ci si può domandare, che cosa è, secondo tale filosofo, ad es. l'opera immortale di Euclide?

***

Ma, oltre che per l'opera scientifica, Corrado Segre è ammirevole ancora per un altro ramo importantissimo della Sua operosità, e cioè per l'opera didattica, che Egli esplicò, per ben 36 anni, nella nostra Università, dimostrandosi un Maestro, nel senso più elevato e più ampio della parola, Maestro di rara efficacia e di profonda e varia cultura.

Egli dedicò ai giovani la provata instancabilità, l'inesauribile energia, il giovanile entusiasmo, tutto se stesso insomma.

Come in tutte le Sue opere, Egli, nel guidare i giovani metteva tutta l'anima Sua, nè mai lasciava sfuggire un'occasione nella quale con una parola, con un consiglio, con una breve conversazione, non li aiutasse a superare qualche scoglio imprevisto o a chiarire qualche difficoltà incontrata nei loro studi;

Digitized by Google

e sempre mostrava loro l'utilità, anzi la necessità, di formarsi una larga e solida base culturale.

Nè i Suoi ammaestramenti si limitavano alla parola, perchè preferiva aggiungervi l'efficacia dell'esempio; e tutta la Sua vita fu a tutti esempio di attività instancabile, di perseverante operosità, di costante fermezza.

Si può inoltre asserire con sicurezza che Egli non fu superato da alcuno nel preparare, con cura minuta ed assidua, i proprî corsi di Geometria superiore, il cui argomento cambiava ad ogni anno, cercando sempre di mettere i giovani al corrente degli ultimi progressi della Scienza, e di abituarli al ragionamento geometrico, col quale Egli aveva conseguito così innumerevoli allori. Egli apparecchiava ogni corso con una pazienza forse unica, studiandone ogni più minuto particolare, per modo che riuscisse, più che possibile perfetto, e in guisa che le quistioni trattate sembrassero risolte con procedimento scevro di ogni difficoltà o artificiosità, come se costantemente un filo conduttore portasse, in modo naturale, alla mèta.

Pure molta cura dedicava alla scelta delle notazioni, la quale ha più importanza di quanto a prima vista non sembri, dividendo così le idee di Poincaré, il quale riteneva, con sicuro fondamento, che, in Matematica, una buona notazione è altrettanto utile quanto una buona classificazione nelle Scienze naturali.

Per ogni lezione Egli preparava minutamente la esposizione orale, che riusciva sempre modello di precisione e chiarezza.

Queste lezioni Egli stesso scriveva in appositi taccuini, corredandole delle opportune indicazioni bibliografiche, e spesso di cenni su questioni che avrebbero potuto essere proficuamente studiate; la stampa di tali corsi, così varî e multiformi, improntati sempre a un sano spirito di modernità, renderebbe un grande servigio ai cultori degli studi geometrici.

Oltre al corso abituale di 3 ore settimanali, ricorderò che il Segre dedicava un'altra ora settimanale a noi allievi, per conferenze, assegnandoci lo studio di capitoli di varî autori, che noi dovevamo poi esporre; e ciò Egli faceva col duplice scopo di abituarci a leggere da noi e interpretare le opere dei migliori autori, e di addestrarci nella esposizione didattica dei capitoli studiati.

Digitized by Google

L'efficacia didattica del Nostro, è luminosamente provata dai numerosi discepoli che sotto la Sua guida intrapresero e coltivarono gli studi geometrici, e che ora sono apprezzati docenti nelle Università nostre; così troviamo: Fano e Terracini a Torino, Giambelli a Messina, Levi Beppo a Parma, Severi a Roma e Togliatti a Genova.

È certo assai difficile trovare, anche fuori del nostro Paese, un altro Maestro che possa vantare una tale fioritura di valorosi discepoli.

Ma oltre a questi discepoli diretti, l'opera Sua si irradiò anche attraverso l'ampia corrispondenza che Egli ebbe con molti matematici, italiani e stranieri; e più d'uno studioso inglese e americano, non esitò ad attraversare i mari per recarsi nel nostro Ateneo a sentire l'efficace e nutrita parola di Corrado Segre.

È utile pure ricordare che Egli tenne anche, nel 1896, l'incarico della Fisica-matematica, svolgendo un corso molto interessante, ove erano esposti, in rapida sintesi, alcuni dei più notevoli capitoli riguardanti vari argomenti della Fisica-matematica. Egli ebbe anche per alcuni anni l'incarico delle Conferenze di Magistero per i laureandi in Matematica, e nel 1923 l'incarico del corso di Matematiche complementari per la laurea mista in Matematica e Fisica, allora istituita. Anche nello svolgimento di questi corsi, di natura elementare, Egli seppe portare notevole copia di vedute originali.

Nel 1909 fu, dalla fiducia dei colleghi, chiamato alla presidenza della Facoltà di Scienze, e tenne questo ufficio per ben nove anni. E pure dal 1909 fino al giorno della Sua dolorosa dipartita, ebbe la direzione della Biblioteca speciale di Matematica della Facoltà di Scienze, Biblioteca che, istituita nel 1878 per la sagace preveggenza del sen. D'Ovidio, è oggi ricchissima di opere italiane e straniere, ed è forse la migliore, nel suo genere, che esista da noi.

È superfluo aggiungere che anche i doveri di questi uffici, il Nostro li adempì con quello zelo e quella operosità, che gli erano abituali.

All'avvenire dei nostri giovani laureati Egli si interessava

Digitized by Google

con affetto paterno, sia per facilitare loro un collocamento, sia per eccitarli a non tralasciare di studiare dopo ottenuta l'agognata laurea. Quando essi si rivolgevano a Lui per averne aiuti e consigli, lo trovavano sempre memore di loro e pronto a fare per essi quanto stava in Suo potere.

L'amore del Nostro per la Scienza e la Scuola era forse solo superato da quello verso la Famiglia; chi lo conobbe nella intimità della famiglia sa di quanta tenerezza il Suo cuore fosse capace, e sa come alla educazione morale e intellettuale delle due figliole dedicasse le cure più assidue ed i pensieri di tutte le ore, spinto a ciò da due potentissime forze che in Lui erano cospiranti: il dovere e l'affetto.

Di Lui si può ben dire che visse soltanto per la Famiglia, per la Scienza e per la Scuola, e questo indissolubile trinomio costituì tutto lo scopo e l'ideale della Sua vita.

Corrado Segre fu sempre alieno dagli onori e dalla pubblicità; Egli ricavava le Sue più grandi soddisfazioni dalla Scienza, che così intensamente coltivava con mano maestra, e dagli affetti familiari.

Dove ha potuto, sempre ha cercato di fare il bene e l'interesse della Scuola, sostenendo con fermezza le idee che reputava utili al buon andamento di essa, senza lasciarsi smuovere da riguardi personali.

La Sua poderosa opera nel campo della Scienza geometrica è prova perenne delle altissime doti della Sua mente; grazie ad essa e anche all'opera dei suoi discepoli, fra i quali primeggia il Severi, il nostro Paese ha acquistato in tale campo un'indiscussa superiorità, che non potrà tanto facilmente essergli tolta, e che deve essere per noi motivo di ammirazione imperitura verso la memoria di Corrado Segre.

Possa la Sua vita intemerata, tutta dedita al lavoro e agli affetti familiari, servire di nobile esempio alla gioventù della nuova e più grande Italia, che dovrà guardare a Lui come ad un faro radioso di valore scientifico e di virtù civili!

Torino, Maggio 1928.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Giugno 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Grassi, Somigliana, Ponzio, Panetti, Sacco, Majorana e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza i Soci: Guidi e Pochettino.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Socio Somigliana presenta in omaggio all'Accademia una sua Nota dal titolo: *Sulla gravità normale e la formola di Helmert* e ne discorre brevemente.

Il Socio Panetti fa dono alla Biblioteca Accademica di un fascicolo pubblicato dal *Laboratorio di Aeronautica della R. Scuola di Ingegneria di Torino,* dal quale si studiano i: *Diagrammi logaritmici di eliche raccolte in 25 famiglie relative al rapporto fra passo e diametro.*

Il Socio Segretario Mattirolo fa quindi omaggio di una sua pubblicazione di propaganda, che ha relazione colla questione del rimboschimento per mezzo della *Tartuficultura.* Egli discorre dell'ideale che lo mosse a far conoscere al pubblico, nella Esposizione odierna, le conquiste ottenute già in Francia,

Digitized by Google

dove per mezzo della cultura del Tartufo nero si è riuscito a rimboschire migliaia di Ettari. Parla dei risultati delle coltivazioni da lui fatte per ottenere il Tartufo bianco e del sicuro avvenire che dovrà avere anche da noi questa pratica per mezzo della quale si inducono i proprietari dei terreni convenienti alla coltivazione a piantare alberi adatti a vivere simbioticamente coi Tartufi, quali sono per il Tartufo bianco le *quercie*, i *pioppi*, i *salici*, i *noccioli*, ecc.

Terminata la presentazione degli omaggi, il Presidente comunica all'Accademia un gentile telegramma dell'onorevole Senatore e nostro Socio Paolo Boselli, in risposta al telegramma augurale a lui inviato dalla Presidenza dell'Accademia nell'occasione del suo novantesimo compleanno.

Il Presidente comunica inoltre una lettera ministeriale nella quale si avverte l'Accademia che, con Decreto Reale in corso, sono state approvate le elezioni del nobile Prof. Comm. Carlo Fabrizio Parona a Presidente dell'Accademia e del Professore Grand'Uff. Gaetano De Sanctis a Vice-Presidente per il triennio dal 20 aprile 1928 al 19 aprile 1931. L'adunanza accoglie con applauso unanime la comunicazione e il nuovo Presidente ringrazia.

Procedesi quindi alla presentazione delle Note da pubblicarsi negli *Atti*.

Il Socio Ponzio comunica due Note:

La prima dei signori Dott. G. B. Semeria e B. Somigliana ha per titolo: *Sulla cinetica della formazione delle Gliossime*;

La seconda dello stesso Prof. Ponzio e del Dott. M. Milone riguarda: *Ricerche chimico-fisiche sui perossidi*.

Il Socio Majorana una Nota che compendia le sue ricerche sulla: *Azione della luce su certi tipi di Audion*. Egli annunzia di aver trovato un interessante fenomeno consistente nell'ascoltazione di un suono molto intenso, quando un raggio di luce modulata va a colpire un *Audion*. Il fatto ha interesse sia teo-

Digitized by Google

rico che pratico, in quanto potrà avere importanza nella costruzione di ricevitori radiofonici.

Il Socio SOMIGLIANA, nel nome della Dott.ssa Cecilia DAINOTTI, presenta, per la inserzione negli *Atti*, una Nota dal titolo: *Determinazione della gravità al Polo e all'Equatore mediante coppie di valori osservati a varie latitudini*, e discorre dei risultati interessanti ottenuti dalle ricerche dell'Autrice.

Il Socio Segretario, nel nome del Socio GUIDI, assente, presenta uno studio del signor Ingegnere R. ZOIA (addetto al *Laboratorio Sperimentale sui materiali da costruzione*), il quale si occupa della: *Determinazione delle tensioni interne nella zona di massima contrazione di una provetta di acciaio a sezione circolare sperimentata a trazione.*

Finalmente i Soci PANETTI e PARONA presentano due Note:

la prima dello stesso Socio PANETTI ha per titolo: *Sulla discontinuità dei campi di velocità, con speciale riguardo alle superficie limitanti le Scie*;

la seconda del sig. L. G. NANZERONI si riferisce a: *Nuovi affioramenti del Pliocene marino nella Valle d'Olona.*

Terminata la presentazione delle Note, si procede alla nomina del Direttore di Classe, secondo il Regolamento. È dichiarato eletto il Socio GRASSI, salvo approvazione sovrana.

Si procede quindi alla nomina del Segretario di Classe e risulta eletto il Socio REPOSSI, salvo approvazione sovrana.

Dopo di che il Segretario MATTIROLO, uscente di carica, e non più riconfermabile, ha ringraziato l'Accademia per l'indulgenza accordatagli durante i sei anni del suo ufficio.

La votazione per un membro della Commissione per il premio Vallauri, al posto del Socio PARONA, eletto Presidente, porta alla nomina del Socio PONZIO.

Il Presidente presenta ancora alcuni omaggi inviati:

1) Dal sig. Paolo CIPRIANI due opuscoli: *Divina Proportione; Cheope e Chefren.*

Digitized by Google

2) Dal Ministero dell'Interno (Direzione di Sanità pubblica): *La Relazione del Consiglio Superiore di Sanità dal 1° luglio 1926 al 30 giugno 1927* (volumi 2).

Essendo questa adunanza l'ultima dell'anno accademico per la Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, l'atto verbale è approvato ad unanimità, senza osservazioni, seduta stante.

Dopodichè l'adunanza è dichiarata chiusa.

Digitized by Google

LETTURE

Cinetica della formazione delle diossime

(Nota LII delle ricerche sulle diossime)

dei Dottori G. B. SEMERIA e B. SOMIGLIANA
presentata dal Socio naz. resid. G. Ponzio

Le conclusioni alle quali è arrivato Ölander (1) in un suo recente lavoro sulla cinetica della formazione dell'acetossima ci hanno indotto a studiare l'influenza del *p*H sulla reazione mediante la quale si effettua l'ossimazione del gruppo carbonilico nei composti contenenti anche un ossiminogruppo, cioè la formazione delle diossime per ossimazione dei cosidetti isonitrosochetoni $R . CO . C(: NOH) . R_1(H)$.

A tale scopo abbiamo scelto l'isonitrosoacetone (monossima del metilgliossale) $CH_3 . CO . C(: NOH) . H$, perchè discretamente solubile in acqua e perchè ossimato dà origine ad una diossima, la metilgliossima $CH_3 . C(: NOH) . C(: NOH) . H$, la quale esiste in un'unica forma alquanto solubile in acqua. D'altra parte, non essendo possibile dosare rapidamente nè la metilgliossima nè l'isonitrosoacetone, abbiamo, per lo studio della nostra reazione, seguìto un procedimento analogo a quello del suddetto Autore, determinando iodometricamente l'idrossilamina consumata in soluzioni molto diluite, di *p*H = 7,4, nelle quali l'equivalente iodio : idrossilamina si mantiene costante.

Dai dati sperimentali più avanti riferiti risulta che in solu-

(1) " Zeit. Phys. Chem. ,, *129*, 1 (1927).

Digitized by Google

zioni di acidità variabile da $p\mathrm{H} = 1{,}2$ a $p\mathrm{H} = 12$, la formazione della metilgliossima dall'isonitrosoacetone

$$\mathrm{CH_3 . CO . C(:NOH) . H} +$$
$$+ \mathrm{NH_2OH} \rightarrow \mathrm{CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . H} + \mathrm{H_2O}$$

non è soddisfatta dalla formula semplice delle reazioni bimolecolari; infatti calcolando la costante K di velocità di reazione per ogni acidità mediante la formola:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{(t_n - t)\,\mathrm{C}} \cdot \frac{\mathrm{T} - \mathrm{T}_n}{\mathrm{T}_n},$$

per diversi titoli T e corrispondenti tempi t, si ottengono valori che differiscono fra loro anche più di un'unità nella prima cifra significativa. E neppure sembra applicabile nel nostro caso l'espressione stabilita da Ölander per la formazione dell'acetossima dall'acetone, la quale coinciderebbe con quella semplice sopracitata per le reazioni in ambiente di $p\mathrm{H}$ tra 5 ed 8.

Inoltre, a differenza di quanto avviene per l'acetossima, la cui formazione, più rapida per $p\mathrm{H}$ fra 5 ed 8, diventa più lenta per $p\mathrm{H}$ più elevati, per ridiventare veloce per soluzioni fortemente basiche, la velocità di formazione della metilgliossima aumenta col crescere del $p\mathrm{H}$ della soluzione, il che appare chiaramente dal grafico in cui sono riportati per tutti i $p\mathrm{H}$ i cc. di iodio corrispondenti all'idrossilamina presente nella soluzione ad ogni istante.

L'ipotesi adottata da Ölander per stabilire la sua espressione, cioè la formazione di un composto intermedio

$$(\mathrm{CH_3})_2 : \mathrm{C}\begin{matrix}\diagup\mathrm{OH}\\ \diagdown\mathrm{NHOH}\end{matrix}$$

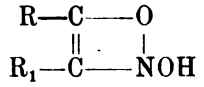
potrebbe anche essere presa in considerazione nel nostro caso, in cui il composto intermedio sarebbe

$$\mathrm{CH_3 . C}\begin{matrix}\diagup\mathrm{OH}\\ \diagdown\mathrm{NHOH}\end{matrix}\mathrm{C(:NOH)\,H:}$$

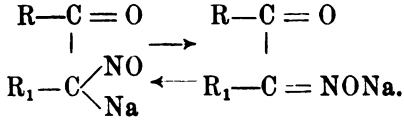
Digitized by Google

ma il fatto che la reazione diventa più rapida col crescere della basicità della soluzione si interpreta meglio considerando che nelle suddette condizioni l'isonitrosochetone viene gradatamente trasformato in un sale complesso nel quale entrano in giuoco le valenze secondarie del metallo e del carbonile.

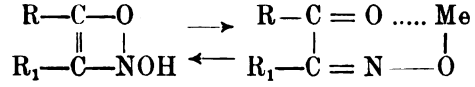
D'altra parte Baly, Marsden e Stewart (2) studiando gli spettri di assorbimento degli isonitrosochetoni e dei loro sali sodici sono giunti alla conclusione che i primi si comportano come composti ciclici non carbonilici



e che nella soluzione dei secondi esiste l'equilibrio



I risultati delle nostre esperienze, fondate su concetti assolutamente diversi da quelli adottati dai suddetti Autori, non sarebbero in contrasto colle opinioni di questi ultimi qualora si ammettesse l'esistenza dell'equilibrio



spostabile verso destra col crescere del *p*H della soluzione.

Parte sperimentale.

Per le presenti ricerche si impiegò cloridrato di idrossilamina ripetutamente cristallizzato dall'alcool metilico; isonitrosoacetone cristallizzato da soluzioni molto diluite di tetracloruro

(2) « Journ. chem. Soc. London », *89*, 966 (1906).

Digitized by Google

di carbonio e fusibile a 68°-69° (3); metilgliossima critallizzata dall'acqua e fusibile a 157°.

Le soluzioni tampone con pH compreso fra 4,6 e 9 furono preparate mescolando soluzioni $\frac{M}{15}$ di fosfato bisodico con soluzioni $\frac{M}{15}$ di fosfato monopotassico; quelle con $p\text{H} > 9$ mescolando soluzioni $\frac{N}{10}$ di idrossido di sodio con soluzioni $\frac{M}{20}$ di fosfato bisodico; quelle con $p\text{H} = 3$ mescolando soluzioni $\frac{N}{10}$ di acido cloridrico con soluzioni $\frac{M}{10}$ di citrato sodico; per $p\text{H} < 3$ si usarono soluzioni $\frac{N}{10}$ di acido cloridrico e soluzioni $\frac{M}{10}$ di cloruro potassico. Durante l'intero periodo delle esperienze si impiegarono sempre le medesime soluzioni, la cui acidità si mantenne praticamente invariata.

La determinazione del pH si fece con un comparatore di Hellige, e non col metodo elettrometrico, e ciò sia per la necessità di operare con la massima rapidità, sia perchè l'elettrodo ad idrogeno non può essere impiegato in presenza di sostanze facilmente riducibili. L'elettrodo a chinidrone fu escluso per ovvie ragioni chimiche.

Gli indicatori impiegati non avevano alcuna azione sulle sostanze poste a reagire.

I prelevamenti delle soluzioni da titolare erano fatti con pipette da 50 e da 5 cc. a totale svuotamento, le quali davano garanzia di precisione.

La buretta impiegata per l'iposolfito era del tipo di quella descritta da A. Benedetti-Pichler (4), divisa in centesimi di cc.; però per regolare l'efflusso del liquido, invece della pinza sul tubo di gomma superiore, si adottò alla parte inferiore un tubetto con una pallina. Lo scolamento del liquido veniva, all'occorrenza, accelerato soffiando nel tubo di gomma superiore, di

(3) L'isonitrosoacetone purificato in questo modo si presenta in lunghi aghi bianchi, ed, a differenza del prodotto cristallizzato da altri solventi, non si altera col tempo.

(4) " Zeit. anal. Chem. „, 73, 202 (1928).

Digitized by Google

modo che si poteva compiere ciascuna titolazione in meno di 20 secondi.

Il termostato conteneva circa 20 litri di acqua ed era riscaldato con una resistenza elettrica regolata da un termoregolatore elettrico col quale si poteva operare alla temperatura di 20°, con variazioni non superiori ad un ventesimo di grado. Un sistema di agitazione rimescolava l'acqua del termostato, ed un altro, indipendente dal primo, manteneva in rapido movimento le soluzioni poste a reagire durante tutto il tempo dell'esperienza.

Le soluzioni dell'isonitrosoacetone e del cloridrato di idrossilamina si scelsero circa $\frac{M}{1000}$, cioè non troppo basse da rendere incerta la titolazione, e non troppo alte da non permettere di seguire la reazione.

Per la titolazione dell'idrossilamina si determinò dapprima l'equivalente iodio : idrossilamina in soluzioni di differenti pH e per concentrazioni prossime a quelle adottate per le esperienze successive, arrivando alla conclusione che l'idrossilamina reagisce con l'iodio in modo sufficentemente costante in soluzioni di $p\text{H} = 7{,}4$, e si stabilì l'equivalenza iodio : idrossilamina $= 2{,}6$.

Si constatò inoltre, aggiungendo a soluzioni fisse di idrossilamina quantità variabili di soluzione di iodio e titolando poi l'eccesso di questo con iposolfito, che un eccesso di iodio non aveva influenza alcuna sulla titolazione.

Non si fecero le titolazioni in ambiente di anidride carbonica, perchè i vantaggi che, secondo alcuni Autori, avrebbe questo modo di operare, sono annullati dagli inconvenienti di un'attrezzatura più complicata che va a scapito della rapidità della titolazione.

Avendo riconosciuto che il iodio reagisce alquanto con l'isonitrosoacetone, e che la reazione è influenzata dal pH della soluzione, si esaminarono soluzioni di $p\text{H} = 7{,}4$ aventi le concentrazioni delle soluzioni usate nello studio della reazione isonitrosoacetone + idrossilamina, ed, operando analogamente, dopo aver constatato che il consumo di iodio si manteneva praticamente proporzionale alla concentrazione di queste ultime si sta-

Digitized by Google

bili l'equivalente iodio : isonitrosoacetone = 0,2618, impiegandolo poi come fattore di correzione.

In quanto alla metilgliossima si può dire che nei limiti di diluizione in cui noi abbiamo operato essa non reagisce praticamente con la soluzione di iodio.

Per seguire la reazione isonitroso + idrossilamina si operò nel seguente modo. In un pallone da 750 cc. posto nel termostato si introducevano 5 cc. di soluzione tampone e raggiunta la temperatura di 20° si addizionavano, mantenendo sempre il liquido in forte agitazione, 5 cc. di soluzione $\frac{M}{10}$ di isonitrosoacetone e 5 cc. di soluz. $\frac{M}{10}$ di cloridrato di idrossilamina previamente portate alla suddetta temperatura. Si prelevavano quindi, di tempo in tempo e per la durata di due ore, dei campioni di 5 cc. della miscela, e mediante aggiunta di convenienti soluzioni di idrossido di sodio, o di acido cloridrico, o di fosfato bisodico, o di fosfato monopotassico, ecc., si portavano il più rapidamente possibile al *p*H di titolazione (7,4). Ciò fatto, e sempre rapidamente, si aggiungevano 5 cc. di soluzione di sodio e finalmente si procedeva alla titolazione con iposolfito.

TABELLE

Iodio-isonitrosoacetone.

In questa tabella viene riportato il consumo di iodio (cc. di una soluzione di titolo 1 cc. = gr. 0,00029449) in soluzione tampone di *p*H = 7,4 ed alla temperatura di 20°. Nella 1ª prova a 500 cc. di soluzione tampone vennero aggiunti 5 cc. di soluzione di isonitrosoacetone, titolando poi di tempo in tempo 5 cc. della miscela.

Nella 2ª prova si aggiunsero soltanto 2,5 cc. di soluzione di isonitrosoacetone.

tempi in minuti		1	20	40	60	90	120
cc. della soluzione di iodio	1ª prova	0,57	0,56	0,56	0,56	0,555	0,55
	2ª prova	0,29	0,28	0,285	0,28	0,28	0,28

Digitized by Google

Idrossilamina-isonitrosoacetone.

Nelle seguenti tabelle sono riportati:

a) il *p*H della soluzione all'inizio della reazione;

b) nella prima colonna i tempi in minuti trascorsi dall'inizio della reazione alla presa del campione;

c) nella seconda colonna i cc. della soluzione di iodio corrispondenti all'idrossilamina ed all'isonitrosoacetone ancora presenti nella soluzione;

d) nella terza colonna i cc. di iodio corrispondenti alla sola idrossilamina. In queste ultime cifre compaiono i millesimi di cc. come conseguenza del calcolo di correzione.

In tutte le prove la temperatura era di 20°; al principio della reazione la soluzione era costituita da 500 cc. di soluzione tampone + 5 cc. di soluzione di cloridrato di idrossilamina + 3 cc. di soluzione di isonitrosoacetone; per ogni titolazione si prelevavano 5 cc. della miscela; il *p*H della soluzione da titolare veniva sempre portato a 7,4; il titolo della soluzione di iodio era 1 cc. = gr. 0,0002949.

Prova 1ª.

*p*H = 1,2

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	1,16	1,050
14	1,06	0,963
31	0,99	0,901
57	0,92	0,836
83	0,89	0,809
92	0,87	0,791
109	0,85	0,773
120	0,83	0,754

Prova 2ª.

*p*H = 2,2

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	1,13	1,027
15	0,97	0,882
31	0,88	0,800
46	0,83	0,754
61	0,81	0,736
83	0,80	0,727
98	0,78	0,709
120	0,76	0,690

Digitized by Google

PROVA 3ª.

$pH = 3$

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	1,10	0,918
16	0,92	0,836
32	0,84	0,763
50	0,78	0,709
71	0,75	0,682
89	0,74	0,673
105	0,73	0,664
120	0,62	0,655

PROVA 4ª.

$pH = 4,6$

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	1,06	0,963
12	0,90	0,818
26	0,80	0,727
41	0,75	0,682
60	0,71	0,645
78	0,69	0,627
96	0,67	0,609
120	0,65	0,591

PROVA 5ª.

$pH = 5,4$

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	1,05	0,954
12	0,86	0,782
25	0,76	0,691
44	0,70	0,636
60	0,67	0,609
77	0,65	0,591
87	0,63	0,573
120	0,62	0,563

PROVA 6ª.

$pH = 6$

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	1,03	0,936
15	0,82	0,745
25	0,73	0,663
39	0,67	0,609
57	0,63	0,573
76	0,60	0,545
93	0,58	0,527
120	0,57	0,518

PROVA 7ª.

$pH = 6,6$

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	0,95	0,863
5	0,85	0,772
19	0,80	0,727
36	0,64	0,582
59	0,57	0,518
77	0,55	0,500
97	0,53	0,482
120	0,52	0,473

PROVA 8ª.

$pH = 7$

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
2	0,88	0,800
12	0,76	0,691
24	0,64	0,582
44	0,58	0,537
60	0,52	0,473
79	0,51	0,463
95	0,50	0,454
120	0,49	0,445

Digitized by Google

PROVA 9ª.

$pH = 7,4$

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	0,84	0,763
14	0,65	0,590
26	0,59	0,540
44	0,55	0,500
64	0,51	0,463
80	0,48	0,436
100	0,46	0,418
120	0,44	0,400

PROVA 10ª.

$pH = 8$

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	0,82	0,745
15	0,61	0,554
28	0,53	0,482
49	0,48	0,436
63	0,45	0,409
81	0,43	0,391
102	0,41	0,373
120	0,40	0,364

PROVA 11ª.

$pH = 9$

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	0,78	0,709
12	0,58	0,527
25	0,46	0,418
46	0,42	0,382
66	0,38	0,345
82	0,36	0,327
102	0,33	0,300
120	0,31	0,281

PROVA 12ª.

$pH = 10$

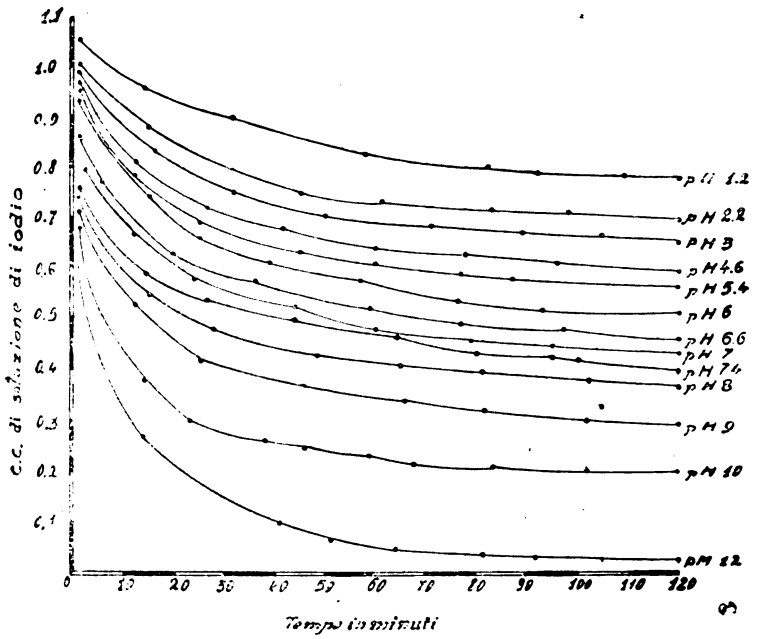
t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
1	0,75	0,682
14	0,42	0,382
23	0,34	0,309
38	0,29	0,264
46	0,28	0,254
59	0,26	0,236
68	0,25	0,227
83	0,24	0,218
102	0,23	0,209
120	0,22	0,200

Digitized by Google

PROVA 13ª.

$pH = 12$

t	cc. di soluzione di iodio	
0	—	—
2	0,66	0,600
14	0,30	0,273
41	0,11	0,100
51	0,07	0,063
64	0,05	0,045
81	0,04	0,036
91	0,035	0,032
105	0,03	0,027
120	0,025	0,023



Torino — Istituto Chimico della R.ª Università.
Giugno 1928.

Digitized by Google

Ricerche chimico-fisiche sui perossidi

(Nota LI delle ricerche sulle diossime)

del Socio nazionale residente Prof. G. PONZIO e del Dott. M. MILONE

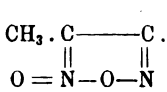
È noto che la formazione di soluzioni solide, e, conseguentemente, le anormalità che si osservano nella determinazione del peso molecolare di molti composti organici col metodo crioscopico, sono dovute all'analogia della struttura molecolare fra soluto e solvente. Ci parve perciò opportuno di studiare sotto questo punto di vista i due *perossidi*, i quali, come è stato riferito nella Nota L (1), contemporaneamente risultano dalla deidrogenazione della forma β delle gliossime

$$CH_3 . C(:NOH) . C(:NOH) . Ar$$

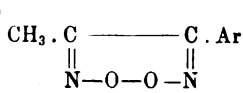
e si differenziano nettamente fra di loro sia per le proprietà fisiche che per le proprietà chimiche.

Avendo attribuito al *perossido fusibile a temperatura più elevata* [il quale è desossigenato dal pentacloruro di fosforo nel furazano $CH_3(C_2N_2O)Ar$, è isomerizzato dall'etilato sodico in un composto $(C_3H_3N_2O_2)Ar$ solubile nelle basi, è trasformato dal calore nel *perossido* fusibile a temperatura più bassa] la formola di struttura **I** di *furossano* (ossido di furazano); ed al *perossido fusibile a temperatura più bassa* (il quale è stabile verso il pentacloruro di fosforo, verso l'etilato sodico e verso il calore) la struttura **II** di *vero perossido* a ciclo esaatomico

I)



II)

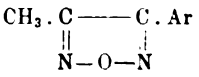


(1) " Gazz. Chim. Italiana „, *53*, 329 (1928).

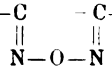
Digitized by Google

si poteva prevedere che soltanto il furossano **I** dovesse formare col furazano **III**

III)

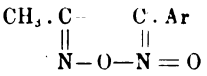


soluzioni solide e ciò per la presenza nella molecola dei due composti del medesimo ciclo pentaatomico



L'esperienza ha confermato le nostre previsioni, cosicchè riteniamo dimostrata la formola **I** per il *perossido fusibile a temperatura più elevata* (2). D'altra parte, siccome il *perossido fusibile a temperatura più bassa* non forma soluzioni solide col furazano **III**, escludiamo che ad esso possa attribuirsi la struttura **IV** dell'altro furossano (ossido di furazano) teoricamente prevedibile

IV)

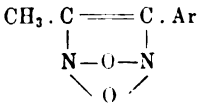


e, conseguentemente, riteniamo confermata la formola **II** nella quale non esiste ossigeno extranucleare.

Come comunicazione preliminare soggiungeremo che ricerche cristallografiche già quasi ultimate dimostrano anche una grande somiglianza nell'*habitus* cristallino fra i furossani **I**

---

(2) Per la stessa ragione rimane esclusa per detto composto la formola,



analoga a quella proposta da Green e Rowe [" Journ. chem. Soc. ,, London *103*, 897, 2023 (1913)] pei *perossidi* delle diossime degli o-chinoni, nella quale il ciclo C_2N_2O ha struttura differente dal ciclo C_2N_2O che esiste nella molecola dei furazaai.

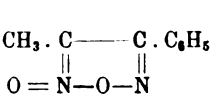
Digitized by Google

ed i furazani **III**; ma su questo argomento ci riserviamo di ritornare dopo aver completato lo studio dei calori di combustione, degli spettri di assorbimento, delle tensioni superficiali e delle viscosità molecolari dei due *perossidi* isomeri **I** e **II**.

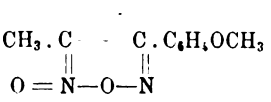
Dai numeri più avanti riportati risulta:

1°) che il metilfenilfurossano **V**, il metil-p-metossi-fenilfurossano (metilanisilfurossano) **VI**, il metilfenilperossido **VII** ed il metil-p-metossi-fenilperossido (metilanisilperossido) **VIII**

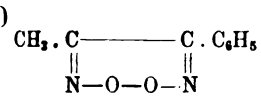
V)



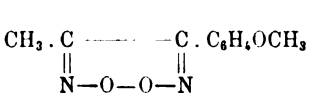
VI)



VII)



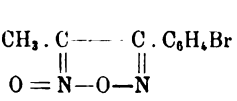
VIII)



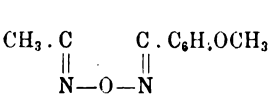
hanno pesi molecolari normali in acido acetico, benzene, fenolo;

2°) che il metilfenilfurossano **V**, il metil-p-bromo-fenilfurossano **IX** ed il metil-p-metossi-fenilfurossano **VI**

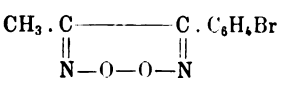
IX)



X)



XI)



hanno nel metil-p-metossi-fenilfurazano (metilanisilfurazano) **X** pesi molecolari superiori al teorico;

3°) che il metilfenilperossido **VII** ed il metil-p-bromo-fenilperossido **XI** hanno nel metil-p-metossi-fenilfurazano **X** pesi molecolari normali;

4°) che il metil-p-metossi-fenilfurazano **X** ha nel metilfenilperossido **VII** e nel metil-p-metossi-fenilperossido **VIII** peso molecolare normale;

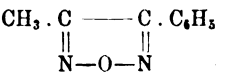
5°) che il metil-p-metossi-fenilfurazano **X** ha nel metil-

Digitized by Google

fenilfurossano **V** e nel metil-p-metossi-fenilfurossano **VI** peso molecolare superiore al teorico.

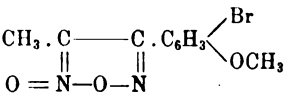
Dopo aver determinato le costanti criometriche del metil-fenilfurossano **V**, del metil-p-metossi-fenilfurossano **VI**, del metilfenilperossido **VII**, del metil-p-metossi-fenilperossido **VIII** e del metil-p-metossi-fenilfurazano **X**, non potendo servirci del metilfenilfurazano **XII** (3)

XII)

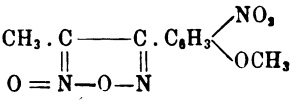


perchè liquido congelabile a temperatura troppo bassa, abbiamo voluto completare le nostre ricerche occupandoci di alcuni derivati del metil-p-metossi-fenilfurossano e del metil-p-metossi-fenilperossido ottenibili direttamente da questi ultimi per azione del bromo e dell'acido nitrico. Essi sono: il metil-p-metossi-bromo-fenilfurossano **XIII**, il metil-p-metossi-nitro-fenilfurossano **XIV**, il metil-p-metossi-bromo-fenilperossido **XV** ed il metil-p-metossi-nitro-fenilperossido **XVI**

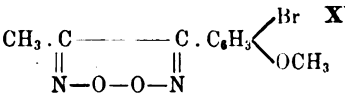
XIII)



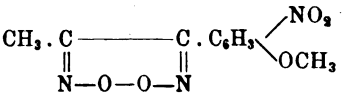
XIV)



XV)

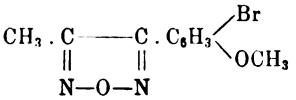


XVI)

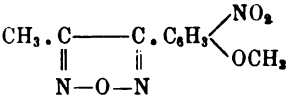


e ne abbiamo studiato il comportamento verso il metil-p-metossi-bromo-fenilfurazano **XVII** e verso il metil-p-metossi-nitro-fenilfurazano **XVIII**

XVII)



XVIII)



(3) Nota XIX • ‘ Gazz. Chim. Ital. „, *54*, 550 (1924).

Digitized by Google

i quali a loro volta risultano dal metil-p-metossifenilfurazano **X** per bromurazione e per nitrazione diretta (4).

Stabilite in precedenza le costanti criometriche di questi due furazani siamo arrivati alle seguenti conclusioni:

1°) il metil-p-metossi-bromo-fenilfurossano **XIII** ed il metil-p-metossi-nitro-fenilfurossano **XIV** hanno nel metil-p-metossifenilfurazano **X** peso molecolare superiore al teorico;

2°) il metil-p-metossi-bromo-fenilperossido **XV** ed il metil-p-metossi-nitro-fenilperossido **XVI** hanno nel metil-p-metossi-fenilfurazano **X** peso molecolare normale;

3°) il metil-p-metossi-bromo-fenilfurossano **XIII** ha nel metil-p-metossi-bromo-fenilfurazano **XVII** peso molecolare normale;

4°) il metil-p-metossi-nitro-fenilfurossano **XIV** ha nel metil-p-metossi-nitrofenilfurazano **XVIII** peso molecolare normale;

5°) il metil-p-metossi-bromo-fenilperossido **XV** sciolto nel metil-p-metossi-bromofenilfurazano **XVII** non provoca alcun abbassamento nel punto di congelazione;

6°) il metil-p-metossi-nitro-fenilperossido **XVI** sciolto nel metil-p-metossi-nitro-fenilfurazano **XVIII** non provoca alcun abbassamento nel punto di congelazione.

Questi fatti confermano che al metil-p-metossi-bromo-fenilfurossano, al metil-p-metossi-nitrofenilfurossano, al metil-p-metossi-bromo-fenilperossido ed al metil-p-metossi-nitro-fenilperossido spettano le formole **XIII**, **XIV**, **XV** e **XVI**, perchè soltanto i primi due formano col metil-p-metossi-fenilfurazano **X** soluzioni solide ed hanno quindi struttura molecolare analoga a quest'ultimo.

Per contro i bromo- ed i nitroderivati del metil-p-metossi-fenilfurossano e del metil-p-metossi-fenilperossido hanno verso il bromo- ed il nitroderivato del metil-p-metossi-fenilfurazano un comportamento contrario a quello che abbiamo osservato per tutti gli altri furossani e perossidi.

---

(4) La posizione che assumono l'alogeno ed il nitrogruppo nel radicale aromatico in tutti i suddetti composti non è conosciuta.

Digitized by Google

Le nostre esperienze furono eseguite con un depressimetro Eyckmann che permetteva di apprezzare $^1/_{200}$ di grado. Particolare cura si ebbe per la purificazione del metil-p-metossi-fenilfurazano **X**; questo, anzichè col metodo di Boeris (5) (desossigenazione del metil-p-metossi-fenilfurossano **VI** con acido cloridrico e stagno), fu preparato sciogliendo gr. 10 di furossano in 50 cc. di acido acetico glaciale e scaldandolo per 24 ore su bagno d'acqua bollente con una soluzione di gr. 20 di cloruro stannoso in 50 cc. di acido cloridrico concentrato. Diluendo quindi con acqua abbiamo ottenuto un prodotto quasi incoloro, il quale fu ancora, dopo trattamento con etilato sodico, assoggettato alla distillazione in corrente di vapore, in modo da elevarne il punto di fusione a 65°-66° costante.

Pesi molecolari nei comuni solventi.

1) *Metilfenilfurossano* (**V**) pf. 96° P. M. 176.

a) in acido acetico:

c	Δ	P. M.
2,336	0° 501	182
5,223	1° 729	180,5

b) in benzene:

c	Δ	P. M.
1,316	0° 374	179,2
3,977	0° 874	178,5

c) in fenolo:

c	Δ	P. M.
0,713	2° 695	180,1
9,789	3° 965	179.

2) *Metil-p-metossi-fenilfurossano* (**VI**) pf. 99° P. M. 206.

a) in acido acetico:

c	Δ	P. M.
1,051	0° 190	215
2,223	0° 405	213

(5) " Gazz. Chim. Italiana ,, 23, II, 186 (1893).

Digitized by Google

b) in benzene:

c	Δ	P. M.
1,363	0° 332	209,2
2,659	0° 653	207,5

c) in fenolo:

c	Δ	P. M.
2,694	0° 930	209,2
7,008	2° 465	206,6.

3) *Metilfenilperossido* (**VII**) pf. 62° P. M. 176.

a) in acido acetico:

c	Δ	P. M.
2,342	0° 629	182,5
4,931	1° 092	179,5

b) in benzene:

c	Δ	P. M.
1,158	0° 321	180,1
1,731	0° 495	178,5

c) in fenolo:

c	Δ	P. M.
4,345	1° 735	181,7
7,034	2° 850	178,6.

4) *Metil-p-metossi-fenilperossido* (**VIII**) pf. 78°-79° P. M. 206.

a) in acido acetico:

c	Δ	P. M.
2,071	0° 379	213
4,362	0° 808	210,5

b) in benzene:

c	Δ	P. M.
0,960	0° 235	208,5
2,668	0° 656	207,3

c) in fenolo:

c	Δ	P. M.
2,884	0° 995	210,5
8,402	2° 930	207,3.

Digitized by Google

Costanti criometriche.

1) *Metil-p-metossi-fenilfurazano* (X) pf. 65°-66°.

a) con naftalene:

c	Δ	K	
0,893	0° 620	86,8	
1,167	0° 785	86,3	
2,253	1° 515	85,7	
3,564	2° 370	85,4	**Media 86.**

b) con benzile:

c	Δ	K	
0,995	0° 413	87,2	
1,563	0° 650	86,9	
2,730	1° 125	86,4	
4,159	1° 695	85,8	**Media 86,6.**

Media generale K = 86,3.

2) *Metilfenilfurossano* (V) pf. 96°.

a) con naftalene:

c	Δ	K	
1,805	1° 105	77,83	
2,555	1° 540	77,15	
4,729	2° 805	75,96	
5,850	3° 455	75,33	**Media 76,51.**

b) con benzile:

c	Δ	K	
1,573	0° 580	77,62	
3,653	1° 355	77,10	
4,705	1° 710	76,40	
5,432	1° 965	76,00	**Media 76,79.**

Media generale K = 76,65.

Digitized by Google

3) *Metil-p-metossi-fenilfurossano* (**VI**) pf. 99°.

a) con naftalene:

c	Δ	K	
1,479	1° 140	98,9	
2,567	1° 970	98,4	
3,527	2° 685	97,5	
5,072	3° 810	96,3	Media 97,72.

b) con benzile:

c	Δ	K	
1,222	0° 570	99,5	
2,075	0° 975	98,7	
2,935	1° 360	97,9	
4,538	2° 044	96,8	Media 98,20.

Media generale K = 97,96.

4) *Metilfenilperossido* (**VII**) pf. 62°.

a) con naftalene:

c	Δ	K	
1,584	0° 970	78,95	
2,422	1° 520	78,73	
3,198	1° 980	78,22	
4,253	2° 595	78,05	Media 78,5.

b) con benzile:

c	Δ	K	
2,176	0° 820	78,99	
3,029	1° 135	78,47	
3,886	1° 470	77,93	
4,466	1° 640	77,51	Media 78,2.

Media generale K = 78,35.

5) *Metil-p-metossi-fenilperossido* (**VIII**) pf. 78°-79°.

a) con naftalene:

c	Δ	K	
0,925	0° 780	100,5	
1,333	1° 035	99,8	
2,271	1° 760	99,4	
3,564	2° 760	99,1	Media 99,7.

Digitized by Google

b) con benzile:

c	Δ	K	
0,895	0° 425	100,3	
1,565	0° 745	100,1	
2,779	1° 320	99,7	
4,352	2° 055	99,3	Media 99,9.

Media generale K = 99,8.

6) *Metil-p-metossi-bromo-fenilfurazano* (**XVII**) pf. 76° (6).

a) con naftalene:

c	Δ	K	
0,727	0° 660	117,3	
2,015	1° 840	116,9	
3,252	2° 960	116,5	
3,997	3° 615	115,8	Media 116,62.

b) con benzile:

c	Δ	K	
0,925	0° 510	116,7	
1,873	1° 035	116,1	
3,152	1° 735	115,7	
4,033	2° 215	115,4	Media 115,8.

Media generale K = 116,2.

7) *Metil-p-metossi-nitro-fenilfurazano* (**XVIII**) pf. 96°-97°.

a) con naftalene:

c	Δ	K	
0,831	0° 840	129,1	
1,752	1° 765	128,8	
3,150	3° 155	128,3	
4,001	4° 000	128	Media 128,5.

(6) Boeris [" Gazz. Chim. Ital. ,, *23*, II, 188 (1893)] dà come punto di fusione per questo composto 73°-74°.

Digitized by Google

b) con benzile:

c	Δ	K	
0,905	0° 555	128,9	
2,323	1° 420	128,5	
3,127	1° 910	128,1	
4,238	2° 575	127,6	Media 128,3.

Media generale K = 128,4.

Pesi molecolari nel metil-p-metossifenilfurazano (X).

1) *Metilfenilfurossano* (V) pf. 96° P. M. 176.

c	Δ	P. M.
0,723	0° 220	281
1,535	0° 465	284
2,381	0° 710	289
3,856	1° 130	293.

2) *Metil-p-bromo-fenilfurossano* (IX) pf. 108°-09° P. M. 255.

c	Δ	P. M.
0,905	0° 265	301
1,432	0° 405	304
3,561	1° 005	307
4,312	1° 235	308,5.

3) *Metil-p-metossi-fenilfurossano* (VI) pf. 99° P. M. 206.

c	Δ	P. M.
0,835	0° 090	792
1,723	0° 185	796
2,516	0° 270	801
4,112	0° 440	807.

4) *Metil-p-metossi-bromo-fenilfurossano* (XIII) pf. 109° P. M. 285.

c	Δ	P. M.
1,153	0° 330	299
1,957	0° 555	303
2,364	0° 650	306
3,892	1° 085	308.

Digitized by Google

5) *Metil-p-metossi-nitro-fenilfurossano* (**XIV**) pf. 88° P. M. 251.

c	Δ	P. M.
0,956	0° 300	274
1,710	0° 530	277
2,543	0° 780	280
3,892	1° 175	285.

6) *Metilfenilperossido* (**V**) pf. 62° P. M. 176.

c	Δ	P. M.
0,913	0° 380	205
1,816	0° 750	208
2,734	1° 140	210
4,221	1° 695	214.

7) *Metil-p-bromo-fenilperossido* (**XI**) pf. 88°-89° P. M. 255.

c	Δ	P. M.
0,963	0° 310	269
1,831	0° 580	272
2,267	0° 715	274
3,824	1° 180	278.

8) *Metil-p-metossi-fenilperossido* (**VIII**) pf. 78°-79° P. M. 206.

c	Δ	P. M.
0,898	0° 225	342
1.353	0° 340	345
2,681	0° 660	348
3,953	0° 970	350,5.

9) *Metil-p-metossi-bromo-fenilperossido* (**XV**) pf. 115°-16° P. M. 285.

c	Δ	P. M.
0,973	0° 285	287
1,746	0° 515	290,5
2,521	0° 735	294
3,643	1° 055	297,5.

Digitized by Google

10) *Metil-p-metossi-nitro-fenilperossido* (**XVI**) pf. 112° P. M. 251

c	Δ	P. M.
0,897	0° 295	258
1,354	0° 445	262
2,731	0° 880	266,5
3,954	1° 255	271.

Peso molecolare del metil-p-metossi-fenilfurazano (X)
pf. 65°-66° P. M. 190.

a) nel metilfenilfurossano (**V**):

c	Δ	P. M.
0,915	0° 270	261
1,418	0° 415	263
2,226	0° 645	266
3,958	1° 105	270,5 ;

b) nel metil-p-metossi-fenilfurossano (**VI**):

c	Δ	P. M.
0,735	0° 105	711
1,233	0° 170	713
2,561	0° 350	716
3,890	0° 531	718,5 ;

c) nel metilfenilperossido (**VII**):

c	Δ	P. M.
0,833	0° 315	205
1,415	0° 535	207
2,378	0° 885	210
4,269	1° 960	214 ;

d) nel metil-p-metossi-fenilperossido (**VIII**):

c	Δ	P. M.
0,621	0° 275	226
1,282	0° 560	229
2,764	1° 200	232
4,153	1° 760	236.

Digitized by Google

Peso molecolare
del metil-p-metossi-bromo-fenilfurossano (XIII),
pf. 109° P. M. 285:

nel metil-p-metossi-bromo-fenilfurazano **(XVII)**

c	Δ	P. M.
1,115	0° 430	289
1,985	0° 745	302
2,734	1° 040	305
3,656	1° 380	307.

Peso molecolare
del metil-p-metossi-nitro-fenilfurossano (XIV),
pf. 88°-89°, P. M. 251:

nel metil-p-metossi-nitro-fenilfurazano **(XVIII)**

c	Δ	P. M.
0,985	0° 465	269
1,345	0° 630	272
2,631	1° 060	274,5
3,932	1° 630	278.

Torino — Istituto Chimico della R.ª Università.
Giugno 1928.

Digitized by Google

Sulla distribuzione delle tensioni interne nella zona di massima contrazione di una provetta di acciaio a sezione circolare sperimentata a trazione.

Nota dell'Ing. RAFFAELLO ZOIA, assistente R. Scuola d'Ingegneria,
presentata dal Socio nazionale residente Camillo Guidi.

In una Nota presentata all'Académie des Sciences C. Fremont (1), per spiegare la rottura caratteristica a tronco di cono e corrispondente coppella, rottura normale per i saggi di acciaio a sezione circolare, avanza l'ipotesi (avvalorata da considerazioni sperimentali sulla prova a trazione di un cilindro pieno con tubo coassiale, e teoriche sulla prova di un saggio diviso idealmente in cilindro pieno e tubo coassiale) che durante il fenomeno della strizione, che precede sempre la rottura in coppella venga a formarsi nella regione contratta una *zona esterna* (corrispondente al tubo) *contemporaneamente tesa* (nel senso longitudinale della provetta) *e compressa* (nel senso periferico), ed è appunto tale compressione che permetterebbe, secondo Fremont, alla zona esterna di allungarsi più che la *zona centrale solo tesa*, che si rompe quindi per prima. — Ma siccome la divisione ideale in nucleo centrale di raggio r e corrispondente parte tubolare è arbitraria, così facendo decrescere successivamente tale raggio r ed applicando il ragionamento di Fremont si giungerebbe alla conclusione che la zona centrale con fibre unicamente tese non esiste (2).

D'altra parte l'esame di numerose rotture di tondini di ferro

(1) « C. R. Acad. des Sciences », 1927, N. 17, p. 998; ed anche « Génie Civil », 1927, p. 453.

(2) R. Zoia, « Atti R. Acc. Scienze di Torino », 1928, vol. LXIII.

Digitized by Google

omogeneo ed acciaio, con soffiature o sovrapposizioni rinchiusesi durante la laminazione, ed aventi in sezione trasversale un andamento radiale, conduce ad un *risultato nettamente opposto* e cioè che invece di compressione vi sia *perifericamente sempre tensione.* Le Figg. 1, 2, 3 riproducono alcuni esempi: si vede sempre il distacco dalle parti saldate.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Un'ultima esperienza conferma poi in modo decisivo il risultato di queste ed altre numerose osservazioni: prova a trazione di un tondo di 30 mm. di diametro proveniente dalla laminazione di tre parti, formanti tre spicchi saldati approssimativamente secondo tre piani passanti per l'asse della provetta con angolo di circa 120° uno coll'altro. L'esperienza su un primo saggio venne condotta con velocità normale fino a rottura (V. aspetto caratteristico della Fig. 4), ed immediatamente prima di essa fu percepito nettamente un piccolo e secco scricchiolìo. Condotta allora con estrema lentezza la prova di trazione su un secondo saggio, fu possibile,

Fig. 4.

Digitized by Google

scaricando repentinamente la macchina, sospendere l'esperienza prima della rottura ed immediatamente dopo avvenuto il distacco dei tre spicchi; la strizione percentuale aveva già raggiunto il valore 54,5 %, di poco inferiore a quello valutato sul saggio rotto 59,5 %. Le Figg. 5 *a*), *b*), *c*) mostrano chiaramente

Fig. 5 *a*).

Fig. 5 *b*).

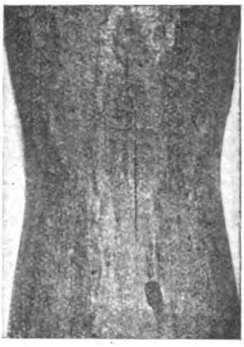


Fig. 5 *c*).

il leggero distacco avvenuto in corrispondenza delle tre generatrici della superficie esterna, mentre nella macrografia della sezione di massima contrazione (Figura 6) si scorge il distacco per tutta la lunghezza dei tre raggi.

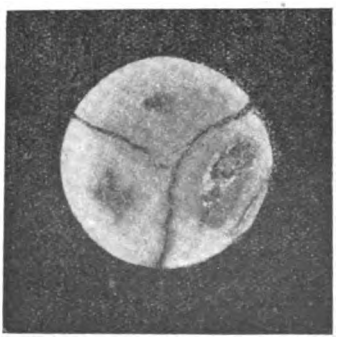


Fig. 6. — Attacco Heyn.

Rimane quindi dimostrato *sperimentalmente* che nella zona di strizione, almeno nell'ultima fase precedente la rottura, *le tensioni agenti nel piano trasversale normalmente al raggio hanno segno positivo.*

Ciò posto vediamo quale possa essere la distribuzione delle tensioni interne nella sezione di massima contrazione XX di una provetta prossima a rottura (Fig. 7). Prendiamo in esame un elemento di provetta delimitato 1° da due piani paralleli alla sezione XX, simmetrici rispetto ad essa e posti a distanza unitaria, piccolissima rispetto al suo raggio R; 2° da due cilindri coas-

Digitized by Google

siali colla provetta, di raggio $r - dr$, $r + dr$; 3° da due piani passanti per l'asse, comprendenti l'angolo infinitesimo φ (Fig. 7 *b*).

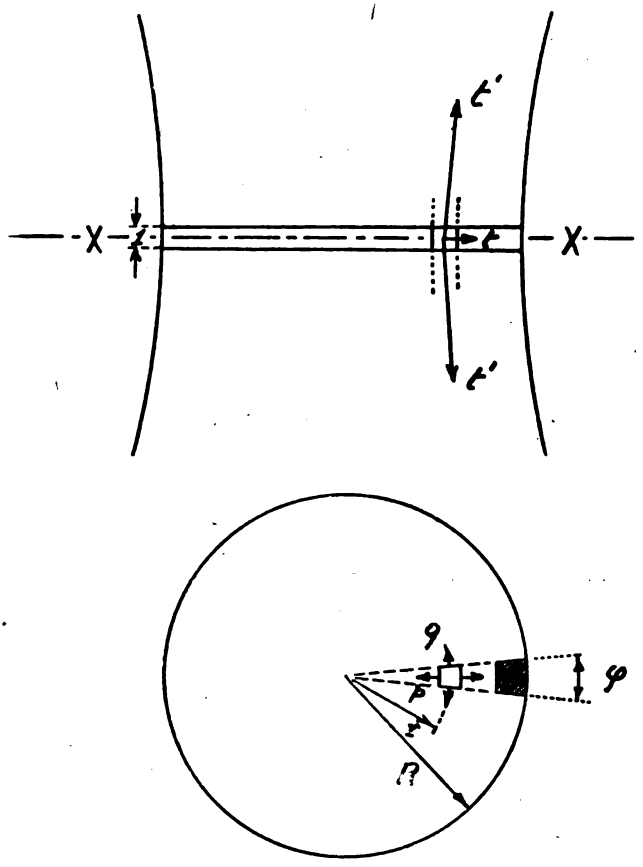


Fig. 7 *a*) e *b*).

Indichiamo con p la tensione unitaria (supposta positiva) in direzione radiale, con q quella unitaria tangente al cerchio di raggio r, *essenzialmente positiva* per quanto è sopra esposto, e con t la risultante (avente direzione radiale) delle due tensioni t' sulle facce dell'elemento considerato che sono normali all'asse della provetta, risultante che, assumendo come positiva la direzione dal centro alla periferia, sarà evidentemente sempre positiva.

Digitized by Google

Osserviamo subito che l'equilibrio dell'elemento estremo (tratteggiato nella Fig. 7 *b*) richiede l'esistenza di due q positive; la p è infatti nulla sulla faccia esterna di tale elemento e piccolissima su quella opposta, e non potrebbe fare equilibrio alla t e ad una componente positiva delle q sul raggio, qualora queste avessero segno negativo. Abbiamo quindi una *conferma teorica* dei risultati sperimentali sopra riportati.

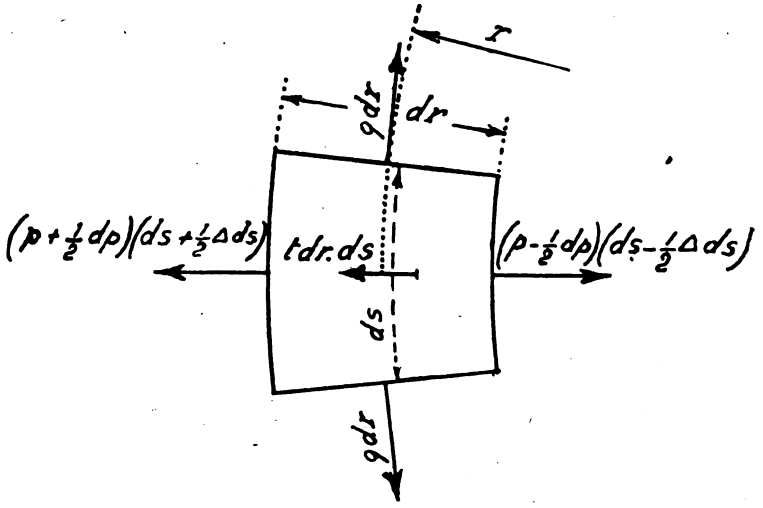


Fig. 8.

L'equazione di equilibrio alla traslazione secondo il raggio per un elemento generico è poi (Fig. 8):

$$\left(p + \frac{1}{2}\,dp\right)\left(ds + \frac{1}{2}\,ds\right) - \left(p - \frac{1}{2}\,dp\right)\left(ds - \frac{1}{2}\,ds\right) -$$

$$- 2qdr\,\frac{1}{2}\,\varphi + tdrds = 0$$

che semplificata (essendo $\Delta ds = \varphi\, dr$) diviene

$$r\,\frac{dp}{dr} + p + rt - q = 0.$$

Attribuendo alle due funzioni q e t, entrambe sempre po-

Digitized by Google

sitive (per r compreso tra 0 ed R) un'espressione della forma (V. Figg. 9-10)

$$q = q_0 + q_1 r + q_2 r^2 \quad q_0 > 0 \ , \ q_1 \gtrless 0 \ , \ q_2 \gtrless 0$$

$$t = t_0 + t_1 r + t_2 r^2 \quad t_0 = 0 \ , \ t_1 > 0 \ , \ t_2 \gtrless 0 \qquad (1)$$

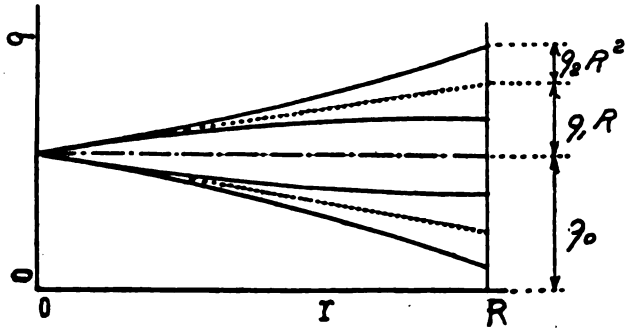


Fig. 9.

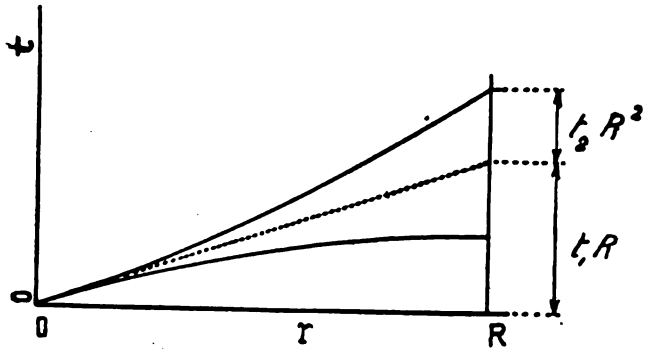


Fig. 10.

l'equazione differenziale diviene

$$r \frac{dp}{dr} + p + t_2 r^3 + (t_1 - q_2) r^2 - q_1 r - q_0 = 0$$

(1) Deve infatti essere:

$q_0 > 0$ per quanto si è detto precedentemente;

$t_0 = 0$ perchè, per $r = 0$ è $t = 0$, essendo le due t' per diritto;

$t_1 > 0$ essendo t essenzialmente positiva.

Digitized by Google

ed integrando

$$p = q_0 + \frac{1}{2} q_1 r + \frac{1}{3} (q_2 - t_1) r^2 - \frac{1}{4} t_2 r^3 .$$

Poichè per $r = R$ deve essere $p = 0$, le condizioni ai limiti sono

$$p_0 = q_0 > 0$$

$$q_0 + \frac{1}{2} q_1 R + \frac{1}{3} (q_2 - t_1) R^2 - \frac{1}{4} t_2 R^3 = 0$$

la prima delle quali è in accordo col fatto già noto della formazione frequente di una piccola cavità ad imbuto al centro della provetta nella zona di contrazione quando vi sia una piccola scoria o soffiatura centrale.

Nelle Figg. 11, 12, 13 è rappresentata schematicamente la funzione p, nell'ipotesi che si abbia $q_2 < t_1$ (analogamente se fosse $q_2 > t_1$); essa risulta dalla somma dei seguenti termini:

q_0 costante positivo — linea AB_1

$\frac{1}{2} q_1 r \gtrless 0$ — rispett. linee AB_1' , AB_1, AB_1'' delle Figg. 11, 12, 13.

$\frac{1}{3} (q_2 - t_1) r^2$ negativo

e $-\frac{1}{4} t_2 r^3 \lessgtr 0$ — linee AB' e AB , linea AB, linee AB'' e AB secondochè $t_2 \gtrless 0$.

Riassumendo:

Riconosciuta come priva di fondamento la teoria di Fremont sulla distribuzione delle tensioni interne nella regione di massima contrazione di una provetta assoggettata a trazione:

1° *Si è dimostrata l'esistenza di tensioni positive* q *agenti nel piano trasversale normalmente al raggio*, sia con osservazioni

Digitized by Google

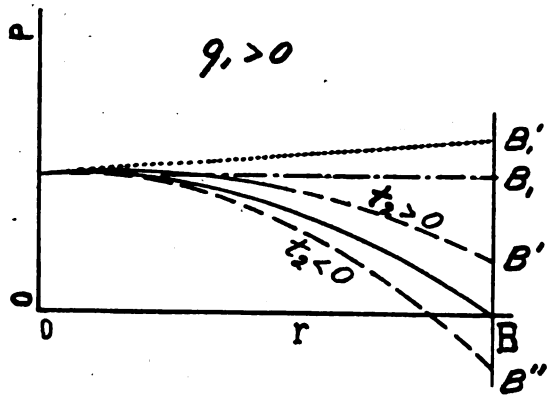


Fig. 11.

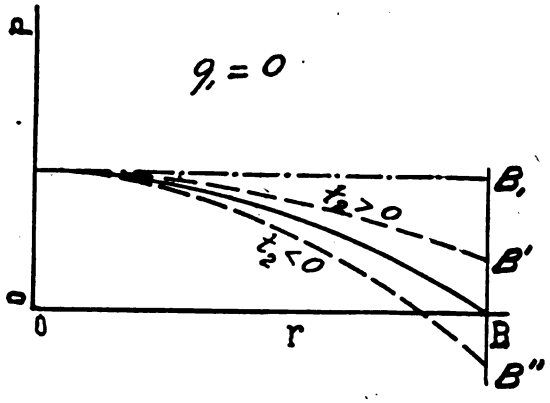


Fig. 12.

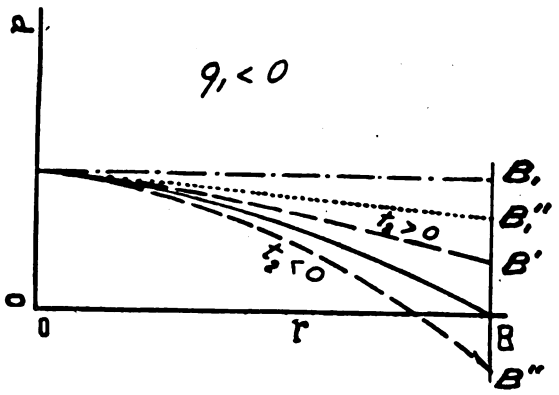


Fig. 13.

Digitized by Google

di rotture ed altra esperienza particolare, sia con considerazioni di equilibrio per un elemento situato in adiacenza alla superficie esterna.

2° Supposta (in via di approssimazione e data la difficoltà di impostare una teoria esatta) una legge di variazione parabolica per le tensioni q e per la risultante t delle tensioni t', *si è ricavata la legge di variazione per le tensioni radiali* p, legge verosimile ed in accordo con un fatto sperimentale noto.

Torino, giugno 1928 — Laboratorio Sperimentale sui Materiali da Costruzione della R. Scuola d'Ingegneria.

Digitized by Google

Azione della luce su certi tipi di audion.

Nota del Socio nazionale residente QUIRINO MAJORANA.

Sperimentando con un gruppo di tre o quattro valvole termojoniche a tre elettrodi (audion), ho avuto occasione di constatare un curioso effetto, quando la luce di una comune lampada elettrica (o del sole), viene opportunamente concentrata sopra le valvole stesse, mediante una lente.

In una prima serie di esperienze la luce di una lampada di 800 candele arriva sopra il primo audion del gruppo, dopo esser stata concentrata sul bordo di un disco a fori, girante. In tal guisa il fascio luminoso viene interrotto periodicamente con frequenza, acustica compresa fra 500 e 1000 vibrazioni al 1″. Il detto primo audion ha la griglia libera ed è connesso ai due o tre seguenti, secondo lo schema di un comune amplificatore a bassa frequenza, a trasformatori. In tali condizioni, si comprende come il sistema sia particolarmente sensibile alle minime variazioni di carica elettrica della griglia, giacchè quest'ultima, non essendo connessa con alcuna capacità esterna, può subire, in virtù di tali piccole variazioni, delle notevoli variazioni di potenziale. Ciò posto, al telefono (o cuffia) inserito nel circuito di placca dell'ultima valvola, può ascoltarsi nettamente il suono corrispondente al periodo acustico suddetto. Il fenomeno è però legato al tipo di audion impiegato o più propriamente (se ci si limita a far cadere la luce sul primo audion, come ho detto) al tipo del primo audion che ha appunto la griglia libera. Fra i vari tipi di audion sperimentati, si sono mostrati particolarmenti attivi quelli forniti dalla casa Philips, come per es., quelli segnati in catalogo con le indicazioni *A 409* o *A 425*. Sono anche attivi alcuni tipi recenti della Telefunken, come, per es., i *RE134*,

Digitized by Google

ed altri ancora. Alcuni tipi di audion, sia delle case citate che di altre, possono mostrarsi completamente inattivi.

Non appena mi accorsi dell'effetto accennato, ricercai accuratamente le cause di esso.

Osservo anzitutto che l'effetto non è da confondersi con altro, già da tempo da me studiato e che presenta con esso certe caratteristiche comuni. Voglio dire del fatto che se un fascio di intensa luce solare, periodicamente interrotto, viene a cadere sul filamento incandescente del primo degli almeno quattro audion costituenti un gruppo amplificatore, si ascolta al telefono, sebbene piuttosto debolmente, il suono corrispondente. Ciò dico, sia perchè il massimo effetto si ottiene secondo le ricerche attuali, quando la luce viene a battere in altri punti dell'audion che non siano il filamento incandescente; sia ancora perchè, di solito, gli audion da me trovati attivi, sono metallizzati nella parte superiore del bulbo (*getter* di magnesio), e il loro filamento rimane così otticamente protetto dal *getter* e dalla lamina dell'audion stesso.

Il fascio di luce periodicamente interrotto, viene ora concentrato con una lente di corto fuoco su una zona di circa 2 o 3 mm. di diametro. Muovendo la lente, si esplorano i vari punti dell'audion, colpendo i quali con tale luce, si ode ancora il suono al telefono. Mi accorgo così che per tal fine, occorre che la luce penetri realmente nell'interno del bulbo. L'effetto manca del tutto se la luce cade sul *getter*, o sulla guarnizione di sostegno delle quattro spine esterne. Successivamente si rileva, che, per ottenere il migliore effetto, deve la luce colpire il gambo di vetro che si protende nell'interno del bulbo e che contiene nella sua massa i quattro fili metallici, destinati a connettere i tre elettrodi (lamina, griglia, filamento), con le quattro spine esterne. Ma il massimo effetto si ha concentrando la luce su quello di tali quattro fili, che fa capo alla griglia.

La constatazione dell'effetto in parola dipende, ora, dalla natura del filo imprigionato nella pasta del vetro. Ho osservato, che sempre gli audion attivi hanno tali fili costituiti da ferro-nichel ricoperto di rame. Il rame, all'atto della fusione del vetro, si trasforma in ossido (ramoso) che aderisce molto bene al vetro.

Digitized by Google

Questo processo, come è noto, ha sostituito vantaggiosamente l'uso del platino nella fabbricazione di tubi o lampade in vetro a tenuta di vuoto. In conseguenza della presenza dell'ossido di rame, i fili attraversanti il vetro assumono una colorazione rossa, che ricorda il colore proprio della cuprite vista, per trasparenza. Sembra dunque che l'effetto sia dovuto all'arrivo della luce pulsante, su tale sostanza: audion i cui attacchi siano sforniti di questa, non presentano l'effetto. Mi è occorso talvolta di constatare che anche audion con attacchi di filo di platino, o di metallo la cui tinta chiara ricorda il platino, presentano l'effetto. Questo è il caso di alcuni audion costruiti dalla Telefunken. Ma esaminando attentamente tali audion, ho potuto rilevare che all'uscita dal vetro esiste almeno una traccia di colorazione rossa, che rivela la presenza di cuprite.

L'effetto, per una intensità luminosa di una ventina di lumen cadenti sull'attacco della griglia del primo audion, si rivela con un suono alla cuffia connessa col terzo audion tanto intenso da recar molestia all'udito.

Filtrando la luce con vetri colorati, o meglio, facendola rifrangere attraverso un prisma, è facile constatare che l'effetto massimo si ha per le lunghezze d'onda medie dello spettro visibile; con una maggior sensibilità per le parti più refrangibili di questo.

L'effetto descritto può dunque definirsi come una sorta di fenomeno foto-elettrico, le intime modalità del quale sono però notevolmente complesse. Al fine di chiarirle, almeno in parte, ho successivamente istituite le seguenti esperienze.

Poichè l'effetto si appalesa quando la luce va a colpire l'ossido di rame contenuto nell'attacco dell'audion, mi sono assicurato anzitutto se, connettendo con la spina esterna della griglia libera, un conduttore coperto di quell'ossido e facendo battere su questo la luce, l'effetto si constati ancora. L'esperienza difatti conferma tale previsione, quantunque in maniera poco marcata: il suono al telefono, a parità di intensità di luce, è molto meno intenso che facendo cadere la luce nell'interno dell'audion. Ma, avendo introdotta tale modificazione nel dispositivo impiegato, ho potuto altresì constatare che l'effetto non

Digitized by Google

rappresenta una proprietà peculiare dell'ossido ramoso o cuprite, ma è presentato altresì da un certo numero di altre sostanze che notoriamente sono sensibili elettricamente alla luce. Così il selenio; basta connettere metallicamente la griglia libera con del selenio cristallino preparato come nelle note cellule, e illuminare tale corpo con la solita luce pulsante, per ascoltare, sia pur debolmente, il suono. Notisi che il selenio di questo caso non fa parte di alcun circuito chiuso, come avviene quando si studia la sua variazione di resistenza sotto l'azione della luce. In modo del tutto simile si comportano parecchi solfuri naturali, oppure preparati artificialmente. Così la galena, la bismutina, la molibdenite, l'argentite. Non si osserva effetto sensibile con la pirite e con la blenda. Anche il solfuro d'argento, od il solfuro di tallio, o meglio quel tal preparato denominato genericamente ossisolfuro di tallio (adoprato dal Case nella costruzione della cellula detta tallophide) dànno l'effetto.

Così osservato l'effetto, si lascia interpretare come una variazione del potenziale elettrico proprio della sostanza, sotto l'azione della luce; tale variazione, comunicata alla griglia del primo audion, ne controlla la corrente di placca e viene successivamente amplificata. Il fatto che il telefono lascia ascoltare il suono corrispondente alla pulsazione della luce, fa comprendere che si tratta di un fenomeno relativamente *pronto*. La variazione di potenziale occasionata dalla luce, va probabilmente attribuita ad azioni fotochimiche, in certo modo reversibili. Che ciò sia attendibile, si deduce dal fatto che tutte le sostanze dimostratesi attive, non sono chimicamente semplici. D'altro canto non è da pensare ad un fenomeno fotoelettrico propriamente detto, giacchè un metallo fotoelettricamente attivo come sodio metallico, si dimostra praticamente inattivo, in relazione all'effetto in parola.

Le variazioni di potenziale delle citate sostanze, provocate dalla luce, possono inoltre dar luogo all'effetto, anche se le sostanze stesse non sono in connessione metallica con la griglia del primo audion. Mettendo infatti in vicinanza della spina di griglia del primo audion (meglio poi se tale spina è guarnita di una piccola lastrina metallica) un pezzetto di una delle sostanze in

Digitized by Google

parola connessa col suolo, ed illuminandolo col solito fascio periodicamente interrotto, si fa luogo ancora ad una traccia di effetto. In tal caso le variazioni di potenziale della sostanza, originano, per induzione, delle corrispondenti variazioni del potenziale della griglia.

Per quanto non abbia sinora eseguite accurate ricerche sull'argomento, è ovvio pensare che la distribuzione di sensibilità per le varie lunghezze d'onda, varî da sostanza a sostanza. Così, mentre per l'ossido ramoso tale sensibilità ha il suo massimo verso il verde, per il selenio questo si sposta di poco verso il rosso; e va addirittura all'ultrarosso per l'ossisolfuro di tallio o per il solfuro di argento.

Come ho già detto, l'effetto è in ogni caso assai superiore, quando la luce penetra nell'interno dell'audion, piuttosto che colpire le sostanze collocate esternamente connesse con la griglia e situate in vicinanza di questa. È forse difficile, allo stato attuale delle presenti ricerche, spiegare ciò esaurientemente. Ad ogni modo si può tener conto, in un tentativo di tale spiegazione, del fatto che quando la luce occasiona delle variazioni di potenziale di una sostanza situata esternamente all'audion, tali variazioni, per arrivare sulla griglia, rimangono attenuate dalla conduttanza (sia pur lievissima) dei corpi con cui il conduttore di griglia è a contatto, nell'interno dell'audion, fra la sostanza e la griglia stessa. Il difetto di isolamento del vetro o della superficie di questo o delle sostanze costituenti il manicotto d'attacco dell'audion, può originare delle fughe che menomano le pulsazioni elettriche della griglia. Ma pur ammettendo l'attendibilità di tale spiegazione, non escludo l'esistenza di altri fatti, la cui ricerca ed il cui studio non ho per anco ultimati.

***

Nelle descritte esperienze l'effetto accennato è stato messo in evidenza mediante l'uso del telefono. In altri termini v'è stato sempre bisogno di generare correnti variabili, opportunamente amplificate, col far pulsare la luce agente sulle sostanze attive. È ora interessante vedere se non sia possibile constatare lo

Digitized by Google

stesso effetto, in regime permanente, occasionando cioè indicazioni quantitative costanti da parte di qualcuno dei conduttori che entrano a far parte dei circuiti elettrici impiegati. L'idea più semplice è evidentemente quella di misurare staticamente le variazioni di potenziale elettrico delle varie sostanze attive, quando esse sono colpite dalla luce. All'uopo, ho in corso di studio una disposizione elettrometrica, sui risultati della quale mi riservo di riferire.

Ma ho potuto realizzare più facilmente una esperienza diversa, che pure è legata al fatto delle variazioni statiche di potenziale dei corpi attivi illuminati. Un galvanometro opportunamente compensato, è inserito nel circuito di placca di un audion attivo, mentre la sua griglia è lasciata libera. Illuminando l'audion con un fascio di luce dell'intensità di circa 20 lumen, si ha una deviazione del galvanometro. Essa è del senso che corrisponde ad un accrescimento della corrente di placca. Anche qui l'effetto sembra limitato all'arrivo della luce sui fili coperti di ossido di rame interni allo audion. Questa esperienza ci dice dunque qual sia il segno delle cariche generate dall'arrivo della luce: esse sono positive. Ho voluto poi procedere oltre, in tali ricerche, connettendo esternamente alla griglia dello stesso audion, delle sostanze attive ed illuminandole. I risultati sono però piuttosto complessi, e sinora non ho potuto raccoglierli in un quadro semplice e comprensivo. Forse non vi ha esatto parallellismo fra quanto si osserva con quest'ultimo dispositivo e quanto era stato da me trovato sperimentando con la luce periodicamente interrotta e facendo uso del telefono. Per cui, anche sotto tal riguardo, ulteriori ricerche e controlli sono in corso, sui cui risultati mi riservo di tornare.

***

Senza voler per ora attribuire grande importanza pratica all'effetto descritto, mi sembra che il suo studio accurato possa forse dar luogo allo spunto per la realizzazione di un nuovo ricevitore radiofonico. Realmente l'effetto stesso si constata anche se invece di usare della luce periodicamente interrotta, si fa arri-

Digitized by Google

vare sul primo audion della luce comunque modulata acusticamente. Così, tanto servendosi dell'arco voltaico parlante, che della lampada a mercurio modulata acusticamente, coi metodi già da me altrove indicati, si ha un'ottima e intensa riproduzione dei suoni e della parola. Quantunque tale nuovissimo ricevitore offra indiscutibili pregi di chiarezza, esso riesce alquanto meno sensibile di altri conosciuti, specie se fondati sull'uso di cellule fotoelettriche. Ma, tenuto conto della caratteristica di sensibilità delle varie lunghezze d'onda del nuovo effetto, può darsi che in avvenire, dispositivi fondati su questo, possano vantaggiosamente sostituire la cellula fotoelettrica.

Digitized by Google

Determinazione della gravità al polo ed all'equatore mediante coppie di valori osservati a varie latitudini.

Nota della Dott.ssa CECILIA DAINOTTI
presentata dal Socio nazionale residente C. Somigliana.

Il prof. Somigliana in alcune recenti ricerche ha stabilito delle nuove e importanti relazioni fra i valori della gravità, teoricamente determinata alla superficie di un geoide, considerato come superficie di livello e ruotante uniformemente. Nel caso in cui il geoide abbia la forma di un ellissoide schiacciato di rivoluzione, queste relazioni hanno forma assai semplice, e non è perciò difficile il farne dei controlli numerici, per vedere se esse siano effettivamente verificate dai valori della gravità, che sono ormai stati determinati in gran numero sulla superficie terrestre e che, in seguito ad opportune correzioni, *si ritiene debbano* rappresentare i valori effettivi della gravità sull'ellissoide di riferimento.

Fondamentale, tra le relazioni trovate dal prof. Somigliana, è una relazione lineare fra tre valori qualisiansi della gravità superficiale, relazione che nel caso dell'ellissoide di rivoluzione ha la forma seguente:

$$(1) \qquad \begin{aligned} & g_1 (\cos^2 \varphi_3 - \cos^2 \varphi_2) \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1} + \\ & + g_2 (\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_3) \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1} + \\ & + g_3 (\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_1) \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_3} = 0 , \end{aligned}$$

ove g_1, g_2, g_3 sono i valori della gravità nelle località di latitudini φ_1, φ_2, φ_3 rispettivamente, ed e la eccentricità.

Per mezzo di questa formula possiamo calcolare la gravità g_3

Digitized by Google

ad una latitudine qualunque φ_3, mediante i valori g_1 e g_2 a due altre latitudini qualisiansi φ_1 e φ_2, e confrontarla poi con quella che è data dalla osservazione, direttamente.

È chiaro che una differenza tra il valore calcolato ed il valore osservato, costituisce un'anomalia, di cui dovrà ricercarsi la causa in uno almeno dei due valori dai quali si parte.

Qualora uno stesso valore combinato successivamente con altri, produca anomalie in diversi valori della gravità, dovremo concludere che esso stesso deve considerarsi come anómalo. Abbiamo così un modo per sottoporre ad infinite revisioni e controlli i valori accettati per la gravità.

Io mi sono particolarmente occupata del calcolo dei valori della gravità al polo e all'equatore partendo:

1° Da coppie di valori della gravità corrispondenti a latitudini prima assai prossime tra loro, poi successivamente crescenti, senza tener conto delle differenze di longitudine.

2° Da coppie di valori presi sopra uno stesso meridiano.

I valori della gravità al polo e all'equatore ora accettati in base alla formula di Helmert, sono da considerarsi come risultato non di osservazione diretta, ma di una extrapolazione su valori altrimenti conosciuti.

Mi è sembrato quindi che potesse presentare un certo interesse questo nuovo calcolo dei valori della gravità al polo e all'equatore, prima di tutto, per sottoporre ad una verifica sperimentale la formula e dedurne dagli ottimi risultati cui si giunge una prova di più della sua indiscutibile validità; e in secondo luogo anche per decidere, dalla concordanza o discordanza dei valori che mano mano si ottengono pel polo e per l'equatore, da quelli normalmente accettati, della esattezza dei valori della gravità alle varie latitudini.

Le misure di cui mi sono servita sono tratte dal Rendiconto dell'Unione Geodetica Internazionale: Soler, *Rapporto sulle misure di gravità relativa (1912, 1922)*, e sono precisamente quelle assoggettate alla doppia correzione: per l'altitudine e per la densità del terreno, e cioè quel g_0'' che nelle tabelle di detto rapporto compare e che, come si è detto, dovrebbe effettivamente rappresentare il valore della gravità sull'ellissoide di riferimento.

Digitized by Google

Fa eccezione la coppia: S. Francisco-Oceano Glaciale Art. che è stata tolta dall' " Annuaire du Bureau des Longitudes „ (1926).

Le formule usate pel calcolo sono quelle ricavate dalla (1) rispettivamente per $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_1 = 90$, cioè:

$$g_p = \frac{g_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_2 \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1} - g_2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1 \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_2}}{\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$g_e = \frac{g_2 \cos^2 \varphi_1 \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_2} - g_1 \cos^2 \varphi_2 \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}{\operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) \operatorname{sen}(\varphi_2 + \varphi_1) \sqrt{1 - e^2}}.$$

In queste formole g_e e g_p vengono a dipendere unicamente dalla eccentricità e non dai valori assoluti dei semiassi dell'ellissoide di riferimento. Come valore della eccentricità ho scelto quello di Hayford, ora generalmente accettato in base al valore $\frac{1}{297}$ dello schiacciamento.

Le tabelle sono redatte in forma semplicissima e riassuntiva per permettere un colpo d'occhio d'insieme sui valori ricavati. Le località indicate sono quelle che si sono a volta a volta prese in considerazione e ad esse si riferiscono i valori delle latitudini e delle gravità note, nelle colonne apposite, indicati. Le ultime due colonne contengono i valori che pel g_e e pel g_p si sono ricavati mediante le succitate formule.

Nella prima tabella si è messa in evidenza la differenza di latitudine, che si è presa via via crescente, fra le località considerate; nella seconda tabella, invece, la longitudine che si è cercato di prendere in modo che fosse la più prossima possibile per le due stazioni di ogni coppia considerata, non avendone naturalmente di identiche.

Il segno posto sui valori della longitudine che compaiono per ultimi nella 2ª tabella è da ritenersi come un *meno*, poichè si tratta di longitudini negative.

Digitized by Google

Tabella 1ª.

LOCALITÀ	Latitudini	Differenze di latitudine	Gravità note g''_δ	Valore teorico della gravità ricavato per il polo	Valore teorico della gravità ricavato per l'equatore
Genova	44° 25′ 6″	0° 26′ 42″	980,574	983,906	977,882
Pola	44° 51′ 48″		980,629		
Napoli	40° 51′ 42″	1° 1′ 48″	980,276	983,383	977,830
Roma	41° 53′ 30″		980,378		
Abou Hamad	19° 32′ 0″	2° 23′ 48″	978,613	983,064	978,039
Wadi Halfa (Egitto)	21° 55′ 48″		978,755		
Minia (Egitto)	28° 5′ 48″	3° 12′ 48″	979,164	983,555	977,902
Alexandria (S. U.)	31° 18′ 36″		979,436		
Dehra Dun	30° 19′ 30″	3° 44′ 48″	979,289	983,071	977,979
Srinagar (De Filippi)	34° 4′ 18″		979,581		
Genova	44° 25′ 6″	3° 33′ 24″	980,574	983,027	978,207
Napoli	40° 51′ 42″		980,276		
Wakkanaj (Giappone)	45° 25′ 0″	4° 21′ 0″	980,660	983,164	978,094
Kenora (Canadà)	49° 46′ 0″		981,040		
Kenora (Canadà)	49° 46′ 0″	5° 55′ 12″	981,040	983,180	978,050
Kjobenhavn (Danimarca)	55° 41′ 12″		981,557		
Liard River (Canadà)	59° 58′ 42″	7° 27′ 54″	981,821	983,060	978,407
Artic Red River (Id.)	67° 26′ 36″		982,442		
Willits (S. U.)	39° 24′ 54″	10° 21′ 6″	980,090	983,261	977,950
Kenora (Canadà)	49° 46′ 0″		981,040		
Albany (S. U.)	31° 34′ 18″	11° 15′ 42″	979,461	982,950	978,113
Pamplona	42° 49′ 0″		980,363		
Windsor (Canadà)	42° 19′ 6″	13° 55′ 0″	980,376	983,038	978,113
Peace River (Id.)	56° 14′ 6″		981,546		
Valencia	39° 29′ 0″	16° 12′ 12″	980,128	983,188	978,044
Kjobenhavn (Danimarca)	55° 41′ 12″		981,557		
Roma	41° 53′ 30″	18° 51′ 12″	980,378	983,254	978,028
Liard River (Canadà)	59° 58′ 42″		981,950		

Digitized by Google

Segue TABELLA 1ª.

LOCALITÀ	Latitudini	Differenze di latitudine	Gravità note g''_θ	Valore teorico della gravità ricavato per il polo	Valore teorico della gravità ricavato per l'equatore
Bina (India)	24° 10′ 42″	20° 12′ 54″	978,876	982,888	978,025
Grand Rapids (S. U.)	44° 23′ 36″		980,498		
S. Diego (California)	32° 42′ 48″	22° 58′ 24″	979,530	983,200	978,020
Kjobenhavn	55° 41′ 12″		981,557		
Kartoum (Egitto)	15° 36′ 36″	27° 31′ 54″	978,391	983,126	978,009
Wood Stock (Canadà)	43° 8′ 30″		980,411		
Kartoum	15° 36′ 36″	26° 16′ 54″	978,391	983,819	978,006
Roma	41° 53′ 30″		980,378		
Dholpur (India)	26° 42′ 0″	29° 32′ 6″	979,034	983,116	977,980
Peace River (Canadà)	56° 14′ 6″		981,546		
Palermo	38° 6′ 54″	26° 47′ 6″	980,074	982,902	978,300
Normann (Canadà)	64° 54′ 0″		982,078		
Helwân (Egitto)	29° 51′ 30″	31° 29′ 42″	978,319	983,140	978,025
Providence (Canadà)	61° 21′ 12″		981,986		
Atbara (Egitto)	17° 41′ 54″	35° 33′ 24″	978,497	983,191	978,001
Buitempost (Olanda)	53° 15′ 18″		981,350		
Kartoum	15° 36′ 36″	36° 37′ 36″	978,391	983,231	977,995
Harikerberg (Olanda)	52° 14′ 12″		981,286		
Kartoum	15° 36′ 36″	40° 4′ 36″	978.391	983,208	978,004
Kjobenhavn (Danimarca)	55° 41′ 12″		981,557		
Abu Hamad (Egitto)	19° 32′ 0″	41° 49′ 12″	978,613	983,152	978,028
Providence (Canadà)	61° 21′ 12″		981,986		
Bhopâl (India)	23° 16′ 0″	44° 10′ 36″	978,809	983,201	977,971
Artic Red River (Canadà)	67° 26′ 36″		982,442		
Kartoum	15° 36′ 36″	45° 44′ 36″	978,391	983,150	978,014
Providence (Canadà)	61° 21′ 12″		981,986		
S. Francisco	37° 47′ 30″	48° 7′ 48″	980,002	983,187	978,064
Oceano Gl. Art.	85° 55′ 18″		983,171		

Digitized by Google

Segue TABELLA 1ª.

LOCALITÀ	Latitudini	Differenze di latitudine	Gravità note g''_θ	Valore teorico della gravità ricavato per il polo	Valore teorico della gravità ricavato per l'equatore
Atbara (Egitto)	17° 41′ 54″	49° 44′ 42″	978,497	983,202	978,015
Artic Red River (Canadà)	67° 26′ 36″		982,442		
Kartoum	15° 36′ 36″	50° 38′ 42″	978,391	983,149	977,971
Good Hope (Canadà)	66° 15′ 18″		982,351		
Hakodate (Giappone)	41° 46′ 48″		980,410	983,729	977,675
Idle Wilde (S. U.)	34° 13′ 18″		979,638		
Hakodate (Giappone)	41° 46′ 48″		980,410	982,978	978,485
Asahigawa	43° 46′ 18″		980,568		
Hakodate	41° 46′ 48″		980,410	984,800	976,924
Willits (S. U.)	39° 24′ 54″		980,090		
Hakodate	41° 46′ 48″		980,410	982,939	978,400
Kenora (Canadà)	49° 46′		981,040		

Digitized by Google

Tabella 2ª.

LOCALITÀ	Latitudini	Longitudini	Gravità note g''_θ	Valore teorico della gravità ricavato per il polo	Valore teorico della gravità ricavato per l'equatore
Bergen of Zoom (Olanda)	39° 53′ 12″	4° 17′ 18″	980,268	983,040	978,816
Mahon (Balenarie)	51° 29′ 42″	4° 15′ 48″	981,214		
Leiden (Olanda)	50° 3′ 0″	4° 29′ 6″	981,057	983,127	977,539
Couvin (Belgio)	52° 9′ 36″	4° 30′ 0″	981,273		
Breda (Olanda)	51° 35′ 30″	4° 46′ 30″	981,213	983,180	978,062
Helder (Olanda)	52° 58′ 0″	4° 46′ 42″	981,338		
Uccle (Belgio)	50° 48′ 0″	4° 21′ 30″	981,133	983,589	977,585
Deft (Olanda)	52° 0′ 36″	4° 22′ 6″	981,264		
Wolberg (Olanda)	52° 23′ 24″	5° 55′ 0″	981,292	983,114	978,246
Heerenveen (Olanda)	52° 57′ 42″	5° 55′ 24″	981,344		
Ubagsberg	50° 51′ 0″	5° 57′ 12″	981,146	983,480	977,760
Apeldoom	52° 13′ 18″	5° 57′ 48″	981,278		
Harikerberg (Olanda)	46° 39′ 6″	6° 32′ 24″	980,728	983,248	977,648
Eclepens (Svizzera)	52° 14′ 12″	6° 31′ 54′	981,286		
Les Verrières (Svizzera)	46° 54′ 18″	6° 28′ 48″	980,760	983,383	977,823
Hoogeveen (Olanda)	52° 43′ 36″	6° 28′ 42″	981,313		
Blerick (Olanda)	51° 22′ 24″	6° 9′ 54″	981,197	983,102	978,260
Buitempost (Olanda)	53° 15′ 18″	6° 8′ 30″	981,350		
Winschoten (Olanda)	46° 55′ 48″	7° 2′ 24″	980,746	983,316	977,848
Murten (Sizzera)	53° 8′ 42″	7° 7′ 18″	981,346		
Genova	44° 25′ 6″	8° 55′ 18″	980,574	982,427	978,524
Rivera (Svizzera)	46° 7′ 12″	8° 55′ 42″	982,684		
Lugano	46° 0′ 18″	8° 57′ 42″	980,678	982,744	978,436
Frauenfeld	47° 33′ 18″	8° 54′ 12″	980,791		
Flims (Svizzera)	46° 50′ 12″	9° 17′ 6″	980,630	986,879	973,779
Alt. S. Johann	47° 11′ 42″	9° 17′ 6″	980,712		
Splügen	46° 33′ 18″	9° 19′ 24″	980,612	986,692	975,579
Romaushorn	47° 33′ 54″	9° 22′ 12″	980,781		

Digitized by Google

Segue TABELLA 2ª.

LOCALITÀ	Latitudini	Longitudini	Gravità note g''_θ	Valore teorico della gravità ricavato per il polo	Valore teorico della gravità ricavato per l'equatore
Al Maglio	46° 5′ 18″	9° 3′ 0″	980,677	982,561	978,585
Wil	47° 27′ 48″	9° 2′ 30″	980,774		
Valsolille (Danimarca)	55° 31′ 18″	11° 50′ 30″	981,545	982,721	978,6
Mandria	42° 22′ 12″	11° 50′ 6″	980,670		
Arezzo	43° 27′ 54″	11° 55′ 42″	980,528	982,690	978,557
Legnaro	45° 20′ 30″	11° 57′ 48″	980,657		
Civita Castellana	42° 17′ 12″	12° 27′ 12″	980,424	983,148	978,178
Hornbaek (Danimarca)	56° 5′ 30″	12° 27′ 42″	981,598		
Perugia	43° 6′ 48″	12° 26′ 0″	980,493	983,118	978,190
Birkerod (Danimarca)	55° 50′ 24″	12° 25′ 54″	981,565		
Bina (India)	24° 10′ 42″	78° 11′ 48″	978,876	982,508	978,150
Gwalior (,,)	26° 13′ 54″	78° 12′ 48″	978,998		
Dehra Dun	30° 19′ 30″	78° 3′ 6″	979,289	983,183	977,654
Sughet Carol (Miss. De Filippi)	36° 20′ 54″	78° 1′ 36″	979,854		
Voodstock	28° 36′ 42″	80° 47′ 0″	980,411	983,031	978,085
Titusville	43° 8′ 30″	80° 48′ 24″	979,244		
Erie (S. U.)	42° 7′ 8″	80° 4′ 48″	980,317	983,589	977,690
Rose Point (Canadà)	45° 19′ 0″	80° 2′ 30″	980,641		
Alexandria	31° 18′ 36″	92° 26′ 0″	979,435	982,921	978,129
Baldwin	44° 57′ 48″	92° 23′ 0″	980,539		
Lebanon	37° 41′ 6″	92° 39′ 0″	979,950	982,969	978,144
Osage	43° 16′ 48″	92° 47′ 0″	980,410		
Hot Springs	34° 30′ 6″	93° 6′ 0″	979,697	982,861	978,205
Pittsburg	40° 27′ 24″	93° 0′ 0″	980,165		
Idle Wilde	34° 13′ 18″	97° 7′ 0″	979,630	983,089	978,061
Vinnipeg	49° 54′ 24″	97° 9′ 42″	980,976		
Wilkins Well	39° 4′ 24″	97° 24′ 30″	980,976	982,928	978,098
Taylor	30° 34′ 6″	97° 4′ 30″	979,638		

Digitized by Google

Le deviazioni dei valori trovati per g_p e g_e, dai valori di Helmert:

$$g_e = 978{,}030 \qquad g_p = 983{,}215$$

sono generalmente, salvo poche eccezioni, di senso opposto, cioè se esiste un'eccedenza al polo si verifica invece una deficienza all'equatore e viceversa. Calcolando infatti le differenze fra i valori da me ottenuti e quelli di Helmert, cioè intendendo:

$$\Delta g = g_D - g_H ,$$

si ottengono le differenze che sono riportate in modo continuo, seguendo l'ordine delle tabelle precedenti, nella tabella messa in ultimo.

Facendo una media aritmetica fra tutti i valori ottenuti, esclusi quelli che troppo si differenziano dai soliti, se ne ricava un valore medio che:

col 1° sistema è: $g_p = 983{,}254$ $\qquad g_e = 977{,}973$

col 2° sistema è: $g_p = 983{,}090$ $\qquad g_p = 978{,}069.$

Si noti che mentre quasi tutte le coppie dei valori ottenuti per g_e e per g_p hanno differenze inferiori all'unità, e qualcuna di appena qualche millesimo, dai valori Helmert, i valori scelti sul 9° meridiano e altri, messi per ultimo nella prima tabella (nei quali entra il valore: $\varphi = 41° 46' 48''$), dànno, per g_e e per g_p, valori che differiscono di quantità molto maggiori, fino a 4,251 in valore assoluto. Ciò dimostra l'esistenza di qualche fatto anómalo di cui sarebbe desiderabile poter scoprire l'origine.

Digitized by Google

Tabella I

Δg_p	Δg_e
+ 0.691	— 0,698
+ 0,168	— 0,200
— 0,151	+ 0,009
+ 0,340	— 0,128
— 0,144	— 0,051
— 0,188	+ 0,177
— 0,051	+ 0,064
— 0,035	+ 0,020
+ 0,377	— 0,155
+ 0,046	— 0,080
— 0.265	+ 0,083
— 0,177	+ 0,083
— 0,027	+ 0,014
+ 0.039	— 0,002
— 0,327	— 0,005
— 0,025	— 0,023
— 0.089	— 0,021
+ 0,088	— 0,032
— 0,099	— 0,050
— 0,328	+ 0,270
— 0,075	+ 0,005
— 0,024	— 0,029
+ 0.016	— 0,035
— 0,007	— 0,026
— 0,063	+ 0,002
— 0,014	— 0,059
— 0,065	— 0,016
— 0,028	+ 0,034
— 0,013	— 0,015
— 0,066	— 0.059
+ 0,524	— 0,355
— 0,237	+ 0,455
+ 1,585	— 2,106
— 0,276	+ 0,370

Tabella II

Δg_p	Δg_e
— 0,175	+ 0,286
— 0,088	— 0,491
— 0,035	+ 0,032
+ 0,324	— 0,495
— 0.101	+ 0,216
+ 0,215	— 0,270
+ 0,033	— 0,382
+ 0,118	— 0,207
— 0,113	+ 0,230
+ 0,101	— 0,182
— 0,788	+ 0,494
— 0,471	+ 0,406
+ 3,664	— 4,251
+ 3,477	— 2,451
— 0,654	+ 0,555
— 0,494	+ 0,600
— 0,525	+ 0,527
— 0,067	+ 0,148
— 0,102	+ 0.160
— 0,707	+ 0,120
— 0,032	— 0,376
— 0,184	+ 0,055
+ 0,324	— 0,340
— 0,294	+ 0,099
— 0,246	+ 0,114
— 0,354	+ 0,175
— 0,176	+ 0,031
— 0,287	+ 0,063

Torino, 17 giugno 1928.

Digitized by Google

Nuovi affioramenti del Pliocene marino nella Val d'Olona.

Nota del Dott. G. L. NANGERONI
presentata dal Socio nazionale residente Emilio Repossi.

Nell'area Varesina, tra il lago Maggiore e quello di Como, gli affioramenti del Pliocene marino conosciuti fino ad ora si riducevano ai ristretti lembi di Taino (Angera), Faido (Varese), Folla d'Induno (sotto S. Fermo di Varese), Pontegana e Balerna (Chiasso), Casanova Lanza (Malnate). Noti da tempo i primi, venne invece quest'ultimo recentemente descritto dal Monterin [3] che ne studiò i banchi di sabbie, marne ed argille fossilifere, messi a nudo da una frana prima e poi da un taglio artificiale eseguito per la ricerca e lo sfruttamento di argille per laterizi. Le formazioni di Taino e di Casanova poggiano sul Miocene; le altre invece poggiano, più o meno visibilmente, in forte discordanza sul Cretaceo.

A questa serie di lembi certamente pliocenici già noti se ne aggiungono ora altri due, rinvenuti nell'aprile di quest'anno, uno a Castiglione Olona, l'altro a Torba, ambedue poggianti sul Miocene e press'a poco a livello del fondovalle (rispettivamente a m. 275 e m. 247 sul mare).

Avevo iniziato lo studio dei terrazzi della Val d'Olona e qualche gita sul posto mi aveva convinto che senza una sicura base geologica l'analisi del terrazzamento sarebbe stata una inutile esercitazione dai risultati tutt'altro che soddisfacenti. La mancanza di carte geologiche recenti e dettagliate della regione mi consigliò a mettermi all'opera per un rilevamento, volutamente un po' minuzioso, aiutato dai lavori fondamentali del Taramelli [6], del Sacco [4] e della Stella [5]. Avevo intanto notato che molti terreni collocati nel diluvium e più particolarmente

Digitized by Google

ascritti alla formazione ceppoide, si dovevano in realtà unire alla ben nota formazione gonfolitica, probabilmente miocenica. L'andamento stratigrafico variabile alquanto da luogo a luogo ma sempre con inclinazione oscillante tra i 10° ed i 20° verso Sud; la natura litologica dei ciottoli e ciottoloni (tonalite, serizzo del Màsino, ecc.), talora veramente giganteschi, inglobati nei banchi arenacei i quali poi si alternano con i banchi conglomeratici e con strati marnosi; la sua grande potenza come non è riscontrabile nel ceppo; la posizione delle sorgenti e delle falde di acqua situate quasi sempre sotto i banchi di Ceppo fessurati e permeabili, e sopra i banchi della gonfolite (donde ne deriva che utilissimo mezzo per riconoscere l'estensione in profondità della gonfolite è l'esame critico delle varie profondità dei pozzi trivellati sui terrazzi diluviali); costituiscono un complesso di caratteri distintivi che non possono lasciare dubbi quanto alla delimitazione della gonfolite.

Del resto già Sacco e Taramelli avevano pensato ed avvertito che tale formazione dovesse essere più estesa di quanto ad un esame sommario potesse sembrare. Fu appunto nell'accompagnare la linea di contatto tra il Miocene ed il Quaternario che ho potuto rinvenire uno dei due affioramenti suddetti e le tracce dell'altro.

1. — Affioramento di Castiglione Olona.

Due anni or sono dovendosi allargare il cortile Nord dello dello Stabilimento Milani (1) venne arretrata la ripida pendice che scende dal terrazzo di C. Careno. L'arretramento, solo di qualche metro, mise completamente allo scoperto un piccolo deposito di argilla azzurrognola fossilifera. Ottenuto lo spazio sufficiente, la parete messa allo scoperto venne rivestita d'un alto muraglione che nasconde oramai il deposito. Molti fossili

(1) La Filatura Milani si trova sulla sinistra dell'Olona, sul piano del fiume, allo sbocco della breve stretta Lozza-Castiglione percorsa dalla linea ferroviaria.

Digitized by Google

vennero raccolti dal signor Giulio Fassi, il quale anzi mi mise al corrente, nell'aprile di quest'anno, dei ritrovamenti.

Traccie di fossili in blocchetti di argilla ho poi rinvenuto girando dietro il muraglione dove il pendio roccioso si stacca da questo. Ma si tratta di pochi pezzi abbandonati durante i lavori.

Dai dati raccolti, dalle osservazioni fatte e dalla fotografia esaminata, si può con tutta certezza ritenere che qui il Pliocene, che dal livello del piano non s'innalza più di due metri e che venne scoperto per una lunghezza di circa m. 3-4, si appoggi sulla gonfolite (inclinata verso Sud di 12°) in discordanza, con strati argillosi inclinati a Sud di circa 7°-8°, coperti alla lor volta dalle alluvioni del diluvium antico sottostante al Ceppo. La separazione del Pliocene dall'alluvione sovrastante è segnata da una linea di fori di drenaggio lasciati nel muraglione per lo smaltimento delle acque.

Per quanto abbia cercato nelle prossime vicinanze, non mi fu dato rinvenire altri affioramenti naturali od artificiali del genere.

Nello stesso cortile, circa 35 metri più a Sud, venne eseguita una profonda trivellazione, allo scopo di ricercare una falda d'acqua sufficiente per i bisogni della filanda. La trivellazione venne spinta a m. 80 di profondità ed ha dato i seguenti risultati:

1° Detriti alluvionali fino a m. 12 dove si rinvenne una vena acquifera non sufficiente però per i bisogni locali.

2° Argille verdastre non fossilifere fino a m. 30.

3° Argille azzurrognole fossilifere, con sottili strati di fine sabbia giallognola, fino a m. 80.

Non essendosi rinvenuta acqua, la trivellazione venne sospesa.

I detriti alluvionali potrebbero appartenere in piccola parte all'alluvium; le argille verdastre, che anche qua e là compaiono sotto il ceppo, al diluvium più antico, insieme con le rimanenti alluvioni, e l'argilla fossilifera al Pliocene. Questi rappresentano certo la continuazione a valle degli strati più profondi dell'affioramento visto. La prima vena acquifera si continua per tutto il piano dell'Olona a N. ed a E. (I e II quadrante); mai ad

Digitized by Google

Ovest (III e IV quadrante) perchè interrotta dalle emergenze del Miocene. Quindi le altre argille di Torba, di cui si vedrà ora, se debbono essere collegate con queste, non lo possono certo essere se non per un legame situato ad Est della lunga stretta di valle tra Castiglione e Torba. I fossili rinvenuti durante l'abbattimento del pendìo e la trivellazione del pozzo, come pure quelli di Torba, vennero da me inviati al chiarissimo Prof. Parona per la loro determinazione: ma anche da un esame sommario mi pare non si possa dubitare sulla loro appartenenza al Pliocene marino.

2. — Affioramento di Torba.

Circa 350 metri a Nord della stazione di Torba la linea ferroviaria entra in una breve e bassa trincea artificiale, scavata in un lieve rialzo su cui passa la carrozzabile Torba-S. Pancrazio. Il dosso è costituito da uno scheletro di gonfolite, ben visibile sul fianco occidentale della trincea, dai banchi inclinati a Sud di circa 15°. Sono appunto questi banchi che mi hanno guidato al rinvenimento del Pliocene.

In una ristretta zona, al di sopra di alcuni strati di conglomerato, a circa m. 1,30 di altezza, si vede affiorare uno strato di marna cenerina fossilifera, inclinato a Sud di circa 8°. Il suo spessore si aggira sui cm. 80. Seguono verso l'alto altri strati di argilla non fossilifera. La lunghezza dell'affioramento fossilifero non supera i tre metri. Sul fianco orientale della trincea la gonfolite cessa a 50 cm. di altezza dal piano della linea ferroviaria. Ed anche qui è coperta da circa m. 1,50 di argilla fossilifera. In ambedue i versanti l'affioramento è poco visibile in causa della folta copertura erbosa ed arborea. Credo che prima dello scavo della trincea (mi pare nell'anno 1916) nulla emergesse in superficie.

I fossili abbondanti, sono marini (Dentalium, Turritella, ecc.) e pliocenici, e dalla loro disposizione e conservazione non mi pare siano di trasporto.

Nel piano di Torba, alquanto più a Sud dell'affioramento, i pozzi hanno la profondità di m. 4-6; però più a Sud ancora

Digitized by Google

alcuni tubi infissi nel fondo d'un ramo dell'Olona alla profondità di m. 9-10, contribuiscono ad aumentare la quantità d'acqua del fiume. È probabile che si tratti delle stesse argille che lentamente si affondano in modo definitivo sotto le alluvioni quaternarie.

***

Questi due affioramenti pliocenici non mi sembrano privi d'importanza. Infatti: 1° quello di Torba, il più a Sud finora rinvenuto in superficie tra Ticino ed Adda, rappresenta a mio avviso la zona dove esso definitivamente s'immerge sotto la pianura per non essere più oltre rintracciabile se non con trivellazioni più o meno profonde; 2° forniscono anch'essi una prova del sollevamento probabilmente Astiano, causa prima del ringiovanimento delle mature forme Alpine Plioceniche e della eliminazione di gran parte delle argille e sabbie pl. dalle falde prealpine. Al quale sollevamento deve essere succeduto un abbassamento della pianura Padana secondo una linea che credo non ben definibile. Che vi sia stato un abbassamento lo prova il fatto del rinvenire depositi alluvionali fino a m. 134 sotto il livello del mare, per esempio a Milano [2]; che poi il sollevamento alpino e prealpino non sia stato contemporaneo ad un abbassamento della pianura, ciò mi sembra provato con una certa evidenza dal fatto del rinvenire zone di contatto tra il Pliocene marino ed il Quaternario lacustre-alluvionale, tra loro vicine, ad altezze differenti; perchè sarebbe forse un po' semplicistico attribuire questo fatto a valori diversi nel sollevamento, piuttosto che alla diversa erosione subìta dai depositi per opera delle prime correnti diluviali. Anche l'esame delle altezze del fondo su cui giacciono le argille plioceniche non ci può dare il valore dei sollevamenti ed abbassamenti avvenuti, perchè in quel mare vi furono certamente differenze originarie di profondità per rischiararci sul valore delle quali non sempre serve l'analisi mineralogica e paleontologica dei sedimenti; infatti anche durante il Pliocene possono essere avvenuti dei movimenti verticali di fondo.

Digitized by Google

Insomma per sapere esattamente quale valore assuma la somma dei singoli valori positivi e negativi di spostamenti verticali dalla fine del Pliocene in poi dovremmo avere a disposizione per l'opportuno esame dell'altezza, ecc., il deposito marino più alto e che fu più vicino all'antica spiaggia emersa del Pliocene. Tutti gli altri valori, anche nelle migliori condizioni di conservazione, peccano sempre per difetto.

***

Si potrebbe ora rifare approssimativamente la storia del modo come questi due giacimenti poterono conservarsi durante tutto il Quaternario. Sarà intanto opportuno ricordare che collegando tra loro i diversi profili, naturali od artificiali (Cave ghiaia, ecc.), sparsi lungo la Valle Olona, possiamo ritenere il diluvium antico come costituito da tre parti ben distinte e cioè, dal basso all'alto:

1. *Alluvioni* fini o grossolane, ad elementi specialmente alpini, con strati argillosi specie nelle parti alte dove è quasi sempre ben visibile una zona di ciottoli alterati. Talora le ghiaie sono cementate in conglomerati od arenarie, ben distinte però dal sovrastante ceppo per la molto minore compattezza e per la composizione litologica.

2. *Ceppo*, ad elementi prevalentemente prealpini (calcari e porfidi), ben cementato; affiora anche nelle vallette laterali; quindi trattasi di un deposito sovrapposto, non incastrato, come invece avviene per il diluvium medio e recente.

3. *Diluvium ferrettizzato* ad elementi alpini più o meno grossolani, molto alterato in superficie e fino a buona profondità. È il diluvium degli altipiani più elevati della pianura.

Nella nostra zona, dove cioè le conoidi posteriori al diluvium antico sono ancora incassate e ristrette perchè ancora vicine all'apice, tanto il diluvium medio quanto quello recente formano come un velo sulle formazioni precedenti, da queste in generale ben distinguibile. Velo che a sua volta è ricoperto da uno strato più o meno potente di alterazione superficiale. Le cave

Digitized by Google

di sabbia sono aperte indifferentemente nelle alluvioni sottostanti al ceppo (quindi del diluvium antico) e nelle alluvioni del diluvium recente. Non invece nel diluvium medio perchè molto ferrettizzato per quasi tutta la sua potenza che è d'altronde tutt'altro che rilevante (m. 20-25 al massimo). Non deve fare meraviglia che vi siano cave di ghiaia scavate nelle alluvioni più antiche (da Lozza a Castellanza seguono quasi tutte questo orizzonte), perchè non dobbiamo mai dimenticare che *il fenomeno della ferrettizzazione è un fatto di superficie,* come, con felicissima espressione, il compianto Prof. Artini amava, e con ragione, ribadire [1]. Dove le alluvioni più antiche sono state prestamente ricoperte da sedimenti più giovani, tale fenomeno o non è avvenuto, od ha interessato uno spessore minimo, come appunto deve essere accaduto nel nostro caso.

Quanto al Miocene esso si sviluppa fino a Torba (circa m. 350 a Nord della stazione ferroviaria) costituendo la roccia di fondo da Lozza a Torba. Sul versante destro della valle si innalza di molto, fino ad oltre m. 350, sottoposto alle alluvioni precedenti al Ceppo (che qua e là mi sono sembrate argille ghiaiose di morena profonda, come ad esempio al Molino della Selvagna tra Schianno e Bizzozzero) oppure al Ceppo (come nella stessa valle della Selvagna), oppure al diluvium ferrettizzato, col quale è facilmente confondibile, come del resto nella facies conglomeratica compatta è facilmente confondibile col Ceppo. Tutto ciò è in relazione con l'elevarsi o meno della gonfolite stessa che profondamente abrasa a Sud di Bizzozzero fino alla Selvagna, emerge poi potente ancora fino sotto l'altopiano del diluvium ferrettizzato di Caronno Ghiringhello. Si sottopone inoltre al diluvium medio (Sud di Lozza) ed al diluvium recente (terrazzo di Gornate, ecc.).

Dalla valle Selvagna a Gornate Inferiore, cioè nella regione in cui la formazione miocenica si innalza, manca il Ceppo. Ciò potrebbe essere interpretato in diversi modi: o che sia stato regolarmente deposto dove il Miocene si abbassa sotto il suo livello, e poi abraso; oppure che non sia mai stato deposto perchè in quel tempo il Miocene era tanto elevato anche dove ora soggiace al diluvium recente (che ha un livello superiore

Digitized by Google

alla base del Ceppo). Il fatto che il Miocene appare nella zona di Gornate come terrazzato, farebbe ritenere più probabile la seconda ipotesi.

Tale formazione è ben visibile in quasi tutte le vallette del versante destro della valle, dalla Val Selvagna (Lozza) al Cimitero di Gornate Inferiore. Istruttivo è un alto gradino di gonfolite da cui precipitano a cascata nella Val d'Olona sotto il ponte della ferrovia le acque del torrente che scende da Gornate Superiore.

Sul versante sinistro poi dell'Olona la gonfolite costituisce il sostegno dei terrazzi del diluvium recente di Cascine Careno e di Castiglione, solo però lungo due strette di valle: la prima non più lunga di m. 300, la seconda invece lunga oltre due chilometri e mezzo, rispettivamente nei tratti di ferrovia: Lozza-Castiglione e Castiglione-Torba. Dove la valle s'allarga (piani di Lozza, di Castiglione, di Torba) il versante sinistro è sempre di alluvioni precedenti al Ceppo. Del resto anche nella regione dei due stretti corridoi, ad oriente la gonfolite si affonda rapidamente sotto i varî diluvium più o meno affioranti qua e là. Eloquenti a questo riguardo sono le cifre delle profondità raggiunte dai pozzi trivellati sul terrazzo di Madonna di Campagna (terrazzo del diluvium recente) per ricerca di acque: giungono tutti di qualche metro sotto il piano dell'Olona, cioè al livello delle argille lacustri quaternarie o delle argille plioceniche, oppure, ma ciò è poco probabile, della gonfolite.

Eccone infatti (a pagina seguente) un breve elenco, comunicatomi gentilmente dal signor Giulio Fassi.

Da questo elenco appare evidente come ripido si affondi il Miocene e come le argille, forse tanto quelle plioceniche quanto le quaternarie, si continuino in profondità sotto il manto alluvionale.

E così avviene che i due terrazzi fronteggiantisi ai due lati della stretta di Castiglione, si trovino in condizioni idriche quanto mai differenti: sul terrazzo occidentale sostenuto dal Miocene impermeabile l'acqua trovasi abbondante alla profondità di m. 4-6; sul terrazzo orientale, solo bordato dal Miocene e per il rimanente costituito di alluvioni quaternarie fino a livello dell'Olona, non si trova acqua se non a m. 45-50.

Digitized by Google

LOCALITÀ	Altitudine	Profondità	Altitudine del fondo	Distanza, in linea retta, dell'affioramento miocenico più vicino, pressochè alla stessa altitudine della bocca del pozzo
	m.	m.	m.	m.
C. Careno	318	53	265	350
C. Bassetto	324	49	275	720
Madonna di Campagna . .	321	46	275	1000
Somadeo	315	56	259	875
Castiglione: entrata Est . .	300	32	268	150
» Casa Castiglioni	—	28	—	—
» fondo Valle . .	274	9-12	265-262	—

È quindi probabile che agli inizi del quaternario, dopo la prima fase di generale infossamento delle valli, il Miocene avesse i limiti orientali segnati presso a poco dalla seguente linea, supposta al livello dell'Olona odierna: Malnate, Nord di Gurone, Sud di Bizzozzero, Valle Selvagna, Ovest C^na^ Carena, Caronno Corbellaro, Gornate Superiore, Castiglione Olona, Villafranca, C. Nisciorèe, S. Pancrazio, Trincea Ferr. Nord Staz. Torba, Cimiteri di Torba e Gornate Inferiore, Belvedere (m. 364), ecc. Insomma una specie di penisola volta a Sud, con la punta a Torba e con le due insenature di Lozza e di Castiglione. Le due strette tra Lozza e Torba sono di evidente incisione operata dalla corrente del diluvium recente. L'abitato di Castiglione Olona, situato al contatto tra il diluvium e la gonfolite è quasi tutto fondato su una vallecola-reliquato d'un antico ramo dell'Olona. Le prime correnti diluviali scendevano liberamente da Nord secondo la direzione di Malnate, lambendo le falde orientali delle formazioni gonfolitiche già viste che allora formavano probabilmente un tutto unico. Nelle originarie insenature gonfolitiche, la grande conoide non riusciva a penetrare e cioè a colmare: in tal caso il colmamento veniva operato dai laghetti di sbarramento le cui argille ed alluvioni fine ricoprivano i pochi lembi rimasti di Pliocene marino, risparmiati dalla erosione postastiana. In tal modo si potrebbe spiegare come sul versante

Digitized by Google

sinistro del piano di Castiglione abbondino le alluvioni ghiaiose (cave di ghiaia), mentre sul piano e sul versante destro abbondino, sotto il Ceppo od appoggiate al Miocene, le argille più o meno sabbiose. Il Ceppo, in seguito, viene a colmare sempre più l'alta pianura, pur lasciando isolata ancora la parte più elevata della penisola miocenica la quale invece viene poi completamente coperta e nascosta dal diluvium ferrettizzato.

Il terrazzamento operato dal diluvium medio, dal diluvium recente e dal postglaciale, oltre all'azione antropica, rimette a nudo in parte i terreni prequaternari.

Sono così uscito alquanto dall'unico argomento che mi era proposto di illustrare: la descrizione dei due nuovi affioramenti di Pliocene. Credo tuttavia che anche le altre notizie possano servire per un rilevamento aggiornato dalla zona in parola, di cui tanto si sente il bisogno per studi di Geografia e Geomorfologia e, praticamente, per la ricerca di buone ed abbondanti falde d'acqua tanto necessarie alle industrie che, vigorose, rendono questa valle, di per sè forse economicamente trascurabile, una delle più operose e ricche dell'alta pianura lombarda (1).

Notizie paleontologiche. — Il prof. Parona, al quale ho comunicato il materiale paleontologico raccolto nei lembi pliocenici su descritti, mi trasmette le seguenti osservazioni, delle quali vivamente lo ringrazio.

---

(1) Autori consultati ed elencati con parentesi quadrate nella presente Nota:

1. Artini (E.), *Osservazioni mineralogiche, ecc.*, "Atti Soc. It. Sc. Nat. Milano „, vol. LXVI, fasc. I-II, 1927.
2. Mariani (E.), *Osservazioni geologiche, ecc.*, "Atti Soc. It. Sc. Nat. Milano „, vol. LXVI, fasc. I-II, 1927.
3. Monterin (U.), *Sul lembo pliocenico di Casanova Lanza, ecc.*, "Atti R. Acc. Sc. Torino „, vol. LXI, 1926.
4. Sacco (F.), *L'Anfiteatro morenico del Lago Maggiore*, "Annali R. Acc. Agric. Torino „, vol. XXXV, 1892.
5. Stella (A.), *Sui terreni quaternari della valle del Po, ecc.*, "Boll. Com. Geol. Ital. „, vol. XXVI, 1. Roma, 1895.
6. Taramelli (T.), *I tre Laghi*, Artaria, Milano, 1903.

Digitized by Google

Nel riguardo paleontologico i due giacimenti di Castiglione Olona e di Torba presentano differenze notevoli. Il primo, costituito da finissima sabbia oscura, ricchissima di mica e assai permeabile, contiene una fauna, che può dirsi ricca e complessa nella sua composizione. A parte rare e piccolissime otoliti, dita di crostacei, avanzi rimasti indeterminati, e radioli di cidaridi (*Dorocidaris papillata* Lmk.), risulta di numerosi foraminiferi (comunissima la *Nonionina communis*, comune la *Polystomella crispa*, specialmente ben rappresentate le textularie, robuline, bolimine, discorbine, truncatuline), di coralli, briozoi, brachiopodi, molluschi e resti di cirripedi. Il deposito di Torba è formato invece di marna assai fine, in qualche accentramento così concrezionata da impedire l'estrazione dei fossili: la fauna comprende pure avanzi frammentizi di crostacei e di cidaridi (*Cidaris Desmolinsi* Sism., frequente nel Pliocene) con qualche piccolissima otolite e un dentino di pesce (*Dentex vulgaris*, Cuv. et Valenc., già segnalato nel Pliocene italiano); ma è essenzialmente costituito da molluschi con abbondanza di forme piccole, con poche specie comuni con la fauna di Castiglione Olona; sono pure presenti pezzi scheletrici di balani e una faunetta di foraminiferi, sopratutto caratterizzata dalla prevalenza della *Polystomella crispa* e dalla presenza dell'*Amphistegina Lessonii*.

Alle diversità delle facies litologiche si accompagnano dunque in modo evidente diverse caratteristiche paleontologiche nei due lembi pliocenici, accennando a due ambienti alquanto diversi di sedimentazione e di vita, per quanto l'uno e l'altro appartenenti alle zone litoranee. Dall'insieme delle due faune si arguisce che, con molta probabilità, si tratta di Pliocene inferiore (Piacenziano). Allo studio dei fossili ricordati nei due elenchi che seguono, hanno contribuito la sig.ra Dott. R. Zuffardi-Comerci per la determinazione dei coralli e dei briozoi, e la sig.na Dott. A. Martinotti per quella dei foraminiferi.

1. Fossili di Castiglione Olona (sp. n° 116).

Biloculina sphaera d'Orb., *B. mutabilis* Martin., *B. anomala* Schlumb.; *Spiroloculina Soldanii* Forn.; *Sigmoilina Taramellii* Martin., *S. celata* (Costa); *Triloculina Marioni* Schlumb.; *Quin-*

Digitized by Google

queloculina seminulum (L.), *Q. zig-zag* d'Orb.; *Textularia gibbosa* d'Orb., *T. subangulata* d'Orb., *T. aciculata* d'Orb.; *Clavulina communis* d'Orb.; *Nodosaria guttifera* d'Orb., *N. obliqua* (L.), *N. raphanistrum* (L.), *N. Roemeri* (Neugeb.); *Robulina budensis* Hantk., *R. cultrata* (Montf.), *R. rotulata* (Lmk.), *R. serpens* Seg., *R. calcar* (L.); *Fornasinia tuberosa* (d'Orb.), *F. peregrina* (Schwag.); *Uvigerina bradyana* Forn., *U. angulosa* Williams.; *Bolivina peregrina* Schwag.; *Cassidulina laevigata* d'Orb.; *Bulimina spinescens* Brady, *B. ovata* d'Orb., *B. aculeata* d'Orb., *B. spinulosa* (Reuss), *B. convoluta* Williams.; *Globigerina conglobata* Brady; *Pullenia sphaeroides* (d'Orb.); *Sphaeroidina bulloides* d'Orb.; *Discorbina orbicularis* (Terq.), *D. rosacea* (d'Orb.), *D. auricula* (Fich. et Moll.), *D. Haueri* (d'Orb.), *D. perlata* (Andreae), *D. Bertheloti* d'Orb., *Truncatulina lobatula* (Walker et Jacob), *T. variabilis* d'Orb., *T. pachyderma* Rzehak, *T. Ungeriana* (d'Orb.), *T. Haidingeri* (d'Orb.), *T. Dutemplei* (d'Orb.), *T. tenera* Brady; *Anomalina ammonoides* (Reuss), *A. grosserugosa* (Gümb.); *Pulvinulina Schreibersii* (d'Orb.); *Siphonina reticulata* (Czjzek), *S. elegans* (d'Orb.); *Rotalia Beccarii* (L.), *R. Soldanii* d'Orb.; *Nonionina depressula* (Walk. et Jacob), *N. umbilicatula* (Montg.), *N. stelligera* d'Orb., *N. communis* d'Orb.; *Polystomella crispa* (L.).

Dendrophyllia Michelinii Mich.

Diastopora flabellum Rss., *D. repens* Smitt.; *Diaperaecia dilatans* John.; *Hippothoa* cfr. *aquitanica* Canu; *Membranipora lineata* L.; *Thalamoporella andegavensis* Mich.; *Electra elliptica* Rss.; *Retepora Pignatarii* Nev.; *Schizoporella elegans* d'Orb., *S. sp.*; *Schizoteca stellata* Seg.; *Peristomella coccinea* Abild.; *Mastigophora Dutertrei* Sav. And.; *Cellepora cutleriana* Wat.; *Cupularia* Sp.

Mühlfeldtia truncata (L.); *Terebratulina caput-serpentis* (L.).

Ostrea edulis L.; *Dimya fragilis* Koen; *Spondylus Gussonii* Costa, *S. Gaederopus* L.; *Pecten scabrellus* Lmk.; *Avicula hirundo* (L. Poli); *Anadara diluvii* (Lmk.); *Barbatia barbata* L.; *Acar* cfr. *nodulosa* (Müll.) Sacco; *Nucula placentina* Lmk.; *Chama gryphina* L.; *Cardium tuberculatum* L.?; *Myrtea spinifera* (Montg.) — *Dentalium sexangulum* Schs.; *Bolma rugosa* (L.); *Ampullotrochus cingulatus* (Br.); *Clanculus corallinus* (Gml.); *Cerithium varicosum* Br.; *Haustator vermicularis* (Br.); *Archimediella bicarinata*

Digitized by Google

(Eichw.); *Zaria subangulata* (Br.); *Turritella tricarinata* Br.; *Vermetus* (*Petaloconchus*) *intortus* Lmk.; *Natica millepunctata* Lmk.; *Flemingia zetlandica* (Montg.); *Cassidaria echinophora* (L.); *Nassa* (*Ancycla*) *semistriata* Br., *Nassa* (*Hima*) *planicostata* Bell., *Nassa* (*Hinia*) *reticolata* L.; *Columbella semicaudata* L.; *Euthria cornea* L.; *Marex imbricatus* Br.; *Drillia Allionii* Bell., *Drillia* (*Cymatosyrinx*) *sigmoidea* (Brn.); *Retusa decussata* (Ben.).

Scalpellum magnum Dorv.? (tergo), *Balanus concavus* Brown (scudo).

2. Fossili di Torba (sp. n° 41).

Biloculina depressa d'Orb.; *Textularia gibbosa* d'Orb., *T. subangulata* d'Orb.; *Robulina calcar* (L.); *Bulimina tricarinata* (d'Orb.); *Truncatulina lobatula* (Walk. et Jac.), *T. Haidingeri* (d'Orb.), *T. Dutemplei* (d'Orb.); *Pulvinulina Schreibersii* (d'Orb.); *Rotalia Beccarii* (L.); *Polystomella crispa* (L.); *Amphistegina Lessonii* d'Orb.

Monia striata (Br.); *Dimya fragilis* Koen; *Pecten jacobaeus* (L.); *Aequipecten opercularis* (L.); *Flabellipecten Bosniaschii* (De Stef. et Pant.); *Arca Noe* L.; *Fossularia lactea* (L.); *Cardium erinaceum* Lmk.; *Papillicardium papillosum* (Poli); *Circomphalus plicatus* (Gmel.); *Timoclaea ovata* (Pent.); *Corbula gibba* (Oliv.), *C. revoluta* (Br.). — *Ampullotrochus miliaris* (Br.); *Fuscoscala frondicula* (Wood.); *Bittium reticulatum* (Da Costa); *Monophorus perversus* (L.); *Cerithiopsis tubercularis* (Montg.); *Turritella tricarinata* Br.; *Caecum trachea* (Montg.); *Naticina catena* (Da Costa); *Eulima lactea* (Grat.); *Niso terebellum* (Chemm.) var. *eburnea* (Risso); *Odontostomia conoidea* (Br.); *Turbonilla delicata* Montg.; *Chenopus pespelicani* (L.); *Flemingia zetlandica* (Montg.); *Galaedinopsis tiberiana* (Coppi).

Balanus spongicola Brown (terghi e scudi).

Milano, Maggio 1928.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 24 Giugno 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci SOMIGLIANA, PEANO, GUIDI, GARELLI e POCHETTINO;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci DE SANCTIS, STAMPINI, EINAUDI, PATETTA, CIAN, PACCHIONI, JANNACCONE, BERTONI e FAGGI, Segretario.

Scusano l'assenza i Soci: RUFFINI, VIDARI, LUZIO, REPOSSI, SOLARI e PANETTI.

Letto e approvato il verbale della seduta precedente, si comunica la lettera ministeriale con cui sono approvate le elezioni, per il triennio 20 aprile 1928 - 19 aprile 1931, del Nobile Prof. Comm. C. F. PARONA a Presidente dell'Accademia;

Prof. Gr. Uff. G. DE SANCTIS a Vice-Presidente;

Prof. Cav. di Gr. Cr. E. STAMPINI a Direttore;

Prof. Comm. A. FAGGI a Segretario della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Il Socio onor. CIAN legge la relazione della Commissione per l'aggiudicamento del premio Gautieri (Letteratura, per il triennio 1923-26).

Digitized by Google

Non essendo fatta nessuna osservazione, l'Accademia sarà convocata nella prossima seduta per la deliberazione del premio.

Su comunicazioni del Socio PATETTA si rinvia qualunque decisione sul premio Pollini, tanto più che la Commissione, per malattia di due membri e assenza del terzo, è ridotta a uno solo.

La seduta è tolta.

Gli Accademici Segretari:
ORESTE MATTIROLO
ADOLFO FAGGI

Digitized by Google

PREMIO DI FONDAZIONE GAUTIERI

Onorevoli Colleghi,

La Commissione, chiamata da Voi a farvi proposte pel conferimento del Premio Gautieri per opere di "letteratura„ pubblicate nel triennio 1923-25, si onora di riferirvi brevemente intorno al lavoro di esame e di giudizio da essa compiuto.

Anzitutto sono state prese in considerazione le seguenti pubblicazioni che dagli Autori erano state inviate pel presente concorso:

1° *Carteggio di Pietro e di Alessandro Verri*, P. 1ª e 2ª del vol. I (1923) a cura di EMANUELE GREPPI e di ALESSANDRO GIULINI. Si osserva che l'opera del concorrente co. Alessandro Giulini, utile senza dubbio, si limita alle sobrie e accurate annotazioni che illustrano il detto volume; è tale, cioè, da doversi considerare più come un saggio di buona erudizione storica, che non di quell'attività letteraria che è richiesta dallo statuto del premio Gautieri.

2° EMILIO RONCATI, *Le voci. Aforismi* (Torino, Bocca, 1923, che è una 2ª ediz. "interamente rifusa„) e *Le illusioni* (Torino, Bocca, 1924). Sono due raccolte di aforismi che rivelano belle attitudini, lungo abito al pensiero filosofico e larga coltura, ma che esulano evidentemente dal campo assegnato al presente concorso.

Eliminati in tal modo questi due concorrenti, la Commissione, dopo avere cercato invano nella produzione letteraria del

Digitized by Google

triennio 1923-25 una pubblicazione che fosse conforme alle condizioni richieste, e s'imponesse fra le altre pel suo eminente valore, ha fermato la propria attenzione sul prof. Ettore Cozzani, uno scrittore nativo di Spezia e da tempo vivente a Milano. Egli, da più di un ventennio — e prima, cioè, e durante e dopo la guerra — con le sole sue forze, coi suoi scarsi mezzi moltiplicati da una volontà tenace e da un ardore d'entusiasmo e di fede pari all'ingegno vivace e alla larga preparazione, è venuto compiendo un'opera encomiabile di seria e geniale propaganda spirituale d'italianità, e nel campo della letteratura e dell'arte e in quello più altamente civile. Questa sua attività che si svolge da tempo copiosa e multiforme, ma con bella continuità e coerenza, sì che è giusto considerarla nel suo complesso, anche nel triennio 1923-25 s'è affermata con pubblicazioni notevoli, così di critica artistica e letteraria, come di prose d'arte e di liriche, nei ricchi quaderni della rivista *L'Eroica*, coi quali il Cozzani, che ne è il fondatore e il direttore, ha contribuito e contribuisce efficacemente a quella rinascita dell'arte silografica, onde a lui furono larghi di consensi, di conforti e di aiuti, oltre il Ministero della P. I., artisti e critici e bibliotecnici, quale il Fumagalli (nelle *Accademie e Biblioteche d'Italia*, a. I, n. 2). Anche del '25 è il suo felice " Profilo „ di *Gualtiero Castellini* (Piacenza, Soc. tipogr. editr. Porta; fa parte dell'Opera nazionale dedicata agli Artefici della Vittoria, Serie *Gli animatori*, n° XXXVIII), in cui rivive la figura del valoroso patriota e del forte scrittore trentino-lombardo. In ogni sua pagina il Cozzani rivela quella sua fervida individualità di artista e di animatore che gli ha procurata buona nominanza fra il miglior pubblico italiano.

Onorevoli Colleghi,

La Commissione, lieta che le sia offerta l'occasione di segnalare un'opera ispirata e nobilmente proseguita in nome della

Digitized by Google

più pura e disinteressata idealità culturale e civile e in degne forme di arte letteraria, vi propone unanime di conferire il premio Gautieri ad Ettore Cozzani, letterato ed artista di bella tempra italiana.

C. F. Parona, *Presidente.*

Ettore Stampini — A. Luzio.

Vittorio Cian, *Relatore.*

Giulio Bertoni, *Segretario.*

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 1° Luglio 1928

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: GUIDI, GRASSI, PANETTI, BOGGIO, PIERANTONI (Socio nazionale non residente);

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: DE SANCTIS, STAMPINI, JANNACCONE e il Segretario FAGGI.

Scusano l'assenza i Soci: RUFFINI, MATTIROLO, PATETTA, CIAN, VIDARI, BERTONI e SACCO.

Il Presidente comunica la morte d'una figlia del Socio prof. SACCO. L'Accademia unisce le sue condoglianze a quelle del Presidente.

Il Socio DE SANCTIS presenta la commemorazione del compianto Socio senatore SCHIAPARELLI, scritta dal prof. BAROCELLI, e aggiunge le seguenti parole, per ricordo dell'illustre estinto:

" Nel presentare a questa R. Accademia la Commemorazione del nostro compianto Socio senatore Ernesto SCHIAPARELLI, redatta dal prof. Piero BAROCELLI, che fu suo discepolo e collaboratore e che ora ne occupa il posto nella direzione del nostro

Digitized by Google

Museo Nazionale di antichità e nella sopraintendenza alle antichità del Piemonte e della Liguria, voglio io stesso ricordare tra voi con brevi parole le benemerenze e il nobile carattere dello Schiaparelli.

" Voi sapete com'egli si dedicò soprattutto allo studio delle antichità egiziane; e come ancor giovane si segnalò tra gli egittologi con la sua edizione del *Libro dei Funerali degli antichi Egizî*. Assunto poi, dopo aver diretto il Museo egizio fiorentino, alla direzione del nostro Museo nazionale di antichità volle che esso tornasse ad essere, come era nel momento delle sue origini, il primo od uno dei primi musei egizi d'Europa. E vi pervenne arricchendolo col cospicuo materiale che riportò dalle sue lunghe e felici campagne di scavo in Egitto. Ma non solo, grazie a lui, il nostro Museo primeggia per ricchezza di materiali, sì anche per sicurezza e modernità di criteri nella classificazione di essi: di che fa testimonianza soprattutto la ricostruzione della tomba dell'architetto Kha, che è decoro del Museo. Intorno poi alle campagne di scavo dello Schiaparelli, basterà qui accennare ai due pregevoli volumi della *Relazione sui lavori della Missione archeologica italiana in Egitto, 1903-1920* (vol. I: *Esplorazione della Valle delle Regine nella necropoli di Tebe*; vol. II: *La tomba intatta dell'ingegnere Kha nella necropoli di Tebe*); volumi che, oltre alla descrizione degli scavi e degli oggetti scoperti, contengono preziose osservazioni intorno alla storia dell'arte e della religione egiziana.

" Non si esauriva peraltro nella filologia e nell'archeologia egiziana l'operosità scientifica dello Schiaparelli. Il nostro Museo archeologico è anche Museo delle antichità regionali. E per questo e per l'ufficio che ebbe di sopraintendente alle antichità del Piemonte e della Liguria e per qualche tempo anche della Lombardia, egli, coscienziosissimo nell'adempimento dei propri doveri, si occupò di scavi e ricerche nell'ambito delle provincie a lui affidate. Sotto la sua sopraintendenza e grazie all'opera sua e de' suoi collaboratori continuò sempre più alacre lo studio delle antichità preistoriche del Piemonte dalla età neolitica alla età della Tène; e i monumenti romani furono studiati e, quando

Digitized by Google

era il caso, sapientemente restaurati. Dei quali restauri citerò quello dell'arco d'Augusto in Aosta, esempio di restauro sobrio quanto accurato. Nè c'è bisogno di ricordare quanto lo Schiaparelli sia benemerito degli studi intorno alla topografia archeologica della regione e quanto abbia promosso, per le regioni IX e XI di Augusto, la raccolta di quei rilievi e di quelle fotografie che debbono servire alla preparazione della *Forma Italiae*.

" Ma la personalità dello Schiaparelli non sarebbe rievocata integralmente dinanzi a voi se io non accennassi alle insigni benemerenze che egli si è acquistato con l'opera assidua, religiosa insieme e patriottica, da lui svolta a pro delle Missioni cattoliche in Oriente coi sussidi della benemerita associazione *Italica gens*. Non vi è centro di qualche importanza nel Mediterraneo orientale dove non siano stati creati o sussidiati a sua cura scuole, ambulatori, ospedali e dove il suo nome non sia ricordato con la gratitudine che si rivolge ai benefattori intelligenti e disinteressati.

" Il Barocelli ricorda nella sua commemorazione un episodio al quale, profondamente commosso, assistei io stesso. Nel recente Convegno per gli studi romani, essendosi nella sezione di antichità, che era in quel giorno presieduta dal nestore degli studiosi di paletnologia italiana, F. von Duhn, accennato all'opera dello Schiaparelli, il presidente invitò tutti i presenti ad alzarsi e, sospendendo momentaneamente i lavori, a raccogliersi per qualche istante nel pensiero dell'illustre estinto. Documento questo della stima profonda che godeva questo nostro Socio, del quale vivrà perenne il ricordo nei nostri cuori non meno che negli atti della nostra Accademia ".

L'Accademia unanime plaude alle parole del Socio De Sanctis e ringrazia il prof. Barocelli. La commemorazione sarà pubblicata negli *Atti* dell'Accademia.

Il tesoriere prof. Panetti presenta per l'approvazione il bilancio 1928, e lo legge e lo commenta nelle voci principali.

Digitized by Google

L'Accademia ringrazia il prof. PANETTI; ma l'approvazione del bilancio è rimandata alla riapertura dell'anno accademico, a Novembre, non potendo aver luogo nell'odierna seduta per mancanza del numero legale.

Per la stessa ragione si rimanda a Novembre la nomina del Tesoriere, e la votazione pel conferimento del premio Gautieri.

Gli Accademici Segretari
ORESTE MATTIROLO
ADOLFO FAGGI.

Digitized by Google

INDICE

DEL VOLUME LXIII

Presidenti della Reale Accademia delle Scienze di Torino dalla sua fondazione . . . . . *Pag.* III

Elenco degli Accademici Nazionali residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 31 dicembre 1927 . . . „ V

Mutazioni avvenute nel Corpo accademico dal 1° gennaio al 31 dicembre 1927 . . . . . „ XX

Premio di fondazione Gautieri . . . . . „ 390

Adunanze:

Sunti degli Atti verbali della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali . . . . . „ 1, 19, 52, 57, 66, 70, 125, 159, 185, 235, 272, 293, 321.

Sunti degli Atti verbali delle Classi Unite . . . . „ 54, 82, 91, 161, 236, 300, 393.

Seduta solenne alla presenza di S. A. R. Emanuele Filiberto Duca d'Aosta . . . . . „ 97

Albenga (Giuseppe). — A proposito di un teorema di Volcovič „ 274

Aliverti (G.) e Rostagni (A.). — Misure di elettricità atmosferica „ 277

Boggio (Tommaso). — Nel 4° anniversario della morte di Corrado Segre . . . . . „ 303

Bortolotti (Enea). — Su una formula di Geometria proiettiva differenziale delle superficie e le sue applicazioni nella Geometria metrica . . . . . „ 161

Cassina (Ugo). — Nuova teoria delle grandezze . . . . „ 145

Cossi (M.). — Alcune esperienze su la riflessione metallica . „ 287

Dainotti (Cecilia). — Determinazione della gravità al polo ed all'equatore mediante coppie di valori osservati a varie latitudini „ 365

Ferrari (Carlo). — Sul problema dell'elica con vento laterale. „ 59

Giua (Michele). — Sulla ossidazione di alcune idrazine terziarie „ 259

Digitized by Google

Guastalla (Guido). — Sull'azione del miscuglio nitrico-solforico sull'etere etilico dell'acido paranitrocinnamico . . . *Pag.* 128
Majorana (Quirino). — Azione della luce su certi tipi di audion „ 358
Nangeroni (G. L.). — Nuovi affioramenti del Pliocene marino nella Val d'Olona . . . . . „ 375
Negri (Giovanni). — Il componente atlantico della Flora piemontese „ 31
Odone (Filippo). — Trattazione vettoriale di alcune proprietà delle vibrazioni luminose . . . . . „ 71
Panetti (Modesto). — Relazione della Commissione per il 24° Premio Bressa (quadriennio 1921-24) . . . . . „ 85
Parona (C. F.). — Il Pliocene marino nel sottosuolo della pianura presso Novara . . . . . „ 218
Pensa (Angelo). — Geodetiche delle rigate sviluppabili generiche e delle superficie coniche. . . . . „ 171
Pochettino (Alfredo). — Commemorazione di Andrea Naccari . „ 24
Ponzio (G.) e Milone (M.). — Ricerche chimico-fisiche sui perossidi „ 335
Repossi (Emilio). — Commemorazioni di Gustavo Tschermak, Paolo von Groth, Ettore Artini . . . . . „ 187
— Osservazioni mineralogiche sopra alcune sabbie del sottosuolo della pianura presso Novara. . . . . „ 223
Sacco (Federico). — Il Diluvio-glaciale nell'alta Valle del Sangro (Abruzzi). . . . . „ 133
— Impronte e figure fossili di pressione . . . . . „ 193
Semeria (G. B.) e Milone (M.). — Sulla riduzione catalitica del nitrobenzene in anilina nella fase gassosa . . . . . „ 7
— e Somigliana (B.). — Cinetica della formazione delle diossime „ 325
Specchia (O.). — Sopra l'applicazione delle lamine prismatiche di Fabry e Perot nella misura dell'indice di rifrazione dei liquidi „ 253
Vacca (Giovanni). — Sul principio della *discesa* di Fermat e sulle dimostrazioni dell'esistenza degli irrazionali quadratici . „ 241
Vetter (Quido). — Nota alla risoluzione dell'equazione cubica di Leonardo Pisano . . . . . „ 296
Vocca (Paolo). — Apparecchio per dividere automaticamente la circonferenza in qualunque numero di parti uguali . . . „ 265
Zoia (Raffaello). — Influenza della macrostruttura e della velocità di prova sulla formazione della coppella nella rottura delle barre di ferro omogeneo e di acciaio . . . . . „ 3
— Sulla distribuzione delle tensioni interne nella zona di massima contrazione di una provetta di acciaio a sezione circolare sperimentata a trazione . . . . . „ 349
Vidari (Giovanni). — Emanuele Filiberto . . . . . „ 99

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME SESSANTAQUATTRESIMO

1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

Torino — Tipografia Vincenzo Bona.

Digitized by Google

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

al 31 Dicembre 1928

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIV, DISP. 1ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

DISTRIBUZIONE DELLE ADUNANZE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1928-929

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1928 - 18 novembre	1928 - 25 novembre
» - 2 dicembre	» - 9 dicembre
» - 16 »	» - 23 »
» - 30 »	1929 - 6 gennaio
1929 - 13 gennaio	» - 20 »
» - 27 »	» - 3 febbraio
» - 10 febbraio	» - 17 »
» - 24 »	» - 3 marzo
» - 10 marzo	» - 17 »
» - 24 »	» - 7 aprile
» - 14 aprile	» - 28 »
» - 5 maggio	» - 12 maggio
» - 19 »	» - 26 »
» - 9 giugno	» - 16 giugno
» - 23 »	» - 30 »

Digitized by Google

PRESIDENTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

dalla sua fondazione

ELEZIONE	PRESIDENTI PERPETUI (*)
1783, 25 luglio	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Giuseppe Angelo). Offrì le dimissioni dalla carica e furono accettate (7 settembre 1788) conferendogli il titolo di *Presidente emerito.*
» »	**La Grange Tournier** (Giuseppe Luigi), *Onorario.*
1788, 30 novembre	**Morozzo di Bianzé** (conte Carlo Lodovico).
1801, 24 gennaio (4 piovoso a. IX)	**Saluzzo** (cittad. Angelo Giuseppe) ex-conte di Monesiglio.
1801, 15 febbraio	Col Regolamento del 26 piovoso anno IX (15 febbr. 1801) essendosi stabilito che l'Accademia Nazionale rinnovata col *Decreto della Commissione esecutiva del Piemonte* del 22 nevoso anno IX (17 gennaio 1801) non avesse più che due presidenti di classe, cessarono queste funzioni del Saluzzo.
1804, 25 febbraio (5 ventoso a. XII)	**Bonaparte** (Napoleone) primo console della Repubblica Francese, *Onorario.*
1815, 25 novembre	**Balbo di Vinadio** (conte Prospero).
1837, 26 »	**Lascaris di Ventimiglia** (marchese Agostino).
1838, 18 »	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Alessandro).
1851, 18 dicembre	**Plana** (barone Giovanni).
1864, 1° maggio	**Sclopis di Salerano** (conte Federigo).

(*) Dal volume *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783-1883).* Torino, 1883, pag. 141.

Digitized by Google

ELEZIONE	PRESIDENTI TRIENNALI (*)
1879, 9 marzo	**Ricotti** (Ercole).
1882, 12 febbraio	**Ricotti** (Ercole) rieletto.
1883, 6 maggio	**Fabretti** (Ariodante).
1885, 12 aprile	**Genocchi** (Angelo).
1888, 8 „	**Genocchi** (Angelo) rieletto.
1889, 28 „	**Lessona** (Michele) termina il 2° triennio iniziato dal GENOCCHI.
1891, 24 maggio	**Lessona** (Michele).
1894, 24 giugno	**Lessona** (Michele) rieletto, † 20 luglio 1894.
1895, 13 gennaio	**Carle** (Giuseppe).
1898, 9 „	**Carle** (Giuseppe) rieletto.
1901, 13 „	**Cossa** (Alfonso) † 23 ottobre 1902.
1902, 14 dicembre	**D'Ovidio** (Enrico) termina il triennio iniziato dal COSSA.
1904, 21 febbraio	**D'Ovidio** (Enrico).
1907, 17 marzo	**D'Ovidio** (Enrico) rieletto.
1910, 24 aprile	**Boselli** (Paolo).
1913, 18 maggio	**Boselli** (Paolo) rieletto.
1916, 28 „	**Camerano** (Lorenzo) † 22 novembre 1917.
1918, 3 febbraio	**Naccari** (Andrea) continua il triennio iniziato dal CAMERANO.
1919, 27 aprile	**Naccari** (Andrea) † 2 ottobre 1926.
1922, 7 maggio	**Ruffini** (Francesco).
1925, 3 „	**Ruffini** (Francesco) rieletto.
1928, 22 aprile	**Parona** (C. Fabrizio)

(*) A norma dell'art. 3 dello *Statuto della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, approvato con R. Decreto 2 febbraio 1882, il Presidente dura in carica un triennio e può essere rieletto per un altro triennio.

Digitized by Google

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1928

NB. — *Negli elenchi degli Accademici la prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), Professore stabile di Geologia nella R. Università di Torino, già Rettore della R. Università. Comm. ✻ e ⊞. — *Torino, Via Bonafous, 5.*

Eletto alla carica il 22 aprile 1923 per il triennio dal 20 aprile 1928 al 19 aprile 1931 (R. D. 14 giugno 1928).

VICE-PRESIDENTE

De Sanctis (Gaetano), Professore stabile di Storia antica nella R. Università di Torino, Presidente della Unione Accademica Internazionale, ✻, Gr. Uff. ⊞, Cav. Gr. Cr. del S. M. O. del Santo Sepolcro. — *Torino, Corso Vittorio Em., 44.*

Eletto alla carica il 22 aprile 1928 per il triennio dal 20 aprile 1928 al 19 aprile 1931 (R. D. 14 giugno 1928).

TESORIERE

Panetti (Modesto), Professore stabile di meccanica applicata alle macchine e di Costruzioni Aeronautiche nel R. Politecnico di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻ e ⊞. — *Corso Peschiera, 30.*

Riel. alla carica il 25 novembre 1928 per il triennio dal 1° luglio 1928 al 30 giugno 1931 (R. D. 1928).

Digitized by Google

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Grassi (Guido), Professore emerito di Elettrotecnica nella R. Scuola d'ingegneria di Torino, Uff. ✱, Comm. ⊞. — *Torino, Via Ettore De Sonnaz, 7.*
Eletto alla carica il 17 giugno 1928 per il triennio dall'11 giugno 1928 al 10 giugno 1931 (R. D. 6 settembre 1928).

Segretario

Repossi (Emilio), Professore stabile di Mineralogia nella R. Università di Torino. — *Torino, Via Cibrario, 61.*
Eletto alla carica il 17 giugno 1928 per il triennio dall'11 giugno 1928 al 10 giugno 1931 (R. D. 6 settembre 1928).

ACCADEMICI RESIDENTI

S. A. R. il Principe Luigi Amedeo di **Savoia**, Duca degli Abruzzi. — *Torino, Via Maria Vittoria, 12.*
6 marzo 1927 - 7 aprile 1927.

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Professore emerito di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✱ e ⊞. — *Torino, Corso Peschiera, 30.*
29 dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Peano (Giuseppe), Professore stabile di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, ✱ e Comm. ⊞ — *Torino, Via Barbaroux, 4.*
25 gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Guidi (Camillo), Professore stabile di Statica grafica e Scienza delle costruzioni, Uff. ✱, Gr. Uff. ⊞. — *Roma, Viale delle Milizie, 16.*
31 maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), *predetto.*
15 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Digitized by Google

Mattirolo (Oreste), Professore stabile di Botanica nella R. Università di Torino, ✱ e Gr. Uff. ⊛, Uff. del Merito agricolo di Francia. — *Torino, Orto Botanico (al Valentino).*

10 marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), *predetto.*

9 febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Professore stabile di Fisica matematica nella R. Università di Torino, Preside della Facoltà di Scienze, ✱ e Comm. ⊛, — *Corso Vinzaglio, 75.*

5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Panetti (Modesto), *predetto.*

24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 27 aprile 1919.

Ponzio (Giacomo), Professore stabile di Chimica generale nella R. Università di Torino, ⊛. — *Torino, Corso Massimo d'Azeglio, 48.*

10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 28 ottobre 1923.

Sacco (Federico), Prof. stabile di Geologia applicata nella R. Scuola d'Ingegneria, Gr. Uff. ⊛. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele II, 18.*

10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 19 maggio 1924.

Majorana (Quirino), Professore stabile di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna, Comm. ✱ e ⊛. — *Bologna, Via Irnerio, 46.*

10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 1° marzo 1925.

Herlitzka (Amedeo), Professore stabile di Fisiologia nella R. Università di Torino, ⊛. — *Torino, Via Pietro Toselli, 1.*

25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Pochettino (Alfredo), Prof stabile di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, ✱ e ⊛. — *Torino, Via Giuria, 1.*

25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Boggio (Tommaso), Prof. stabile di Meccanica superiore nella R. Università di Torino, ✱, Comm. ⊛, Lauréat de l'Académie des sciences de Paris. — *Torino, Via Ottavio Revel, 5.*

17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Garelli (Felice), Prof. di Chimica tecnologica e Direttore della R. Scuola d'ingegneria di Torino, Comm. ⊛. — *Torino, Corso Duca di Genova, 1.*

17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Repossi (Emilio), *predetto.*

22 marzo 1925 - 7 maggio 1925.

Vallauri (G. Carlo), Professore stabile di Elettrotecnica nella R. Scuola d'Ingegneria di Torino.

. . . . . .

Digitized by Google

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Professore stabile di Fisica matematica nella R. Univ. di Roma, ☼, ✱, Gr. Cord. ⊞, Croce di Guerra. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895.

Bertini (Eugenio), Professore emerito della R. Università di Pisa, Uff. ✱, Comm. ⊞. — *Pisa, Lungarno Mediceo, 7.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Pirotta (Pietro Romualdo), già Professore stabile di Fisiologia vegetale nella Università di Roma, ☼. Gr. Uff. ⊞. — *Roma, Via Torfiorenza, 36.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Rosa (Daniele), Professore stabile di Zoologia ed Anatomia comparata nella R. Università di Modena, ⊞. — *Modena, R. Università.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Zamboulni (Ferruccio), Professore stabile di Chimica generale nella R. Università di Napoli. — *Napoli, Via Mezzocannone A.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Levi-Civita (Tullio), Professore stabile di Meccanica razionale nella R. Università di Roma, ☼. — *Roma, Via Sardegna, 50.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Cantone (Michele), Professore stabile di Fisica sperimentale nella R. Università di Napoli, ☼, Comm. ⊞. — *Napoli, Via Duomo, 305.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Pierantoni (Umberto), Professore stabile di Zoologia nella R. Università di Napoli. — *Napoli, Galleria Umberto I, 27.*
17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Digitized by Google

ACCADEMICI STRANIERI

Thomson (John Joseph), Professore nella Università di Cambridge. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Rutherford (Sir Ernesto), Professore di Fisica sperimentale nell'Università di Cambridge.
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Hale (Giorgio), Astronomo. — *Pasadena, Mount Wilson Observatory (California).*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Picard (Emilio), Segretario perpetuo per le Scienze matematiche dell'Accademia delle Scienze di Parigi. — *Parigi (6), Quai Conti, 25.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Michelson (Alberto), Professore di Fisica nell'Università di Chicago. — *Chicago, Kimbark Avenue, 5756.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

De Vries (Ugo), della R. Università di Amsterdam.

. . . . . .

Termier (Pierre), Professore di Geologia all'École des Mines.

. . . . . .

Karman (Theodor von), della Università di Aachen.

. . . . . .

Digitized by Google

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 aprile 1898.
Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 giugno 1903.
Enriques (Federico), Prof. nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.
Bertolari (Luigi), Professore nella R. Università di Pavia. — 24 febbr. 1918.
Marcolongo (Roberto), Professore nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Pincherle (Salvatore), Professore nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Severi (Francesco), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Appell (Paul Émile), Professore di Meccanica analitica alla Sorbona, Parigi. — 11 giugno 1922.
Borel (Émile), Professore di Calcolo delle probabilità e di fisica matematica, Parigi. — Id. id.
Loria (Gino), Professore di Geometria superiore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Study (Eduard), Professore di Matematiche nell'Università di Bonn. — Id. id.
Tonelli (Leonida), Professore di Analisi algebrica nella R. Università di Bologna. — 27 maggio 1928.
Vitali (Giuseppe), Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Padova. — Id. id.
Signorini (Antonio), Professore di Fisica matematica nella R. Università di Napoli. — Id. id.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di Edinburg. — 27 maggio 1894.
Boussinesq (Valentino), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nella Università di Parigi. — 15 maggio 1910.
Albenga (Giuseppe), Professore nella R. Università di Torino. — 24 febbraio 1918.
Colonnetti (Gustavo), Professore nel R. Politecnico di Torino. — Id. id.
Maggi (Gian Antonio), Professore nella R. Università di Milano. — Id. id.

Digitized by Google

Mesnager (Agostino). Professore nella Scuola Nazionale dei Ponti e Strade, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 29 dicembre 1918.

Fantoli (Gaudenzio), Professore di Idraulica nel R. Istituto tecnico superiore di Milano. — 11 giugno 1922.

Planck (Max), Professore di Fisica matematica nell'Università di Berlino. — 11 giugno 1922.

Prandtl (Ludwig), Professore di Meccanica applicata nell'Università di Gottinga. — Id. id.

Pistolesi (Enrico), Professore di Meccanica applicata alle macchine nella R. Scuola d'Ingegneria di Pisa. — 27 maggio 1928.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Garbasso (Antonio), Professore nella R. Università di Firenze. — 15 maggio 1910.

Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.

Corbino (Orso Mario). Professore nella R. Università di Roma. — 24 febbraio 1918.

Lombardi (Luigi), Professore nella R. Scuola degli Ingegneri di Roma. — Id. id.

Marconi (Guglielmo), Senatore del Regno, Dottore in scienze, Londra. — Id. id.

Palazzo (Luigi), Direttore del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, Roma. — Id. id.

Rizzo (Giovanni Batt.), Professore di Fisica terrestre nella R. Università di Napoli. — 11 giugno 1922.

Bragg (W. H.), Professore di Fisica nel Collegio Universitario di Londra. — Id. id.

Perrin (Jean), Professore di Chimica-fisica alla Sorbona, Parigi. — Id. id.

Laue (Max von), Professore di Fisica teoretica nell'Università di Berlino. — Id. id.

Amerio (Alessandro), Professore di Fisica sperimentale nel Politecnico di Milano. — Id. id.

Lori (Ferdinando), Professore di Elettrotecnica nella R. Scuola di Ingegneria di Padova. — 27 maggio 1928.

Fermi (Enrico), Professore di Fisica teoretica nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 gennaio 1881.

Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 marzo 1905.

Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.

Digitized by Google

Angeli (Angelo), Professore nella R. Università di Firenze. — 24 febbraio 1918.

Le Chatelier (Enrico Luigi), dell'Istituto di Francia, Parigi. — Id. id.

Nasini (Raffaele), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Bruni (Giuseppe), R. Politecnico di Milano. — 15 giugno 1919.

Blanc (Gian Alberto), Professore di Geochimica nella R. Università di Roma. — 27 maggio 1928.

Parravano (Nicola), Professore di Chimica inorganica nella R. Università di Roma. — Id. id.

Pellizzari (Guido), Professore di Chimica farmaceutica nella R. Università di Firenze. — Id. id.

Rolla (Luigi), Professore di Chimica inorganica nella R. Università di Firenze. — Id. id.

Betti (Mario), Professore di Chimica generale nella R. Cniversità di Bologna. — Id. id.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 marzo 1905.

Suess (Franc. Edoardo), Professore nella "Deutsche Technische Hochschule" di Praga. - Landesgerichtsstrasse 12, Vienna 1. — Id. id.

Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.

Dal Piaz (Giorgio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Day (Arturo L.), Direttore del Laboratorio geo-fisico dell'Istituzione Carnegie, Washington, D. C. — 11 giugno 1922.

Washington (Enrico Stefano), Laboratorio geo-fisico di Washington. — Id. id.

Franchi (Secondo), Ingegnere, Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.

Gortani (Michele), Professore di Geologia nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Novarese (Vittorio), Ingegnere, Professore; Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.

Rovereto (Gaetano), Professore di Geologia nella R. Università di Genova. — 27 maggio 1928.

Fabiani (Ramiro), Professore di Geologia nella R. Università di Palermo. Id. id.

Millosevich (Federico), Professore di Mineralogia nella R. Università di Roma. — Id. id.

Karpinsky (Alessandro), Presidente dell'Accademia delle Scienze V. R. SS. Leningrado. — Id. id.

Colomba (Luigi), Professore di Mineralogia nella R. Università di Genova. — Id. id.

Digitized by Google

Boeris (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Douvillé (Henry), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.

Depéret (Charles), Professore di Geologia nella Università di Lione. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.

Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.

Mangin (Luigi), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.

Bower (Federico Orpen), Professore nella Università di Glasgow. — 24 febbraio 1918.

Chodat (Roberto), Professore di Botanica nell'Università di Ginevra. — 25 giugno 1922.

Longo (Biagio), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Pisa. — Id. id.

Gola (Giuseppe), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Padova. — Id. id.

Bois (Desiderato), Professore nel Museo di storia naturale di Parigi. — Id id.

Negri (Giovanni), Professore di Botanica nella R. Università di Firenze. — 27 maggio 1928.

Forti (Achille), *via S.ta Eufemia, 1*, Verona. — Id. id.

Perrot (Émile), Professore e Direttore della Scuola Superiore di Farmacia, *Avenue de l'Observatoire, 4*, Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Boulenger (Giorgio Alberto), Giardino botanico dello Stato, Bruxelles. — 28 gennaio 1900.

Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 giugno 1903.

Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — 5 marzo 1905.

Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell'Università di Madrid. — 15 maggio 1910.

Albertoni (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella Università di Bologna. — 24 febbr. 1918.

Bovero (Alfonso), Professore alla Facoltà di Medicina, S. Paolo del Brasile. — Id. id.

Chiarugi (Giulio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di Perfezionamento di Firenze. — Id. id.

Vialleton (L.), Professore di Anatomia microscopica, Montpellier. — Id. id.

Digitized by Google

Bottazzi (Filippo), Professore di Fisiologia sperimentale nella R. Università di Napoli. — 11 giugno 1922.

Cesaris-Demel (Antonio), Professore di Anatomia patologica nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Gley (E.), Prof. di Biologia generale nel *Collège de France*, Paris. — Id. id.

Richet (Charles), Professore di Fisiologia nell'Università di Parigi. — Id. id.

Sherrington (Ch. S.), Professore di Fisiologia nell'Università di Oxford. — Id. id.

Gallardo (Angel), Professore di Zoologia nella Universitad Nacional di Buenos Ayres. — 27 maggio 1928.

Houssay (Bernardo), Professore di Fisiologia della Medicina nella Universitad Nacional di Buenos Ayres. — Id. id.

Lippschütz (Alejandro), Professore di Fisiologia nella Università di Concepcion (Chile). — Id. id.

Digitized by Google

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Stampini (Ettore), Professore stabile di Letteratura latina nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✱ e Gran Croce e Gran Cordone ⊞. — *Piazza Vittorio Veneto, 10.*

Eletto alla carica il 22 aprile 1928 per il triennio dal 20 aprile 1928 al 19 aprile 1931 (R. D. 14 giugno 1928).

Segretario.

Faggi (Adolfo), Professore stabile di Storia della filosofia nella R. Università di Torino, Comm. ⊞. — *Torino, Via Vassalli Eandi, 3.*

Eletto alla carica il 22 aprile 1928 per il triennio 20 aprile 1928 al 19 aprile 1931 (R. D. 14 giugno 1928).

ACCADEMICI RESIDENTI

Boselli (S. E. Paolo), Senatore del Regno, Socio effettivo dei Lincei, Primo Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano, ecc., Cav. Ordine Supr. SS. Annunziata, ⊙, Gr. Cord. ✱ e ⊞. — *Torino, Piazza Maria Teresa, 3.*

15 gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*

21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), Senatore del Regno, Professore stabile di Diritto ecclesiastico nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Grand'Uff. ✱ e ⊞. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), *predetto.*

20 maggio 1906 - 7 giugno 1906. — Pensionato 24 gennaio 1915.

Brondi (Vittorio), Senatore del Regno, Professore stabile di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore della P. I., Gr. Uff. ✱ e ⊞. — *Torino, Via Montebello, 26.*

17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907. — Pensionato 4 febbraio 1917.

Digitized by Google

Einaudi (Luigi), Senatore del Regno, Professore stabile di Scienza delle finanze e Diritto finanziario nella R. Università di Torino, Comm. ☞. — *Torino, Via La Marmora, 60.*

10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato 13 dicembre 1917.

Patetta (Federico), Professore stabile di Storia del Diritto italiano nella R. Università di Torino, ✱, Comm. ☞. — *Via S. Massimo, 44.*

3 maggio 1914 - 11 giugno 1914. — Pensionato 27 ottobre 1918.

Vidari (Giovanni), Professore stabile di Pedagogia nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✱ e ☞. — *Torino, Via Valeggio, 15.*

31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 23 febbraio 1920.

Cian (Vittorio), Professore stabile di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Comm. ☞. — *Piazza Statuto, 4.*

20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 2 ottobre 1922.

Pacchioni (Giovanni), Professore stabile di Diritto civile nella R. Università di Milano, ☞. — *Milano* (33). *Via Fratelli Bronzetti, 28.*

20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 7 ottobre 1923.

Faggi (Adolfo), *predetto.*

18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920. — Pensionato, 3 ottobre 1926.

Luzio (Alessandro), Sovrintendente del R. Archivio di Stato di Torino, ✱, Comm. ☞. — *Via Principe Tommaso, 4.*

18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920. — Pensionato 15 febbraio 1928.

Mosca (Gaetano), Senatore del Regno, Professore stabile di Storia delle istituzioni e delle dottrine politiche nella R. Università di Roma, Comm. ✱, Gr. Uff. ☞. — *Roma (36), Via Piero Antonio Micheli, 18.*

18 gennaio 1920 — 12 febbraio 1920.

Jannaccone (Pasquale), Professore stabile di Statistica nella R. Università di Torino, Comm. ☞. — *Torino, Via Principe Tommaso, 39.*

28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

Solari (Gioele), Professore stabile di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino. — *Torino, Via Maria Vittoria, 3.*

23 dicembre 1923 - 24 gennaio 1924.

Bertoni (Giulio), Professore stabile di Filologia romanza, Comm. ☞. — *Roma, R. Università.*

31 gennaio 1926 - 21 febbraio 1926.

Rondolino (Ferdinando), Dottore di leggi. — *Torino, Via Bogino, 16.*

31 gennaio 1926 - 21 febbraio 1926.

Digitized by Google

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Professore stabile di Diritto romano nella R. Università di Roma, ✠, Gr. Cr. ✱ e ▭. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Senatore del Regno, Professore emerito di Lingue e Letterature neo-latine nella R. Università di Firenze, ✠, Gr. Uff. ✱ e ▭. — *Firenze (22), Piazza d'Azeglio, 13.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Guidi (Ignazio), Senatore del Regno, Professore emerito di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, ✠, Uff. ✱, Gr. Uff. ▭, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Sabbadini (Remigio), Professore emerito di Lingua e Letteratura latina nella R. Università di Milano, Comm. ▭. — *Pisa, Via Fibonacci, 19.*
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Salandra (S. E. Antonio), Deputato al Parlamento, Professore stabile di Diritto amministrativo nella R. Università di Roma, Socio straniero dell'Istituto di Francia, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di scienze morali e politiche e dell'Accademia Pontaniana di Napoli. Cavaliere dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, ✠, Gr. Cr. ✱ e ▭, ecc. — *Roma, Via Girolamo Fracastoro, 7.*
22 dicembre 1918 - 12 gennaio 1919.

Fedele S. E. Pietro), Senatore del Regno, Prof. stabile di Storia moderna nella Università di Roma, Uff. ✱ e Gran Cordone ▭. — *Roma (102), Via C. Linneo, 38.* — 6 maggio 1928...

Digitized by Google

ACCADEMICI STRANIERI

Nolhac (Pietro de), Professore nell'École pratique des Hautes Études di Parigi.
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Hauvette (Enrico), Professore di Lingua e Letteratura italiana alla Sorbona, Parigi.
28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nella Scuola Politecnica di Parigi. — 15 marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Senatore del Regno, Professore emerito della R. Università di Napoli. — Id. id.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.
Gentile (Giovanni), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 maggio 1914.
Martinetti (Pietro), Prof. nella R. Università di Milano. — Id. id.
Bergson (Enrico Luigi), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.
Varisco (Bernardino), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Brandileone (Francesco), Professore nella R. Università di Roma. — 10 giugno 1906.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Montalcini (Camillo), Prof., Segretario generale degli uffizi amministrativi della Camera dei Deputati. — 17 maggio 1914.

Digitized by Google

Ranelletti (Oreste), Professore nella R. Univ. di Milano. — 23 giugno 1918.
Romano (Santi), Primo Presidente del Consiglio di Stato. — *Roma, Palazzo Spada.* — 28 maggio 1922.
Sella (Emanuele). Professore di Economia politica nella R. Università di Genova. — Id. id.
Dallari (Gino), Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Scienze Storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 marzo 1886.
Venturi (Adolfo), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 31 maggio 1908.
Meyer (Edoardo), Prof. nell'Università di Berlino. — 17 maggio 1914.
Lippi (Silvio), Direttore dell'Archivio di Stato di Cagliari. — Id. id.
Pareti (Luigi), Professore di Storia antica nella R. Università di Firenze. — 28 maggio 1922.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Orsi (Paolo), Dirett. del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Halbherr (Federico), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Marucchi (Orazio), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Paribeni (Roberto), Direttore del Museo Nazionale Romano (delle Terme). — Id. id.
Breccia (Evaristo), Direttore del Museo Greco-Romano di Alessandria di Egitto. — 28 maggio 1922.

Sezione di Geografia.

Bertacchi (Cosimo), Prof. nella R. Università di Torino. — 31 maggio 1908.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Nallino (Carlo Alfonso), Professore nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Vacca (Giovanni), Professore di Storia e Geografia dell'Asia orientale nella R. Università di Roma — 28 maggio 1922.
Levi Della Vida (Samuele Giorgio), Professore di Lingue semitiche nella R. Università di Roma. — Id. id.

Digitized by Google

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio alle Querce in Firenze. — Id. id.
Vitelli (Gerolamo), Senatore del Regno, Professore emerito nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.
Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Università di Milano. — 26 febbraio 1911.
Rostagno (Enrico), Bibliotecario della Mediceo-Laurenziana di Firenze. — 23 giugno 1918.
Barbi (Michele), Professore nel R. Istituto super. di magist. di Firenze (Taviano Pistoiese). — Id. id.
Galletti (Alfredo), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Scherillo (Michele), Senatore del Regno, Professore di Letteratura italiana presso la Università di Milano. — 28 maggio 1922.
Bassi (Domenico), Direttore dell'officina dei Papiri presso la Biblioteca nazionale di Napoli. — 28 maggio 1922.
Sanesi (Ireneo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Romagnoli (Ettore), Professore di Letteratura greca nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Bignone (Ettore), Professore di Letteratura greca nella R. Università di Palermo. — Id.

Digitized by Google

Mutazioni avvenute nel Corpo Accademico

dal 1° gennaio al 31 dicembre 1928

ELEZIONI

Parona (Carlo Fabrizio), eletto Presidente nell'Adunanza delle Classi Unite del 22 aprile 1928. — Approvata l'elezione con R. D. 14 giugno 1928.

De Sanctis (Gaetano), eletto Vice-Presidente. — Id. id.

Stampini (Ettore), eletto Direttore della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. — Id. id.

Faggi (Adolfo), eletto Segretario della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. — Id. id.

Fedele (Pietro), eletto Accademico nazionale non residente nell'Adunanza del 6 maggio 1928, della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche ed approvata l'elezione con R. D....

Giacosa (Piero) . . .
Vallauri (G. C. . . .
Eletti Accademici nazionali residenti nell'Adunanza del 27 maggio 1928, della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, ed approvata l'elezione con R. D....

De Vries (Hugo) . . .
Termier (Pierre) . .
Karman von (Teodoro)
Eletti Accademici stranieri nell'Adunanza del 27 maggio 1928, della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, ed approvata l'elezione con R. D....

Grassi (Guido), eletto Direttore della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, nell'Adunanza a Classi Unite del 17 giugno 1928. — R. D. 6 settembre 1928.

Repossi (Emilio), eletto Segretario della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, id., id.

ELETTI SOCI CORRISPONDENTI

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali nell'Adunanza del 27 maggio 1928.

Tonelli Leonida.
Vitali Giuseppe.
Signorini Antonio.
Pistolesi Enrico.
Blanc G. A.
Parravano Nicola.
Pellizzari Guido.
Rolla Luigi.

Digitized by Google

Betti Mario.
Rovereto Gaetano.
Fabiani Ramiro.
Millosevich Federico.
Karpinski Alessandro.
Colomba Luigi.
Boeris Giovanni.
Douvillé Henry.
Depéret Charles.
Negri Giovanni.
Forti Achille.
Perrot Émile.
Lori Ferdinando.
Fermi Enrico.
Gallardo Angel.
Houssay Bernardo.
Lippschütz Alejandro.

MORTI

2 dicembre 1927.

Groth (Paolo Emilio), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche.

4 febbraio 1928.

Lorentz (Enrico), Socio straniero della Classe di Scienze fisiche.

14 febbraio 1928.

Schiaparelli (Ernesto), Accademico residente della Classe di Scienze morali.

7 marzo 1928.

Artini (Ettore), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche.

27 aprile 1928.

Brugnatelli (Luigi), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche.

5 giugno 1928.

Blanchi (Luigi), Accademico nazionale non residente della Classe di Scienze fisiche.

18 agosto 1928.

Prato (Giuseppe), Accademico nazionale residente della Classe di Scienze morali.

17 ottobre 1928.

Giacosa (Piero), Accademico nazionale residente della Classe di Scienze fisiche.

20 ottobre 1928.

Piutti (Arnaldo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 18 Novembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli e il Segretario Repossi.

Il Presidente apre l'adunanza commemorando brevemente il Socio Prof. Giuseppe Prato, valoroso economista e storico, che fu per sei anni tesoriere della nostra Accademia, morto nello scorso agosto. Ricorda pure brevemente l'illustre Prof. Piero Giacosa, proposto a Socio della Classe di Scienze Fisiche fin dal maggio di quest'anno e morto nell'ottobre. Della commemorazione di entrambi saranno incaricati due Soci delle rispettive classi.

Il Socio Panetti, già condiscepolo del compianto Prof. Prato, si associa con commosse parole alla commemorazione del Presidente.

Il Presidente comunica la notizia della morte del Professore A. Piutti, stabile di Chimica organica nella R. Università di Napoli, nostro Socio corrispondente; ed il Prof. Garelli ricorda ch'Egli ha studiato a Torino, fu assistente del Guareschi e poi dello Schiff, a Firenze; ebbe la cattedra a Sassari e poi

Digitized by Google

a Napoli. Ricorda pure ch'Egli è noto per interessanti ricerche sull'asparagina e su altri capitoli importanti della Chimica organica. Studiò i fenomeni della radio-attività ed i gas nobili nelle rocce italiane e nei gas del Vesuvio. Lascia lavori importanti anche nel campo della Chimica tossicologica, e durante la guerra e dopo cooperò all'impiego della cloropicrina come aggressivo ed alla sua fabbricazione. Era un lavoratore instancabile ed un accurato sperimentatore.

Il Presidente comunica quindi di aver rappresentato l'Accademia alla solenne riunione in cui fu festeggiato recentemente il nostro illustre Socio Guidi in occasione del suo collocamento a riposo per limiti d'età.

Il Presidente annuncia che durante le ferie estive è giunta la conferma Reale della nomina del Segretario della Classe, mentre non ancora giunsero le conferme dei nuovi proposti quali Soci nazionali residenti e non residenti e quali Soci stranieri.

Il Socio Pochettino presenta in seguito in omaggio il ricco volume degli *Studi pubblicati* dalla Università di Torino nel IV Centenario della nascita di Emanuele Filiberto.

Il Socio Garelli presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Prof. L. Mascarelli, dal titolo: *Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati (e dei dinaftili, ecc.). Considerazioni sul grande numero di antipodi ossici privi di atomi asimmetrici, che ne possono derivare,* e la commenta brevemente.

Il Socio Sacco presenta una sua Nota dal titolo: *Nuovi dati di fatto riguardo l'età degli argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino.*

Il Socio Somigliana presenta una propria Nota: *Sulla misura della terra e la gravimetria* e la illustra con brevi parole.

Il Presidente infine presenta, a nome del Socio Guidi, una Nota dell'Ing. R. Zoja, dal titolo: *Nuovo procedimento per studiare le variazioni della resistenza all'urto su barrette intagliate dovute al fenomeno dell'invecchiamento.*

Digitized by Google

Il Socio Panetti, accennando alla desiderata ripresa della pubblicazione delle *Memorie* dell'Accademia, propone che una parte almeno di queste sia destinata a lavori fatti dai Soci su temi generali proposti dalla Classe.

Il Socio D'Ovidio si associa alla proposta Panetti, esprimendo l'avviso che al Direttore di Classe, in accordo coi colleghi, spetti la scelta dei temi e la distribuzione del lavoro.

Sono state inviate in omaggio alla Classe le seguenti opere:

1) G. Schaeffer, G. Fontès, E. Le Breton, C. Oberling, L. Thivolle: *Recherches physiologiques sur les levains minéraux à base d'alun*;

2) P. Alfonso Wenger: *A experiencia de Michelson*;

3) T. Tommasina: *La physique de la gravitation et la dynamique de l'univers*;

4) E. Ciani: *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici*;

5) A. Forti: Opuscoli vari.

Digitized by Google

LETTURE

Sulla misura della Terra e la gravimetria.

Nota del Socio C. SOMIGLIANA

In una recente pubblicazione il prof. C. Mineo (1) si occupa dell'applicabilità dei metodi gravimetrici alla determinazione della forma e delle dimensioni della Terra, e si propone di dimostrarne la inferiorità, o senz'altro la inapplicabilità, dal punto di vista della precisione raggiungibile, rispetto ai metodi diretti geometrici.

Effettivamente è cosa naturale, in via generica, che i metodi diretti siano preferibili agli indiretti, e che quindi anche in questo caso colle misure di gravità meno facilmente si possa arrivare allo scopo, che non misurando archi sulla superficie terrestre. Soltanto i metodi indiretti possono talvolta essere più comodi, o meno costosi, e quindi degni per altro verso di considerazione.

Senonchè, nel calore della dimostrazione, l'autore dello scritto in parola lancia qualche colpo, non meritato, contro la parte teorica ed anche storica della quistione. Sicchè ritengo sia utile rimettere le cose nella luce che mi sembra essere la più giusta ed al posto che appare il più conveniente. E sono d'altra parte lieto dell'occasione che mi si presenta per un chiarimento generale di tutta la quistione.

Il prof. Mineo, a pag. 5 del suo lavoro, scrive: ...*quando si dice che le misure di gravità non possono portare che alla determinazione della forma dell'ellissoide terrestre e non mai alla*

(1) C. Mineo, *Forma e grandezza della Terra e misure di gravità*, "Atti della R. Accad. di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo „, vol. XV, 1928.

Digitized by Google

determinazione delle sue dimensioni assolute, in pratica s'intende dire un'altra cosa.

Poichè i valori di g devono essere misurati e le misure vanno soggette a inevitabili errori, il problema pratico sta nel vedere con quale approssimazione possano essere determinate le costanti incognite da un sistema di equazioni particolari.

Sicchè, pur prescindendo dal fatto un po' strano che si dica una cosa per intenderne un'altra, chi legge questi periodi è naturalmente indotto a pensare che nel campo della geodesia siasi sempre saputo che mediante i valori della gravità era possibile determinare i valori assoluti delle costanti dell'ellissoide terrestre, ma che non se ne tenne mai conto, perchè era parimenti noto che tale metodo non può condurre a risultati praticamente attendibili.

Ora l'autore non dice dove o quando concetti di questa specie siano stati esplicitamente espressi. E non è facile d'altronde conoscere l'opinione di tutti i cultori della geodesia; ma da parte mia debbo dire che ho sempre trovato espresso esattamente il contrario, cioè ho sempre trovato l'affermazione precisa di una impossibilità assoluta o intrinseca, e non mai relativa o pratica, di arrivare alla determinazione delle costanti terrestri mediante misure di gravità (1). Per questo mi è sembrato utile indagare se tale modo di vedere fosse giustificato ed ho trovato infatti che non lo era.

Io potrei fare molte citazioni a sostegno di quanto ho detto, ma, per non dilungarmi, prenderò un trattato recentissimo, credo l'ultimo che sia stato pubblicato e che dovrebbe quindi rispecchiare l'opinione corrente nel momento attuale fra gli studiosi di geodesia. È il *Cours d'astronomie et de géodésie* di H. Faye, *revu et mis à jour* par le Général R. Bourgeois,

(1) Fa apparentemente eccezione un'osservazione del Poincaré in principio della Memoria: *Les mesures de grarité et la géodésie* (" Bull. astron. ,, t. XVIII, 1901). Ma il Poincaré in questo lavoro considera il caso in cui sono noti infiniti valori della gravità, o piuttosto i valori della gravità su tutta una regione della superficie. È quindi un problema completamente diverso dal nostro, nel quale si tratta sempre di un numero *finito* di valori della gravità.

Digitized by Google

Membre de l'Institut. Nel secondo fascicolo della Parte prima, che porta la data del 1928, a pag. 153 si legge:

Mais il faut bien remarquer que si, comme nous l'avons vu précédemment, un ensemble de mesures d'arcs de méridien, d'amplitude et de longueur connues, exécutées dans diverses régions, permet de déterminer les dimensions de l'ellipsoïde terrestre, on ne pourra, par les déterminations de l'intensité de la pesanteur, obtenir que l'aplatissement μ, *c'est-à-dire la figure de l'ellipsoïde de référence, mais non ses dimensions.*

In questo periodo, e nemmeno nei successivi, non vi è accenno alcuno a difficoltà d'ordine pratico o sperimentale. L'impossibilità di cui si parla è affermata in via assoluta.

Non altrimenti si esprime il generale G. Perrier, segretario del Comitato internazionale geodetico e geofisico, in uno scritto che ho già avuto occasione di citare: *Les raisons géodésiques de l'isostasie terrestre* (Annuaire pour l'an 1926, publié par le Bureau des Longitudes).

Ma importa notare che in queste affermazioni l'autorità, pur grande, degli scrittori è fuori quistione; e nemmeno si può parlare di incertezze di interpretazione, per il fatto che tali affermazioni *sono una conseguenza necessaria* delle premesse, cioè delle formole che quegli autori considerano. Per cui chi ha asserito l'impossibilità assoluta, di cui parliamo, non poteva necessariamente asserire, nè pensare altra cosa.

E di fatti le formole che hanno presenti i trattatisti, quando parlano delle applicazioni delle misure di gravità, sono le più semplici fra quelle che si conoscano e le più antiche, cioè quelle di Clairaut classiche:

$$\frac{g_p - g_e}{g_e} + s = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_e}, \qquad g = g_e + (g_p - g_e)\,\mathrm{sen}^2\varphi\,,$$

dalle quali deriva subito la formola più solitamente considerata per rappresentare la gravità sulla superficie dell'ellissoide

$$g = g_e\left\{1 + \left(\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_e} - s\right)\mathrm{sen}^2\varphi\right\}.$$

Ora notiamo bene che, se noi in questa formola sostituiamo g

Digitized by Google

e φ con quante coppie vogliamo di valori osservati, potremo scrivere centinaia di equazioni, ma da esse non potremo mai ricavare altro che un valore, più o meno esatto, per la differenza:

$$\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_e} - s$$

e *non mai i valori di* a *ed* s *separatamente.*

La risolubilità generica delle equazioni di cui parla il professore Mineo nel n. 1 del suo scritto. proprio in questo caso, che è quello in questione, fa completamente difetto.

Dunque la conclusione che mediante misure di gravità non è possibile arrivare alla determinazione assoluta degli assi dell'ellissoide di riferimento, è una vera e propria necessità logica *nelle condizioni di fatto* che abbiamo indicato, e non ha relazione alcuna colla difficoltà pratica delle misure, come scrive il nostro autore. Di questa altra difficoltà si potrà bensì trattare, ma in un secondo tempo.

Io credo quindi di poter dire che, dimostrando il contrario di quanto era stato finora asserito, mediante formole più generali di quelle solitamente applicate, ho contribuito ad eliminare un concetto inesatto, frequentemente ripetuto, ed è questo lo scopo primo che mi ero proposto e che ho raggiunto.

Siamo ora in grado di veder bene come le cose sono avvenute. Quando si usano formole approssimate per fare su di esse dei ragionamenti, sono possibili incongruenze come quella in discorso, per il fatto che, trascurando dei termini, veniamo ad alterare il carattere analitico delle formole e quindi è possibile arrivare a conclusioni che non sono affatto vere per le relazioni rigorose.

Fu dunque, se si vuole, un equivoco. Ma un equivoco che durava dai tempi di Clairaut. Possiamo perciò rallegrarci di averlo ora definitivamente eliminato, e di poter porre al suo posto un teorema di non comune eleganza.

Lo scritto, di cui ci occupiamo, tratta in seguito della precisione raggiungibile nella valutazione degli assi dell'ellissoide mediante misure di gravità, e dimostra, col calcolo dei presumibili errori medi, che essa è insufficiente.

Digitized by Google

Io ho sempre pensato (ed ho detto anche esplicitamente nella mia Comunicazione alla Assemblea di Praga del 1927, che si sta ora stampando nel *Bulletin géodésique*) che una tale quistione doveva essere trattata a parte ed all'infuori della quistione analitica, della quale esclusivamente mi occupavo. Ma una considerazione assai semplice ed intuitiva, senza necessità di calcoli, mi aveva da tempo portato ad una conclusione non differente sostanzialmente da quella sopraccennata. È chiaro infatti che per poter determinare delle lunghezze, come sono gli assi dell'ellissoide terrestre, è necessario misurare delle grandezze che dipendano in qualche modo dalla unità di lunghezza. Queste grandezze sono nel nostro caso le accelerazioni di gravità, nelle quali, *dato il metodo attualmente usato per misurarle*, l'unità di lunghezza compare nella misura delle lunghezze dei pendoli. Per cui in ultima analisi possiamo dire che usiamo come *base* per misurare delle lunghezze di migliaia di chilometri l'asta di un pendolo lunga appena qualche decimetro. E ciò è naturalmente ben contrario alle buone regole della topografia.

Siamo quindi su questo punto d'accordo. Ma l'accordo cessa quando l'autore chiama paradosso la determinabilità degli assi mediante misure di gravità.

Si tratta di un teorema dimostrato con ogni rigore. E se anche esso si mostra ora non adatto allo scopo indicato, a cagione dei metodi che ora si adoperano per misurare la gravità, nessuno può escludere che lo possa divenire in seguito, con altri e differenti metodi di misura. Esistono in natura infiniti fenomeni che dipendono dalla gravità, oltre alle oscillazioni dei pendoli: chi può escludere che se ne possa trovare uno pel quale la difficoltà indicata debba scomparire? (1), chi può escludere che la precisione delle misure di gravità possa essere spinta assai più oltre di quella attualmente raggiunta?

Ma, indipendentemente da tutto ciò, conviene ricordare che

(1) Per citare un esempio, le oscillazioni stazionarie dei grandi laghi sono così lente, che un pendolo ad esse isocrono dovrebbe avere una lunghezza di migliaia di chilometri!

Digitized by Google

le formole non si costruiscono unicamente per mettervi dentro dei numeri e cavarne dei valori, più o meno precisi, per certe grandezze. Le formole e le teorie analitiche servono per studiare le mutue dipendenze fra le grandezze che compaiono in un dato fenomeno e per costruire dei modelli che aiutino la nostra immaginazione nel rappresentarlo.

Sotto questo punto di vista tutte le formole, che noi possiamo logicamente dedurre da una teoria, hanno uguale valore. Ed è perfettamente lecito, anzi doveroso, per chi coltiva la teoria, di preparare formole e teorie analitiche, anche se gli osservatori non hanno presentemente mezzi adatti per servirsene. Spetta a loro il trovarli.

Per ricordare un esempio classico, Maxwell ha costruito le equazioni della propagazione delle onde elettro magnetiche, molto tempo prima che queste fossero sperimentalmente conosciute. Nè alcuno ha mai chiamato paradossali quelle equazioni, che anzi hanno servito di stimolo agli sperimentatori per le più brillanti scoperte.

In un caso, che rientra nella quistione attuale, è facile vedere l'interesse che può avere, sotto altri aspetti, una formola che si presenta come una delle più inadatte alla determinazione del raggio medio terrestre.

È quella citata anche dal nostro autore, a pagina 6, col numero [4]:

$$g_p - g_e = \frac{5}{2}\,\omega^2 R.$$

Se per la differenza $g_p - g_e$ prendiamo il valore attualmente ammesso per la terra, cioè 5,185, troviamo pel raggio medio R un valore errato in meno di circa il 30 %! Ma reciprocamente se ci serviamo della formola stessa per calcolare la differenza fra i valori della gravità al polo ed all'equatore sopra un geoide sferico che abbia un raggio uguale al raggio medio terrestre, troviamo in questo caso un valore molto più grande del precedente, cioè

$$g_p - g_e = 8.460,$$

e ciò spiega l'origine dell'errore indicato, e ci porta alla con-

Digitized by Google

clusione assai notevole che la sfera, mentre è figura di grande approssimazione pel geoide dal punto di vista *geometrico*, non lo è dal punto di vista *gravimetrico*. In una mia recente Comunicazione al Congresso dei Matematici a Bologna, ho fatto vedere quale sia la spiegazione meccanica che si può dare di questo fatto singolare.

Passando ad un altro ordine di considerazioni convien notare che dalle relazioni generali relative al campo ellissoidico, che si imperniano sulla geniale teoria del nostro illustre geodeta, il Pizzetti, possono dedursi molte formole interessanti, nelle quali le lunghezze assolute degli assi non compaiono, o sono considerate come note, e che quindi sfuggono alla obiezione di cui ci siamo precedentemente occupati.

Particolarmente la relazione lineare che esiste fra tre valori qualisiansi della gravità e le formole rigorose semplicissime, che rappresentano la gravità superficiale in funzione della latitudine, io sono convinto che, per necessità di cose, presto o tardi, entreranno a far parte del formulario gravimetrico d'uso corrente. Di una di esse anzi, conviene notarlo, anche il prof. Mineo ha già riconosciuto il valore pratico (1). Siamo quindi già sulla buona strada, e giova sperare, poichè, in verità, non esistono ragioni sostanziali di divergenza.

La Fisica matematica è stata accusata di essere talvolta una vuota astrazione, e di restare troppo lontana dai problemi fisici concreti. Ma, pur troppo, se cerca di accostarsi a questi problemi, le può accadere di non trovare migliore accoglienza, come se invadesse un terreno non suo.

Io ho sempre cercato di tenermi lontano dalle astrazioni e di attaccarmi ai problemi della realtà. Perciò mi sono sforzato, per quanto mi fu possibile, di penetrare e comprendere i metodi usati dagli osservatori, e serenamente apprezzarli.

Credo quindi non sia soverchia pretesa il richiedere che, anche dall'altra parte, si faccia altrettanto.

---

(1) C. Mineo, *Sulla gravità superficiale d'un pianeta supposto ellissoidico a tre assi*, " Boll. dell'Unione Mat. ,. aprile 1928.

Digitized by Google

Nuovi dati di fatto
riguardo
L'età degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino.

Nota del Socio nazionale residente FEDERICO SACCO

Sommario. — Premesse (p. 11); dati paleontologici (p. 13); dati tettonici (p. 15); dati litologici (p. 20); dati stratigrafici (p. 23); dati comparativi (p. 26); conclusione (p. 30).

La questione, grave tanto scientificamente quanto praticamente, dell'*età degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino* che da un quarantennio sostengo essere cretacei, mentre essi sono generalmente ritenuti eocenici, fu da me recentemente riassunta in una breve nota, avente appunto tale titolo, pubblicata negli " Atti della R. Acc. Sc. di Torino " (Vol. LXI-1925), alla quale quindi rimando per brevità (1).

Tale nota originò una Memoria dell'ing. S. Franchi, *La prosecuzione della Zona ad Helminthoida dalle Alpi Marittime all'Appennino Genovese,* ecc. (" R. Acc. Lincei, 6ª, I, 1926), nella quale egli: espose un parallelismo stratigrafico e cronologico fra Liguria occidentale ed orientale che non credo giusto (come spiegherò verso la fine della presente Nota); riespose con grande dialettica (2) le sue precedenti idee sulla posizione ed età, sia degli Argilloscisti ofiolitiferi che egli attribuisce al Priaboniano, sia del *Macigno*, che segna come sottostante a detti Scisti, e presentò sezioni geologiche (Levanto-Mulazzo e Bacino del Serchio), indicate

(1) Ne ho ancora qualche copia che invio a chi la desidera.

(2) Noto però che gli epiteti largitimi dall'ing. Franchi in detta Memoria, cioè di *artificioso, astruso, sragionevole, assurdo, arbitrario, puerile,* ecc., non sono argomenti, ma solo aggettivi di un tipo polemico che non qualifico.

Digitized by Google

come fatte *secondo il prof. Sacco*, segnandovi gli Argillosciti ofiolitiferi come sovrastanti agli Scisti policromi della cosidetta *Scaglia*, ciò che non ho mai immaginato (avendo anzi dimostrato il contrario a pag. 43 della mia sovraccennata Nota del 1925). Per cui con una Nota sopra *La questione dell'età degli Argilloscisti ofiolitiferi...* (" Rend. R. Acc. Lincei ", 6ª, IV, 1926) dovetti scagionarmi da tale erronea interpretazione attribuitami; nello stesso tempo spiegai come la cosidetta *Scaglia senoniana* delle Carte geologiche ufficiali della Toscana sia in realtà una formazione di passaggio tra l'Eocene ed il Cretaceo, segnandola in uno specchietto finale riassuntivo come superiore agli Argilloscisti ofiolitiferi.

Infine in una recente Memoria *Ancora sull'età degli Scisti argillosi ofiolitiferi*, ecc. (" Boll. S. Geol. I. ", XLVI, 1927) il Franchi (1) riaffermò senz'altro le sue precedenti idee (come pure egli fece ultimamente nell'Adunanza di chiusura del XLI° Congresso della Società geol. ital. a Larderello); e presentò modificate le sezioni geologiche della regione di Levanto-Mulazzo e del Bacino del Serchio, segnando gli Scisti ofiolitiferi sia sopra sia sotto la Scaglia; interpretazione che credo ancor più inaccettabile della prima, presentata dal Franchi nella sua Memoria del 1926.

Intanto, proseguendo gli studi ed i rilevamenti geologici nell'Appennino settentrionale, nuovi ed importanti fatti si poterono constatare, sia riguardo all'età di tali *Scisti* (*facies modeniana*, p. p.), *Galestri*, ecc., sia riguardo all'età, connessa e pure dibattuta, della serie arenacea, il cosidetto *Macigno* (*facies etruria* dell'Eocene), ritenuto generalmente molto più antico di detti Scisti ofiolitiferi e dei ben noti *Calcari a Fucoidi* ed *Helmintoidi* (*facies ligurian*a dell'Eocene), mentre credo che esso sia non solo molto più giovane di tali Scisti, ma spesso anche più giovane (quando però non ne è eteropico) di detti Calcari.

Per cui parmi opportuno segnalare questi nuovi dati di

(1) Veramente questa Memoria era stata presentata il 6-II-1927 alla R. Acc. Naz. dei Lincei; ma in omaggio alle tradizioni dell'Accademia che non ammette polemiche nel proprio seno, l'ing. Franchi ritirò la Memoria (di cui furono pubblicate solo le conclusioni) e la fece pubblicare poi nel " Boll. della Soc. Geol. It. ".

Digitized by Google

fatto nella speranza che essi servano a sempre meglio rischiarare tali gravi questioni. Ciò d'altra parte credo tanto più necessario di fare perchè, mentre in Italia dette opinioni, sia della creduta eocenicità degli Argilloscisti ofiolitiferi, sia della relativa antichità del *Macigno*, sono diventate quasi tradizionali, dogmatiche, indiscutibili, viceversa parecchi geologi stranieri che vengono a studiare il nostro Appennino senza preconcetti nè dogmatismi di scuole, tenendo soltanto conto dei dati di fatto, non accettano più dette idee; sarebbe quindi bene e decoroso che anche in Italia si considerassero seriamente tali fatti per dedurne le logiche loro conseguenze. Esaminiamoli brevemente.

Anzitutto, siccome per la Cronologia stratigrafica sono fondamentali i **dati paleontologici**, ricordiamo ancora che, quantunque i veri Argilloscisti ofiolitiferi siano, per la loro speciale origine, generalmente poveri di fossili, tuttavia, attraverso un secolo di ricerche, già ne furono raccolti qua e là in cento punti diversi e sono specialmente: Cicadeoidee (*Bennettites*), *Cupressoxylon* e *Araucarioxylon* analoghi a forme cretacee, Radiolarie di tipo mesozoico nei Diaspri (*Radiolariti*), *Calpionelle* di tipo giura-cretacico (1), resti di *Uintacrinus*, centinaia di *Inocerami* (rappresentati da varie specie), svariatissime *Ammoniti* (di generi diversi, come *Hamites*, *Baculites*, *Turrilites*, *Schloenbachia*, *Desmoceras*, *Pachydiscus*, *Acanthoceras*, *Toxoceras*, *Ancyloceras*, ecc.), denti di diverse specie cretacee di Selacidi, numerosi denti di varie specie di *Ptycodi*, alcuni resti di *Ittiosauri*! Flora e Fauna della cui caratteristica cretaceità non si può dubitare.

Ultimamente ancora dall'accurato studioso delle Argille scagliose petroleifere dell'Appennino, il dott. Anelli, vi furono raccolti nuovi resti di Ammonite e di *Uintacrinus*. Quest'ultimo

(1) Forme del Giura Cretaceo segnalate già molti anni fa dallo Steinmann (*Ueber Tiefen absatze d. Ober Jura im Appennin*, 1913) nei Calcari alberesi dell'Appennino sett. assieme con Radiolariti, riferendo egli le formazioni che le inglobano al Titonico e al Cretaceo inferiore; nell'Appennino detto fossile abbonda nei tipici Calcari alberesi ceroidi del Cretaceo pr. d.

Digitized by Google

fossile, analogo a quello che segnalai per lo stesso terreno nel 1922, ha speciale importanza, sia perchè trattasi di un genere finora trovato soltanto nel Cretaceo superiore dell'America Settentrionale e dell'Europa, sia perchè la conservazione (ancora in posizione naturale originaria) di molte decine di dischetti di un delicato, lungo braccio di Crinoide, dolcemente e ondulatamente adagiato sopra una lastra, esclude l'ipotesi di rimaneggiamento avanzata da alcuni per cercare di demolire l'importanza dei fossili cretacei trovati fra gli Scisti ofiolitiferi dell'Appennino.

Infine, circa i fossili degli Argilloscisti in questione è opportuno ricordare che da oltre un quarantennio fu rinvenuto un grande rostro (lungo quasi mezzo metro) di Rettile nel Rio Marangone affluente del Tresinaro, presso S. Valentino di Castellarano in Provincia di Reggio Emilia; tale fossile proviene (come indica il suo materiale avvolgente) dalla formazione delle Argille scagliose che sviluppansi estesamente, tipiche, spesso rossigne, appunto nell'alta Val Marangone tra il M. Stadola e Remontano (vedi: F. Sacco, *Carta geologica dell'Appennino dell'Emilia*, 1892).

Orbene, sin dal 1886 il prof. Uzielli descrisse tale resto: *Sopra un cranio di Coccodrillo trovato nel Modenese*, " Boll. Soc. geol. it. „ Vol. V), indicandolo come certamente di un *Crocodylus* di grandi dimensioni.

Poco dopo il prof. Capellini esaminava tale fossile, stato esposto nella Mostra emiliana del 1888, e lo ricordava sia nei *Cenni bibliografici sui resti di Coccodrilli fossili in Italia*, indicati nel suo lavoro sul *Coccodrilliano gavialoide di Cagliari* (" Mem. Acc. Lincei „, 4ª, VI, 1890), sia in quello sopra *Ichtyosaurus camplylodon e tronchi di Cycadee nelle argille scagliose dell'Emilia* (" Mem. Acc. Sc. „, Bologna, 4ª, X, 1890), giudicandolo di grande importanza ma non determinandolo, causa il suo stato di conservazione.

Intanto il prof. Zittel nel terzo volume del suo grande *Trattato di Paleontologia* indicava il Coccodrillo del Reggiano come appartenente alla sezione *Brevirostri* degli *Eusuchia*.

In seguito il prof. V. Simonelli in uno studio *Intorno agli avanzi di Coccodrilliano scoperti a San Valentino nel 1886* (" Rend. R. Acc. Lincei „, V, 5, 1896) descrisse meglio questa porzione

Digitized by Google

rostrale del cranio che attribuisce ad un Coccodrilliano avente affinità coi *Plesiosuchus*, come un derivato dai Metriorinchi giurassici, considerandolo come il tipo di un genere nuovo, che denomina *Capelliniosuchus*, specificandolo come *C. mutinensis* ed indicandolo come il più antico Coccodrilliano finora scoperto in Italia, giacchè proviene dalle Argille scagliose che fornirono Pticodi ed Ittiosauri, Ammoniti e Inocerami, cioè tipici fossili del Cretaceo.

Dopo ciò per un buon trentennio il cosidetto Coccodrillo di S. Valentino cadde nell'oblio, anche perchè il fossile originale trovasi in una collezione privata lontana dagli ambienti di studio.

Finalmente il prof. M. Gortani in alcune *Note geologiche sui Colli Bolognesi* (" R. Acc. Sc. „, Bologna, 1897), dopo aver indicato un blocco di calcare a grosse Nummuliti ed Alveoline (che credo provenga da quei lembi di calcare eocenico che spesso sono impigliati o sovrapposti alla formazione delle Argille scagliose) ricorda il *Capelliniosuchus*, di cui potè esaminare un buon modello nel Museo Capellini, e crede poter affermare che *è per me un Dinosauro.*

L'affermazione è molto importante, tanto più che, secondo gentile comunicazione recentissima del Gortani, il prof. Nopcsa osservando detto modello avrebbe confermato tale determinazione.

È quindi desiderabile che il prezioso fossile (il quale dalle incomplete figure ricorda un po' un Mosasauride) venga ristudiato con cura per giungere ad una sicura determinazione; ma ad ogni modo esso è molto interessante per la questione esaminata in questa Nota, indicandoci la presenza, fra le Argille scagliose, di un grande Sauriano di tipo mesozoico, prevalentemente cretaceo.

Riguardo ai **dati tettonici** devesi subito osservare che, siccome il motivo tettonico prevalente nell'Appennino settentrionale è il corrugamento a ripetute pieghe isoclinali più o meno coricate (1), ne consegue naturalmente che gli Scisti ofiolitiferi per

(1) Vedi, p. es., le Sezioni pubblicate nelle mie Note sopra: *Le regioni petroleifere dell'Emilia* (" B. S. G. I. „, XLII, 1924); *Nelle regioni petroleifere*

Digitized by Google

metà circa dei casi si immergono sotto e per l'altra metà si avanzano sopra le formazioni dei Calcari a Fucoidi e delle Arenarie; ne deriva che la tettonica non risolve la questione in esame e quindi, secondo l'interpretazione cronologica (direi eocenica o cretacea) che si vuol dare a tali Scisti, essi possono essere interpretati e graficamente rappresentati in modo da costituire sinclinali (come generalmente si usa) oppure anticlinali, come io penso e sempre segnai.

Tuttavia da qualche tempo molti geologi, già accettando gli Scisti ofiolitiferi come più antichi (pur sempre eocenici) dei Calcari a Fucoidi, ammettono i primi costituire anticlinali fra i secondi. Ma permane sempre immutata e ferma l'opinione che la grande formazione arenacea del *Macigno* sia più antica che gli Scisti ofiolitiferi, per cui essa è sempre indicata come formante anticlinali fra detti Scisti che vi giacerebbero in sinclinale.

Orbene in alcuni punti dell'Appennino si possono osservare due fatti che contraddicono chiaramente a tale idea e relativa interpretazione tettonico-cronologica, cioè:

I°. È vero che talora la serie del *Macigno* sembra immergersi sotto gli Scisti ofiolitiferi, sia per reale rovesciamento stratigrafico, sia perchè le gigantesche pressioni orogeniche hanno spinto le tenere e malleabili formazioni argilloscistose contro e sopra le massiccie e compatte formazioni arenacee, in modo quasi da sommergerle più o meno estesamente. Ma in certe regioni, per es. nel gruppo del M. Zatta-M. Ghiffi (tra l'alta Val Taro e la Valle di Borzonasca nel Chiavarese) vediamo che la serie del *Macigno*, ingracilendosi, va infine a costituire solo più strette zone sovrastanti, direi galleggianti sopra gli Scisti ofiolitiferi, mostrando così di costituire sinclinali drizzate, coricate fram-

dell'Appennino (" Le Vie d'Italia ,. 1924); *Ricerche di regioni petroleifere nell'App. dell'Emilia* (" Mem. descr. Carta geol. d'Italia ,. XX, 1926). Quanto ai giganteschi ricoprimenti supposti da Lencewicz, Steinmann, Tillmann, Kober, ecc., non mi paiono necessari, mentre la Geologia appenninica si spiega assai bene e naturalmente con corrugamenti più o meno rovesciati che spesso si possono anche direttamente constatare.

Digitized by Google

mezzo ed infine, come dissi, anche nettamente sopragiacenti a detti Scisti; la maggior antichità di questi rispetto al *Macigno* risulta quivi evidente, se non si vuol ricorrere a trasgressioni, carreggiamenti e ribaltamenti straordinari contro l'interpretazione più semplice, logica e naturale.

II°. In tanti anni di rilevamento geologico nell'Appennino, tenendo sempre molto conto dei dati tettonici, non mi è mai occorso di osservare direttamente che le formazioni del *Macigno* facciano verso l'alto del loro sviluppo una vera anticlinale, come dovrebbe apparire, almeno qualche volta, se esse costituissero anticlinali fra gli Argilloscisti ofiolitiferi e come generalmente è figurato nelle sezioni teoriche.

Invece più volte ebbi ad osservare il caso contrario, cioè di vere sinclinali nel *Macigno*, naturalmente là dove esso è inciso tanto profondamente da venir raggiunta la parte medio-inferiore di questa formazione arenacea. Ricorderò, come esempio in proposito, la Valle dell'Aveto, confluente di destra della Trebbia. Rilevando la geologia della incassata Valle di Aveto, da Rezoaglio al suo termine, si può notare che la sua parte direi nucleare (dai dintorni di Salsominore sin oltre il Fossone di Torrio) è costituita dalla potente e compatta serie marnoso-arenacea (*Macigno*) in banchi spesso fortemente rialzati, attorno a cui si svolge quasi a collana una più o meno estesa zona di argilloscisti ofiolitiferi (quella di Tornarezza-Colla-Casale, ecc. ad Est, e di Cerignale-Cariseto-Rovereto-Orezzolo, ecc. ad Ovest), intorno ai quali si avvolge a sua volta, quasi come grande, per quanto incompleta, fascia, la formazione dei Calcari a Fucoidi (formante i Monti di Torrio-Rocca Borri, ecc. ad Est, e di M. Oramala-Vico, ecc. ad Ovest); per cui viene spontanea l'idea d'interpretare questa serie come una anticlinale, della quale il *Macigno* sarebbe il nucleo, avvolto regolarmente dagli Scisti ofiolitiferi e poi dai Calcari a Fucoidi. Interpretazione infatti che è quella generalmente adottata, anche perchè successioni stratigrafiche simili o analoghe si incontrano frequentemente nelle regioni del *Macigno* appenninico.

Ma se osserviamo bene la tettonica di questa tipica regione

Digitized by Google

arenacea notiamo che, mentre essa, già nella vicina Valle della Trebbia, lascia vedere varie pieghe a C come terminazione di una sinclinale coricata, nella Valle Aveto mostra nettamente in vari punti la struttura in grande sinclinale, fortemente ristretta per gigantesca pressione orogenica; così, per esempio, quasi di fronte alla Costa Coverera (Fig. 1), e quasi di fronte alla Borgata Boschi

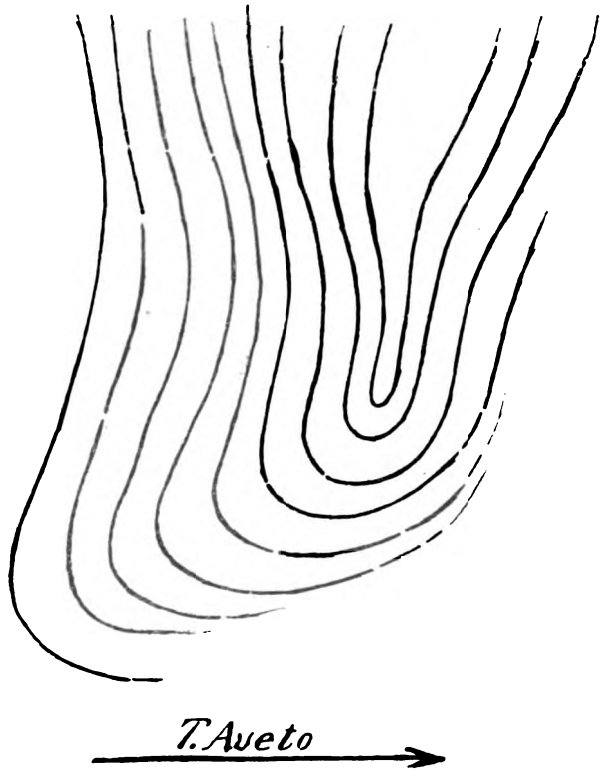


Fig. 1.
Grande sezione naturale nel *Macigno* del versante sinistro di Valle Aveto, di fronte a Costa Coverera.

(Fig. 2) precisamente là dove si eseguisce ora una diga (per Bacino artificiale) che purtroppo verrà a guastare in gran parte la vista della parte bassa di questa magnifica sinclinale. Dunque, malgrado l'apparenza stratigrafica sopraindicata, la formazione arenacea di Valle Aveto corrisponde ad una strettissima sinclinale com-

Digitized by Google

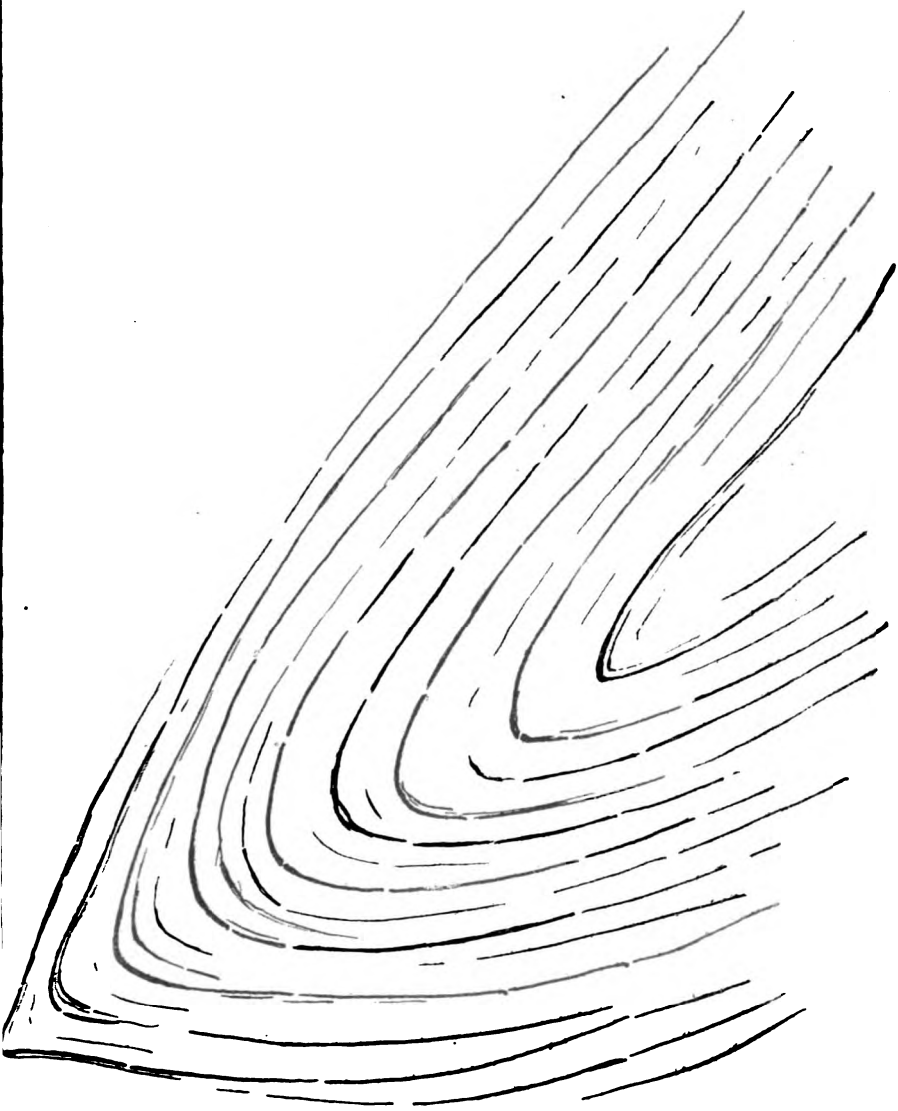


Fig. 2.

Grande sezione naturale nel *Macigno* del fianco sinistro di Valle Aveto, di fronte alla Regione di Borgata Boschi (Schizzo da fotografia).

Digitized by Google

presa e compressa fra zone (che credo anticlinaliche) di Scisti ofiolitiferi e, più esternamente, zone, credo sinclinaliche, di Calcari a Fucoidi.

Interpretazione (già indicata nella Sezione terza della mia Nota sopra *Le Regioni petroleifere dell'Emilia*, 1924) che viene confermata dai dati litologici che indicherò in seguito.

Così pure il fatto che le trivellazioni, profonde anche oltre mille metri, nelle Argille scagliose non hanno ancora incontrato il tipico *Macigno* come altri avrebbe supposto, ha un qualche valore, almeno relativo, se non esclusivo.

I **dati litologici** non vennero finora utilizzati per l'interpretazione cronologica delle formazioni in esame, giacchè esse sono generalmente così micromere da non prestarsi facilmente all'esame pratico dei loro componenti rocciosi.

Fortunatamente però in alcuni punti dell'Appennino la serie arenacea (*Macigno*) presenta lenti o strati di conglomerato che ben si presta a tali osservazioni; il punto migliore è ancora la sovraccennata Valle dell'Aveto dallo sbocco di R. Rufinati alla borgata Boschi; zona tanto più degna di studio perchè estesi tagli fatti recentemente per la viabilità nella parte inferiore di detta Valle (in rapporto alla costruzione di un Serbatoio artificiale sotto la borgata di Boschi) permettono magnificamente l'esame minuto e comodo di tali conglomerati, che, malgrado la speciale asprezza della regione, già avevo potuto osservare nel 1890 e che furono poi studiati particolarmente dal prof. Roccati nella sua Nota sopra *Conglomerati ad elementi cristallini della Valle d'Aveto* (" B. S. G. I. „, XL, 1921).

Orbene, esaminando tali conglomerati ad elementi svariatissimi (da pochi millimetri ad oltre un metro di diametro), si nota anzitutto che esso risulta da due sorta, direi, di materiali rocciosi (1); cioè: I°. da elementi cristallini, direi di *facies alpina*

(1) Il fatto è molto analogo a quello che si osserva nei conglomerati oligo-miocenici della Collina torinese; cioè ad elementi rotolati, cristallini (Gneiss, Graniti, Quarziti, Porfidi, ecc.), di lontana origine alpina, commisti

Digitized by Google

(Gneiss, Micascisti, Granito, Aplite, Quarzo, Quarzite, Diorite, Anfibolite, Scisti cristallini varî, ecc.), più o meno rotolati, ciottoloidi, di origine ignota, ma certamente assai lontana, e II°. da elementi più o meno angolosi, indicanti un'origine più o meno vicina, e costituiti da frequenti Calcari alberesi, da varî Argilloscisti bruni, da qualche Diaspro, Diabase, Eufotide e Serpentina (cioè gli elementi della tipica formazione argilloscistosa ofiolitifera dell'Appennino) ed anche dai noti e caratteristici Calcari a Fucoidi! (Fig. 3).

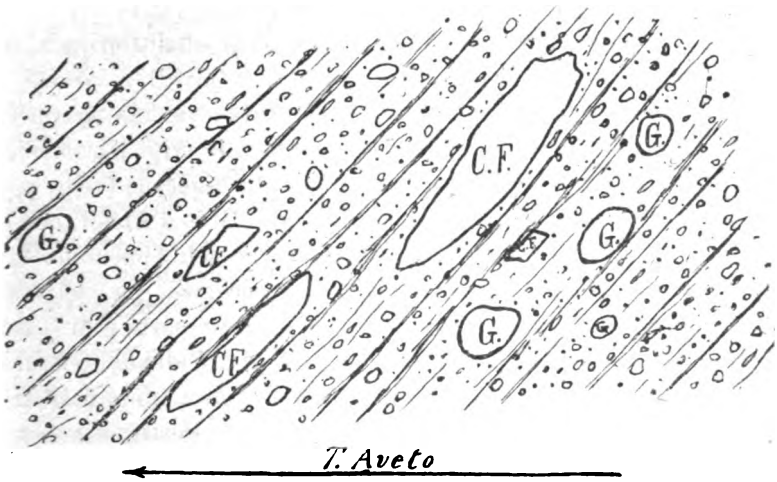


Fig. 3.

Sezione sulla destra del T. Aveto lungo il sentiero sotto Costa Coverera, nel *Macigno* conglomeratico con ciottoli gneissici e granitici (G) commisti a frammenti angolosi (anche di m. 0,70 di lunghezza) di tipico Calcare a Fucoidi (C. F.).

Siccome il fatto mi sembra di capitale importanza, nel caso che qualche geologo volesse constatarlo di persona, preciso che per ora quest'ultimo caso si può osservare specialmente bene nella Costa Coverera, sul fianco dello stradello tagliato nel basso

---

ad elementi angolosi calcarei (calcari alberesi, ecc.) di vicina origine, direi appenninica, per la natura loro; indicandoci che esisteva ivi allora una oroidrografia ben diversa dall'attuale.

Digitized by Google

di Valle Aveto, quasi di fronte allo sbocco del T. Pasino, presso un segnale in minio P. F. 21 (caposaldo di rilievo lasciato da ingegneri operatori di una Società idroelettrica). Un pezzo di tali frammenti di Calcare a Fucoidi (colle Fucoidi) è ora conservato nel Museo geologico del Politecnico di Torino col Numero d'Inv. 39173.

Dunque dal fatto esposto risulta evidente la conclusione importantissima che il *Macigno* della Val d'Aveto, come del resto spesso quello dell'Appennino in generale, malgrado possa a primo tratto apparire più antico di certe formazioni circostanti, in realtà è di età posteriore, sia agli Argilloscisti ofiolitiferi, sia, in complesso, ai Calcari a Fucoidi.

Del resto la posizione complessivamente alta delle arenarie si può osservare generalmente dal Veneto alle Alpi Marittime, tanto che alcuni le vollero attribuire già all'Oligocene (vedi, per esempio, estese arenarie dell'Istria, il famoso Grès d'Annot, ecc.).

Ciò non toglie che le arenarie eoceniche dell'Appennino talora appaiano verso il basso della serie eocenica, sia per trasgressioni e *hyatus* e quindi mancanza di gran parte o di tutta la serie media (come vedesi, per es., nell'alta Valle della Stura di Cuneo, nei dintorni di Mentone, in moltissime regioni dell'Appennino settentrionale, ecc.), tanto che alcuni ne costituiscono un orizzonte di *Arenarie inferiori*. Altrove le arenarie sostituiscono in parte (per eteropia) la formazione calcarea a Fucoidi, oppure si alternano ripetutamente con essa, costituendo ciò che alcuni denominarono *Macigno giovane* o *superiore*, come vedesi, ad es., per regioni estesissime dell'alta Emilia tra la zona arenacea dell'Appennino assiale e quella calcarea dell'Appennino medio-marginale, nonchè qua e là in altre regioni, anche nella Liguria occidentale.

Del resto l'età relativamente giovane del *Macigno* appenninico è anche indicata dai fossili che vi si raccolsero, per quanto raramente, qua e là, come, per es., nelle Cave della Porretta (vedi la Nota di Nelli nel 1903), nell'Appennino tosco-romagnolo, ecc. e mostrarono che i resti (spesso solo impronte) di Echinidi, di Molluschi, ecc., in essa contenuti ricordano quasi più le forme neogeniche che non le eogeniche.

Digitized by Google

Riguardo a **dati stratigrafici**, cioè alla successione stratigrafica delle formazioni in questione, si deve anche osservare che in certe regioni, là dove la serie appare più completa, più sviluppata e più regolare, come per esempio nella media e bassa Valle d'Aveto, si può direttamente constatare la seguente graduale e regolare successione stratigrafica, con passaggi litologici quasi insensibili, d'alto in basso:

Eocene:

sup. — Potentissima formazione prevalentemente arenacea (*Macigno*) con intercalazioni marnose e lenti conglomeratiche (dalla regione di Boschi-Castagnola a quella di Cattaragna);

medio — Potentissima formazione essenzialmente marnosa o marnoso-calcarea (da Val Ruffinati a Salsominore);

inf. — Zona marnosa grigia, talora scistoso-friabile, talora con interstrati calcarei, specialmente verso la base (come, p. es., da Villa Sanguineto a Bazzini, ecc.

Cretaceo *sup.* — Argilloscisti spesso contorti, sconvolti, con intercalazioni di *Calcari alberesi* (1) e di spuntoni ofiolitici (per es. nei dintorni della Madonna di Castel Sottano).

Qualcosa di analogo si osserva nella grande e complessa formazione eocenica che, dal suo punto più elevato, si può denominare del M. Ramaceto, specialmente andando dall'alta Valle d'Aveto (dintorni di Cabanne-Rezoaglio) al centro di detta zona, cioè:

Eocene:

sup. — Zona arenacea (*Macigno*) con alternanze scistose (M. Ramaceto - M. Magnano);

medio — Scisti marnoso-calcarei grigi, spesso ardesiaci, lucidi (Alto Aveto nei dintorni di Ventarolo-Parazzuolo);

inf. — Argilloscisti galestrini e Scisti calcarei, ardesiaci grigio-bruni (dintorni di borgata Moglie).

Cretaceo. — Argilloscisti bruni con intercalazioni o frammenti di Calcari alberesi e lenti di Diabasi, Serpentine e grugni calco-ofiolitici vari (dintorni di Cabanne).

(1) Credo che si debbano distinguere, per natura ed età diversa, i *Calcari alberesi* dai *Calcari a Fucoidi* generalmente confusi assieme; cioè come

Digitized by Google

Riguardo ai dati stratigrafici e tettonici è pure qui da ricordare il fatto che in certe regioni dell'Appennino settentrionale la formazione degli Argilloscisti ofiolitiferi appare circondata da quella delle arenarie (*Macigno*).

Tra i casi più tipici e grandiosi su tale riguardo ricordo la regione di Firenzuola dove un'amplissima zona di Argille scagliose tipiche, inglobanti lenti di Diabase e di Serpentina, con Ftaniti, schisti variegati, ecc. (zona in cui si raccolsero già denti di *Ptychodus*, nonchè resti di *Cycadeoidea* e di *Araucarioxylon*), appare circondata, quasi in grandiosa per quanto complessa cupola anticlinalica, dalla solita formazione arenacea del *Macigno*: per cui è quivi difficile negare sia l'età cretacea degli Argilloscisti ofiolitiferi, sia la loro sottoposizione al *Macigno*.

Fatti analoghi osservansi nella regione montuosa di Sesta Godano, ecc.

Quanto a serie stratigrafiche regolari che provano pure un'analoga successione cronologica, accenno qui appena (perchè già esposte nelle pagg. 42-44 della mia sovraindicata Nota del 1925) come in alcune regioni dell'Appennino (per es. in Val di Lima nei monti Lucchesi, alla Foce delle Radici tra la Garfagnana e l'alto Reggiano, ecc.) si possa constatare direttamente la seguente serie:

Potente serie arenacea (*Macigno*)	**Eocene.**
Scisti rossicci o policromi: nummulitiferi in alto; con Pticodi verso il basso	
Argilloscisti (*Galestri*), talora ofiolitiferi (come nell'alto Reggiano)	**Cretaceo.**

Calcari alberesi (str.) si potrebbero designare essenzialmente i Calcari argillosi biancastri, a pasta finissima, quasi ceroidi (spesso a *Calpionella*), ottimi per Calce idraulica (sovente con venule bianche spatiche per fratture riempite), che fanno parte della serie argilloso-calcarea formante passaggio dall'Eocene inferiore al Cretaceo, in cui sono specialmente sviluppati e tipici e sono generalmente in lenti od in frammenti. Invece il nome di *Calcari a Fucoidi* si potrebbe riferire specialmente ai Calcari marnosi grigiastri più o meno stratificati, scagliosi, spesso lastroidi-ardesiaci, assai sviluppati nell'Eocene medio e superiore.

Digitized by Google

Ricordo infine ancora che nella nota anticlinale dei monti della Spezia [sviluppantesi regolarmente per oltre 30 Chilometri, coll'affioramento dapprima (presso la Spezia) di tutta la tipica serie mesozoica e poi, gradatamente smorzandosi verso N. O. (oltre Cassana), di solo più la formazione argilloscistosa ofiolitifera], si può in alcuni punti (come per es. presso la borgata Casale, che già descrissi e figurai a pagg. 48-50 della succitata Nota del 1925) osservare chiaramente la seguente serie stratigrafica:

Eocene. — Potente serie arenacea (*Macigno*).

Cretaceo. — Argilloscisti ofiolitiferi.

Neocom.-Giura. — Calcari grigio-rosei.

Tale interessantissima serie stratigrafica, di cui ripresento la sezione (Fig. 4) pel suo grande interesse, è però piuttosto

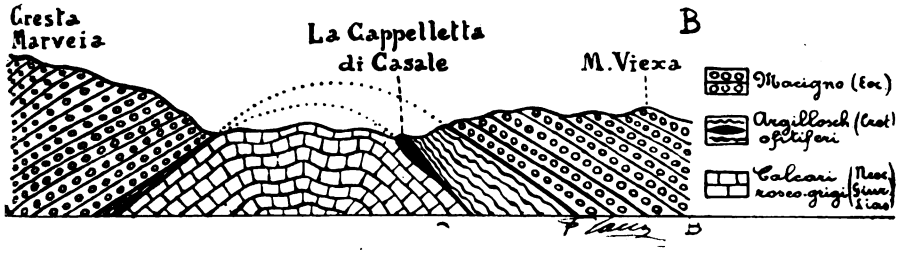


Fig. 4.

Sezione geologica attraverso l'estremità N. O. della grande anticlinale spezzina presso Casale (Pignone). – (Scala di 1 a 25.000).

rara pel semplice fatto che la formazione argilloscistosa in esame, per quanto potente, tuttavia per la natura sua non solo produce facilmente scorrimenti e quindi trasgressioni anche rilevantissime, ma è pure facilissima ad esser schiacciata, laminata e quindi mascherata dai compatti banchi arenacei, tanto più là dove svi-luppansi inferiormente i pure rigidi e duri banchi calcarei del Mesozoico tipico; per cui quivi gli Argilloscisti, compresi e com-pressi fra le due formazioni compatte, non possono generalmente apparire e quindi osservasi quasi normalmente la nota lacuna di trasgressione tra il *Macigno* ed il Neocomiano, lacuna che corrisponde a quasi tutto il Cretaceo (pr. d.).

Digitized by Google

Del resto, se si osserva senza preconcetti la recentissima Carta geologica al 100.000 del foglio Spezia (1928) rilevata dall'ing. Zaccagna, salta nettissimo agli occhi (1) il fatto che la nota anticlinale spezzina di tipico Mesozoico, racchiusa fra due lunghe zone di *Macigno*, abbassandosi verso N. O. lascia apparire: dapprima (fra Neocomiano e *Macigno*, nei dintorni di Pignone-Casale) gli Argilloscisti con Serpentine ed Eufotidi; poi, oltre Cassana, solo più gli Argilloscisti serpentiniferi che rappresentano appunto la terminazione (ridotta al Cretaceo) della lunga anticlinale mesozoica spezzina.

Quanto a **dati comparativi** tra la serie dei terreni di regioni più o meno distanti, essi sono spesso di interpretazione un po' difficile, dubbia e pericolosa nelle deduzioni, per cui ne faccio solo cenno ora, perchè trattovi da una presunta corrispondenza stratigrafica e cronologica con un parallelismo (che non credo accettabile) che fu fatto dall'ing. Franchi (tra la serie stratigrafica della Liguria occidentale e quella della Liguria orientale) per sostenere l'età eocenica degli Argilloscisti ofiolitiferi; idea che egli aveva già accennata nel 1916 a pag. 328 della sua Memoria sopra *Le Arenarie di Annot e la Zona ad Helminthoida* (" Boll. Com. Geol. It. „, XLV).

È noto infatti, per gli studi di vari geologi e specialmente dell'ing. Franchi, che nella Liguria occidentale, là dove più estesa e potente è la serie eocenica, vi si può distinguere la sottosegnata successione stratigrafica (come già ben risulta nella Carta geologica al 400.000 delle Alpi Occidentali, 1908), alla quale il Franchi nei suoi ultimi lavori parallelizza (precisandone l'età nel modo sottosegnato) i terreni della Liguria orientale, cioè:

---

(1) Come pure già appariva chiarissimo nella mia Carta geologica al 100.000 dello "Appennino settentrionale „ pubblicata nel 1891.

Digitized by Google

	Liguria occidentale	Liguria orientale
Priaboniano	*sup.* — Potente zona di arenarie e calcari a Fucoidi ed Helmintoidi (*Zona ad Helminthoida,* di Franchi)	Calcari a Fucoidi ed Helmintoidi.
	inf. — Zonula di Scisti variegati, rossicci	Argilloscisti ofiolitiferi.
	inf. — Potente zona di Scisti argillosi, calcarei ed arenacei (*Flysch* di Franchi)	*Macigno.*
	Auversiano e **Parisiano.** — Calcare nummulitico basale	Calcare nummulitico basale.

Orbene, contro tale proposto parallelismo, direi *priaboniano*, (a parte la posizione del *Macigno* di cui già discussi antecedentemente) si oppongono parecchi dati di fatto, di cui cito due fondamentali:

1° Gli Argilloscisti ofiolitiferi della Liguria orientale, se hanno qualche somiglianza col cosidetto *Flysch* della Liguria occidentale, in realtà se ne distinguono nettamente perchè contengono Inocerami, Ammoniti, Pticodi, ecc., mentre che detto *Flysch* contiene lenti calcaree con Nummuliti, Assiline, Ortofragmine, ecc.

2° Anche nell'Emilia e Liguria orientale, là dove la formazione eocenica è ben sviluppata e completa, si osserva pure una serie analoga (compresi gli Scisti variegati) a tutta quella eocenica (detta *Flysch*) della Liguria occidentale; ma è molto *sotto di essa* che compaiono gli Argilloscisti ofiolitiferi.

Così, per esempio, nella Valle dell'Aveto (Bobbiese-Rezoaglio) osservasi la seguente potentissima serie, abbastanza regolare:

Digitized by Google

Eocene:

Grande zona di banchi arenacei (*Macigno*), come in regione Boschi-Castagnola, ecc.).

Zonula di Scisti marnosi variegati, rossicci, tra le arenarie (Vallone di R. Freccio).

Grande zona di Scisti marnosi e arenacei (regione di Salsominore).

Zona di Calcari svariati (Villa Sanguineto-Bazzini, ecc.) che nel vicino Bobbiese presenta Nummuliti, Assiline, Ortofragmine, ecc.

Cretaceo. — Argilloscisti ofiolitiferi (Lagoscuro-Madonna di Castel Sottano).

Così pure, se ci portiamo più ad Est, nell'Appennino Tosco-romagnolo, rivediamo un'analoga potentissima e sviluppatissima serie; per esempio, percorrendo la Val Sieve, malgrado parecchie ondulazioni e varii corrugamenti, si può osservare in com plesso la seguente serie:

Eocene:

Potente zona di Scisti marnosi ed arenacei (Monti di S. Godenzo-S. Benedetto).

Zonula di Scisti marnosi variegati, rossicci, tra le arenarie (Sanbavello) (1).

Potente zona di Scisti e strati marnosi ed arenacei (Dicomano-Sanbavello).

Calcari a Fucoidi e Calcari con Nummuliti ed Orbitoidi (Bassa Val della Sieve sino ai dintorni di Dicomano).

Cretaceo. — Argilloscisti a Inocerami, Ammoniti, ecc. (raccolti in quantità dal marchese Strozzi nei dintorni di Pontassieve).

Orbene devesi ben notare che la sovraccennata zonula di Scisti marnosi *variegati* (rossigno-violacescenti) che compare con qualche costanza quasi in mezzo alla serie eocenica dell'Appennino settentrionale, dalle Alpi Marittime alla Toscana, non è da confondersi (2) cogli Scisti rossigni svariati (il cosidetto *Flysch*

(1) Notisi che questa zonula caratteristica si può seguire per una settantina di chilometri dai Monti del Mugello settentr. all'alta Val Tiberina.

(2) Del resto è ben noto come questa *facies* di Scisti variegati compare tante e tante volte attraverso la serie stratosferica dal Cambriano in poi e ne abbiamo diversi casi nello stesso Appennino, sia nel Mesozoico, sia nel Cenozoico.

Digitized by Google

rouge inferiore, *Suessoniano*, ecc.) che si incontrano sovente alla base dell'Eocene e fanno spesso passaggio al Cretaceo. Così, per es. gli *Scisti rossi*, con indizio di trasgressività, che si trovano alla sommità del Cretaceo ed alla base del Nummulitico nella Liguria occidentale (V. foglio al 100.000 di S. Remo, dove essi sono posti dubitativamente nel *Daniano*); così pure gli *Argilloscisti rossigni* (taluni con Pticodi) che appaiono specialmente nella parte superiore degli Scisti ofiolitiferi dell'Appennino settentrionale; così anche gli *Scisti policromi* dei fogli al 100.000 della Toscana pubblicati dall'Ufficio geologico, segnati come *Scaglia*, attribuiti al *Senoniano*, ma colla giusta indicazione che essi racchiudono spesso Calcari nummulitici, ciò che ne precisa la parziale appartenenza all'Eocene inferiore (*Suessoniano*, *Spilecciano* o piani analoghi), mentre che solo la loro parte inferiore, con rari Pticodi, è già riferibile al Cretaceo (*Senoniano* sup.). Salvo che per cretacizzare tutti questi Scisti policromi si accolga il dubbio, espresso dall'ing. Franchi nell'ultima sua Memoria del 1927, che si tratti di Nummuliti preeoceniche; questione delle Nummuliti mesozoiche che pare ben fondata in certi casi, ma che, citata nel caso specifico (cioè di veri banchi nummulitici connessi col *Macigno* dell'Eocene medio-superiore), parmi abbia un valore un po' analogo a quello (opposto) degli Inocerami eocenici, delle Ammoniti eoceniche, dei Pticodi creduti miocenici, degli Ittiosauri designati come Gaviali e simili determinazioni ed indicazioni state proposte per forzatamente eocenizzare gli scisti ofiolitiferi inglobanti fossili assolutamente caratteristici del Cretaceo.

Riassumendo e per ora limitandoci a stabilire la distinzione principale delle contestate formazioni geologiche dell'Appennino, nei grandi piani geologici, credo se ne possa presentare il quadro sintetico generale come è indicato nella pagina seguente.

Digitized by Google

CONCLUSIONE

Dopo tutti i varii dati di fatto, sommariamente sovra esposti, paleontologici (p. 13), tettonici (p. 15), litologici (p. 20), stratigrafici (p. 23) e comparativi (p. 26), posso conchiudere con sempre maggiore sicurezza che la serie geologica completa dell'Appennino settentrionale, per le formazioni in questione, è schematicamente la seguente:

Potente serie comprensiva argilloso-calcareo-arenacea, con *facies* eteropiche o di lateralità, o di alternanza, cioè: ora prevalentemente arenacea (specialmente verso l'alto), costituendo il cosidetto *Etrurio* o *Macigno*; ora prevalentemente calcarea (specialmente verso il basso), costituendo il cosidetto *Ligu*riano o *Calcare a Fucoidi* (*Condriti*) *ed Elmintoidi*; talora con una zonula rossigno-violacescente verso la metà della serie; talora con una, più o meno potente, zona scistosa (marnoso-argilloso-arenacea, designata da taluni come *Flysch*) nella parte inferiore della serie; talora con una zona calcareo-nummulitifera alla base (il tipico *Nummulitico*).	**Eocene.**
Scisti policromi (la cosidetta *Scaglia*) con Calcari nummulitiferi verso l'alto. con denti di Pticodi verso il basso.	
Potente serie comprensiva di Argilloscisti (*Argille scagliose*, *Galestri* p. p.) grigio-brunastri, talora rossigni o policromi (specialmente verso l'alto), con *Calcari alberesi* (str. s.), *Pietraforte*, ecc.; serie racchiudente Cicadeoidee, Radiolariti di tipo mesozoico, Calpionelle, Inocerami, Ammoniti, Pticodi, Ittiosauri, ecc. ed inglobante Ofioliti o Pietre Verdi svariate (Serpentine, Oficalci, Peridotiti, Diabasi, Eufotidi, ecc.).	**Cretaceo.**
Calcari bianco-grigiastri ad Aptici	**Infracretaceo.**

Digitized by Google

Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati (e dei dinaftili, ecc.).

Considerazioni sul grande numero di antipodi ottici privi di atomi asimmetrici, che ne possono derivare.

Nota IV di LUIGI MASCARELLI
presentata dal Socio nazionale residente Felice Garelli.

La chimica del difenile e dei suoi derivati presenta ancora vari problemi insoluti. Tra questi particolarmente interessante è quello della interpretazione dei fenomeni di isomeria ottica che si osservano in alcuni suoi derivati.

Da qualche tempo (1) mi sto occupando di questo.

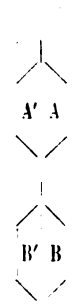
Dall'esame di tutti i derivati che dai vari ricercatori erano stati fino allora scissi in antipodi ottici e di quelli che non lo poterono essere, confronto da me fatto nella Nota I (2), sono giunto alla scelta della struttura da assegnarsi al difenile ed ai suoi derivati e, basandomi sulle numerose ricerche di autori inglesi e tedeschi, e confortando queste con esperienze mie, ho tratto le conclusioni essenziali sulle condizioni che si richieggono perchè la molecola dei vari derivati del difenile diventi strutturalmente asimmetrica. Nuove ricerche che confermano le conclusioni a cui ero arrivato precedentemente sono riportate nella Nota II (3). Nella nota III (4) ho esteso le considerazioni svolte a proposito del difenile anche ai fenomeni di stereoisomeria che possono essere presentati dai derivati delle mono-fenil-naftaline e dei dinaftili.

(1) " Giornale di Chim. Ind. ed Applicata „, Milano, 1926, 572.
(2) " R. Acc. Lincei „, *6* (6), II, 60 (1927).
(3) " Gazz. Chim. Ital. „, *58*, 627 (1928).
(4) " Gazz. Chim. Ital. „, *58*, 791 (1928).

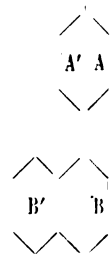
Digitized by Google

Se col procedimento seguito in questa terza Nota si volessero prendere in considerazione tutte le possibili sostituzioni, singole o multiple, che si possono effettuare in qualsiasi posizione delle molecole risultanti dalla unione, mediante legame semplice, di due nuclei, e se si volesse tosto riconoscere se la molecola che ne risulta è o no asimmetrica, il computo diverrebbe assai complesso.

In questa Nota ricorro quindi ad un artificio assai semplice per giungere rapidamente allo scopo. [È conveniente per ora fare astrazione dalle posizioni 8 8′, le quali possono in qualche caso (Nota III) esercitare influenza particolare].

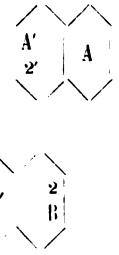


I
difenile

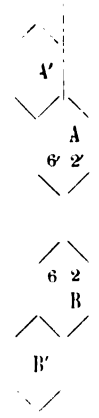


II
α-fenil-naftalina

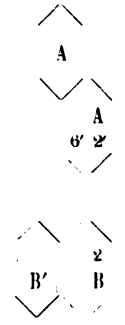
III
β-fenil-naftalina



IV
1-1′-dinaftile



V
2-2′-dinaftile



VI
1-2 -dinaftile

Digitized by Google

In ognuno dei prodotti corrispondenti agli schemi I ... VI i due nuclei di cui risulta composta la molecola sono uniti da un legame che può funzionare da asse di rotazione e siccome, per quanto ho dimostrato nelle Note precedenti, è condizione essenziale per l'asimmetria molecolare che i due nuclei non possano ruotare liberamente l'uno rispetto all'altro, ma che siano costretti ad una oscillazione quasi semicircolare, così si dovrà:

1) Osservare che siano presenti quei sostituenti necessari e sufficienti per produrre oscillazione semicircolare. (È sufficiente per questo che almeno tre delle quattro posizioni più vicine a quella in cui esiste il legame che stabilisce l'unione dei due nuclei — posizioni che possiamo denominare *orto* per rispetto a tale legame — siano occupate da sostituenti opportuni).

2) Prolungare (immaginando che i due nuclei costituenti la molecola giacciano nello stesso piano, p. es. quello del foglio) da ambe le parti la retta che segna il legame esistente fra i due nuclei della molecola ed osservare se le parti di destra (A, B) in cui rimane diviso ogni nucleo, sono o no l'immagine speculare delle rispettive parti di sinistra (A', B'). La molecola è strutturalmente asimmetrica solo quando nessuna delle parti di destra è l'immagine speculare della corrispondente di sinistra.

Con questo artificio possiamo giudicare in ogni caso in cui trattisi di composti risultanti dalla unione per legame semplice di due nuclei qualisivogliano. Inoltre subito riesce chiaro che per tutti i derivati dei tre dinaftili si avrà asimmetria non appena in essi comparirà l'oscillazione semicircolare.

E perciò, nel caso dei tre dinaftili si avrà che:

1) Dei *derivati del* 1.1'-*dinaftile* saranno asimmetrici (oltre a quello che contiene un sostituente in una delle posizioni 2-2') tutti gli innumerevoli altri polisostituiti, purchè in essi sia sempre impegnata almeno una delle posizioni 2-2'. Le sostituzioni in 4-4' non possono avere influenza in questi fenomeni.

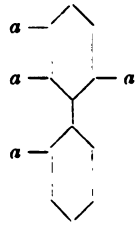
2) Dei *derivati del* 2.2'-*dinaftile* saranno asimmetrici tutti quelli polisostituiti che contengano almeno tre sostituenti distribuiti fra le posizioni 2.6.2'.6'.

3) Dei *derivati dell'*1.2'-*dinaftile* saranno asimmetrici tutti quelli polisostituiti che contengano almeno due sostituenti distri-

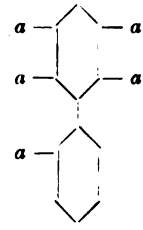
Digitized by Google

buiti fra le posizioni 2.2′.6′. La sostituzione in 4 non può avervi alcuna influenza.

La struttura dei tre dinaftili è infatti tale per cui, tosto che i due nuclei costitutivi della molecola sono costretti (per la presenza di opportuni sostituenti nelle volute posizioni) alla oscillazione semicircolare l'uno rispetto all'altro, lo scheletro fondamentale della molecola acquista configurazione asimmetrica, che nessun nuovo sostituente è più in grado di togliere. La struttura dello scheletro fondamentale della molecola del difenile invece è tale per cui, anche quando la molecola è diventata asimmetrica per opportune sostituzioni, può, in seguito ad ulteriori sostituzioni, tornare simmetrica: basti citare ad es. i tipi corrispondenti agli schemi VII e VIII.



VII
(asimmetrica)



VIII
(simmetrica)

Naturalmente i derivati della serie delle mono-fenil-naftaline mostreranno un comportamento intermedio tra quello del difenile e quello dei dinaftili, e ciò a causa della contemporanea presenza nella loro molecola di un nucleo benzenico e di uno naftalico.

Se cerchiamo di estendere tale semplice artificio ai più svariati composti risultanti dalla unione (per legame semplice) di due nuclei qualisivogliano (dipirrili, dipiridili, dichinolili, diantracili, ecc.) vediamo che è grandissimo il numero delle molecole capaci di fornire antipodi ottici pur senza contenere alcun atomo asimmetrico e che si presentano dei casi interessantissimi i quali meritano di essere posti in evidenza in una prossima Nota.

Digitized by Google

Nuovo procedimento per studiare le variazioni della resistenza all'urto su barrette intagliate dovute al fenomeno dell'invecchiamento.

Nota dell'Ing. RAFFAELLO ZOIA
presentata dal Socio nazionale non residente Camillo Guidi.

1. — Procedimenti generalmente usati.

È noto che la resilienza di un acciaio è, tra le varie proprietà che subiscono variazioni col tempo in seguito a deformazione permanente praticata a freddo (invecchiamento), una di quelle che ne risente in modo più appariscente gli effetti. Per deformare il metallo furono seguite diverse vie:

A) *Per compressione:* è il metodo ordinariamente usato (1). È da osservare che anche procedendo con grande accuratezza (e prima avvertenza è naturalmente un'appropriata ricottura preliminare) permangono tra i singoli valori delle prove di una stessa serie sbalzi molto forti, talvolta anche maggiori dell'80 %; sbalzi inevitabili perchè dovuti allo " stato della zona in cui va a cadere l'intaglio della barretta di saggio „ più o meno " interessata vivamente dalla azione dello sforzo „ (2). Ad esempio, nelle esperienze del Bauer (1) gli scarti massimi dalla media furono nelle varie serie: 33 %, 13 %, 36 %, 23 %, 26 %, 24 %, 66 %, 30 %. È quindi necessario un gran numero di pro-

(1) Tra le numerose esperienze vanno ricordate le prime: *Bauer-Mat. Prüf.*, 1921, pag. 251.

(2) Sirovich, *Studio sulle chiodature delle lamiere*, 1925. — Fry, *Stahl und Eisen*, 1921, pag. 1093.

Digitized by Google

vette per ogni serie onde la media dei singoli valori della resilienza dia affidamento di sufficente approssimazione.

B) *Per tensione* (1):

Per piccole deformazioni vi è l'inconveniente che le superfici di scorrimento non sono uniformemente ripartite, come è noto, su tutta la lunghezza del saggio, ma cominciando dapprima ad apparire alle due estremità, si propagano poi successivamente a tutta la provetta. Se non si trascura questo fatto si possono tuttavia ottenere risultati soddisfacenti (2).

C) *Per flessione:*

Meno conveniente ancora è queste metodo, come è facile riconoscere sperimentalmente, per i notevoli scarti, ancora maggiori che col primo e col secondo.

D) *Per trafilatura* (3):

Procedimento molto pratico: con acciai dolcissimi si può facilmente giungere a ridurre la sezione fino ad oltre il 50 %, con opportuno numero di passate e senza alcuna ricottura. Le divergenze tra i singoli valori della resilienza sono sensibilmente inferiori a quelle che si verificano col metodo A).

Oltre al notevole inconveniente degli sbalzi tra i risultati di prove eseguite in identiche condizioni ve ne è un altro, pure comune a tutti questi sistemi: le prime misure di resilienza non si possono eseguire immediatamente dopo la deformazione, ma per la necessità di ricavare la provetta di saggio, decorre sempre parecchio tempo tra la deformazione e la prima prova. Col metodo seguito dal Bauer tale inconveniente era alquanto ridotto: egli agiva infatti per compressione su barrette pressochè delle dimensioni finali e con una rigonfiatura centrale;

(1) Zoia, *Rendiconto XI riunione Associazione Italiana per gli Studi sui materiali da costruzione*, 1926, pag. 28.

(2) Lav. cit., pag. 31.

(3) Cfr. Zoia, Comunicazioni 1ª e 2ª alla XII riunione Assoc. It. Studi mat. costr., settembre 1928.

Digitized by Google

era così ridotta di molto la lavorazione dopo la deformazione. Col metodo della trafilatura un espediente molto semplice è quello di trafilare una barra quadra con ultima passata 10×10 (per le barrette Mesnager): dopo la trafilatura non rimane che segare le barrette ed intagliarle, operazioni che possono essere fatte in brevissimo tempo.

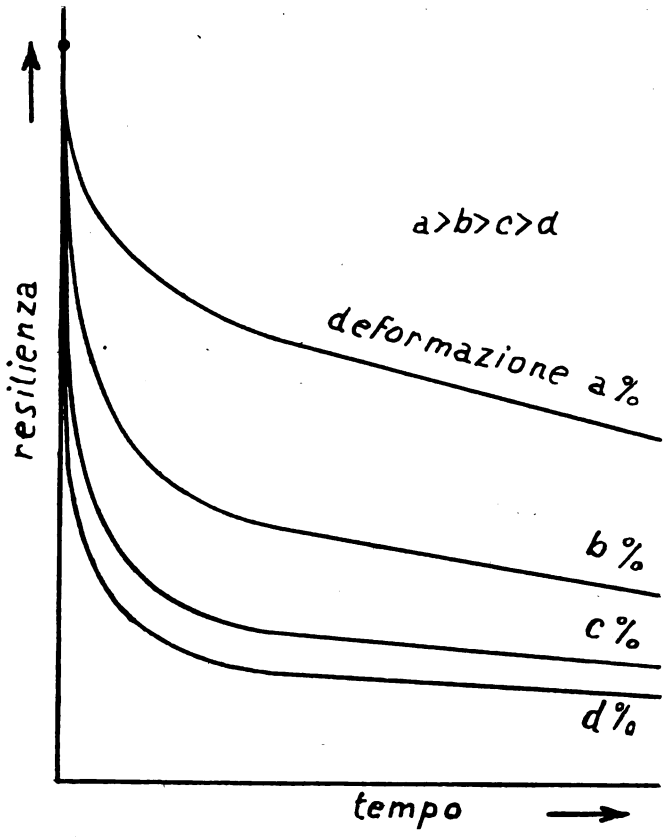


Fig. 1.

Volendo studiare sistematicamente il fenomeno dell'invecchiamento, in ogni caso sono da prendersi in considerazione le due variabili *tempo* e *deformazione percentuale*. I risultati possono essere riassunti nei due diagrammi resilienza-tempo (con curve di eguale deformazione percentuale) (Fig. 1), e resilienza-defor-

Digitized by Google

mazione percentuale (con curve di eguale periodo d'invecchiamento) (Fig. 2).

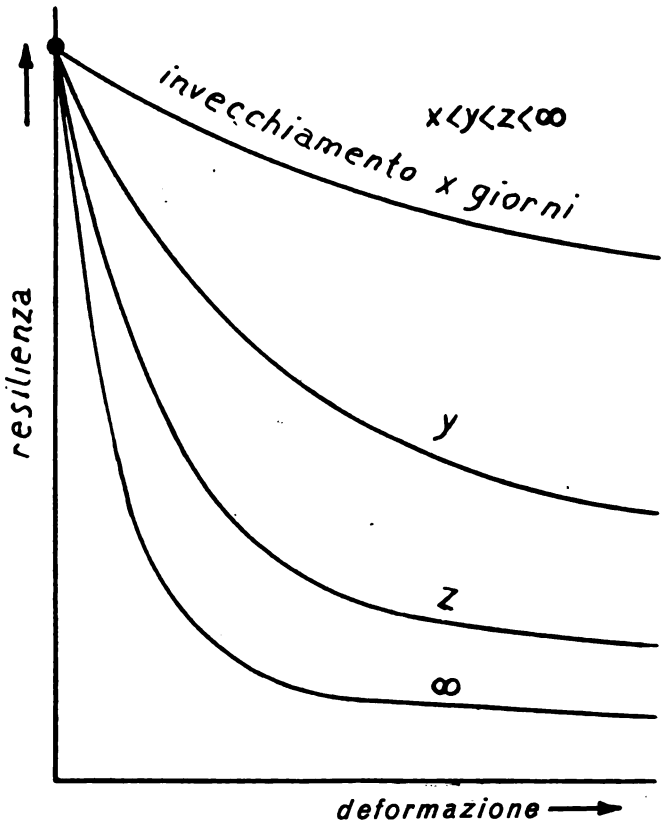


Fig. 2.

II. — Nuovo procedimento.

La deformazione è prodotta sulle barrette già ultimate mediante un colpo di moderata e nota energia applicato collo stesso maglio che serve per le prove all'urto (1). Le barrette vengono

(1) Facendo diminuire l'altezza di caduta del maglio o del pendolo a valori da determinarsi in precedenza, si diminuisce l'energia disponibile al numero di kgm. desiderati.

Digitized by Google

poi spezzate dopo diversi intervalli di tempo con un secondo colpo di intensità regolamentare ed *è misurato il lavoro assorbito nella rottura di esse* (1).

VANTAGGI: 1) La prima misura (2° colpo) può essere eseguita alla distanza di 10″ dalla deformazione (1° colpo). Dato l'andamento delle curve che scendono con grande rapidità in principio (v. Fig. 1), ciò costituisce un vantaggio rispetto agli altri metodi coi quali, come si è visto, è impossibile avere un primo valore della resistenza all'urto immediatamente dopo la deformazione.

2) Per la localizzazione della deformazione nella zona di rottura e la perfetta uniformità di tale deformazione in tutte le barrette, i singoli valori della resistenza all'urto sono molto più concordanti tra loro: nel caso dell'acciaio *B* (v. unita tabella) risultarono, ad esempio, scarti massimi nelle diverse serie del 7,1 %; 7,8 %; 8,7 %; 13,9 %; 6,5 %; 5,7 %; 2,7 %; con una media del 7,5 % contro uno scarto massimo medio del 31 % nelle esperienze citate del Bauer.

3) Essendo la deformazione, a differenza degli altri metodi, prodotta per urto, essa è direttamente confrontabile, perchè della stessa natura, colla sollecitazione dinamica colla quale si spezza la barretta (v. nelle Figg. 3 e 4 la linea inclinata a 45°).

Lo studio sistematico del fenomeno dell'invecchiamento dipende sempre dalle due variabili *tempo* e *deformazione,* misurando peraltro quest'ultima col numero di chilogrammetri del 1° colpo (dai quali appunto essa dipende). I risultati vengono chiaramente riassunti nel diagramma lavoro di rottura-deformazione, portando come ordinate la somma dei lavori assorbiti nel 1° e 2° colpo: si ottiene una prima linea fissa (retta uscente

(1) È quasi inutile osservare che non è più il caso di parlare di resilienza (grandezza, come è noto, non propriamente definita e che ha un valore comparativo solo nel caso in cui le prove vengano eseguite in condizioni scrupolosamente identiche), poichè in questa particolare prova all'urto sono modificate le condizioni normali e precisamente la barretta è già alquanto piegata per effetto del primo colpo.

Digitized by Google

dall'origine ed inclinata di 45°), ed una seconda linea che varia di posizione col tempo d'invecchiamento e che riferita alla prima dà il lavoro assorbito nel 2° colpo, mentre se è riferita all'asse delle ascisse dà l'energia totale richiesta per rompere la barretta nei due colpi. Si ottengono delle curve interessanti, aventi la

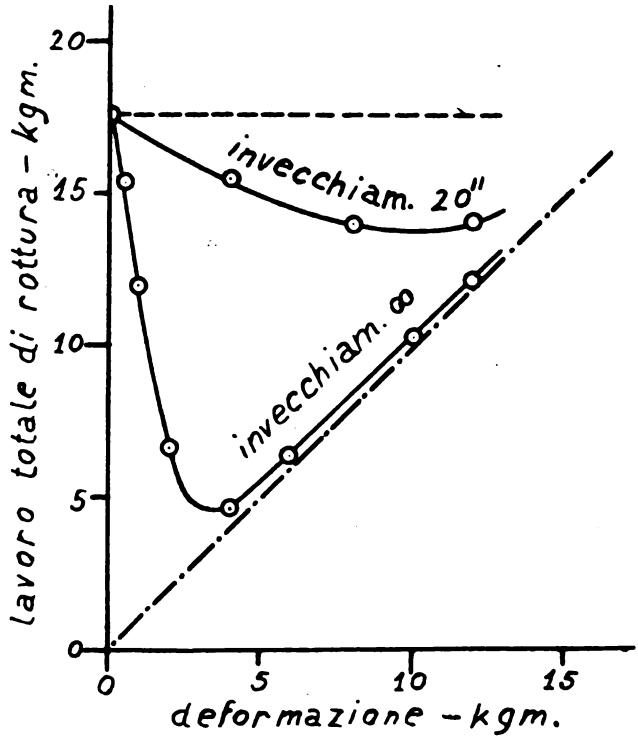


Fig. 3.

particolarità di scendere fino ad un minimo per poi risalire, e tale andamento è tanto più accentuato quanto più il materiale è invecchiato (1). Nelle Figg. 3 e 4 riferisco come esempio i diagrammi per *due acciai il cui comportamento all'invecchiamento*

(1) Nelle Figg. 3 e 4 sono tracciate le curve corrispondenti a 20″ e ad un tempo lunghissimo d'invecchiamento, che si può, come è noto, realizzare con rinvenimento di qualche ora a 200°-300°.

Digitized by Google

appare sostanzialmente differente, riservandomi di comunicare tra breve i risultati di esperienze in corso su una serie completa

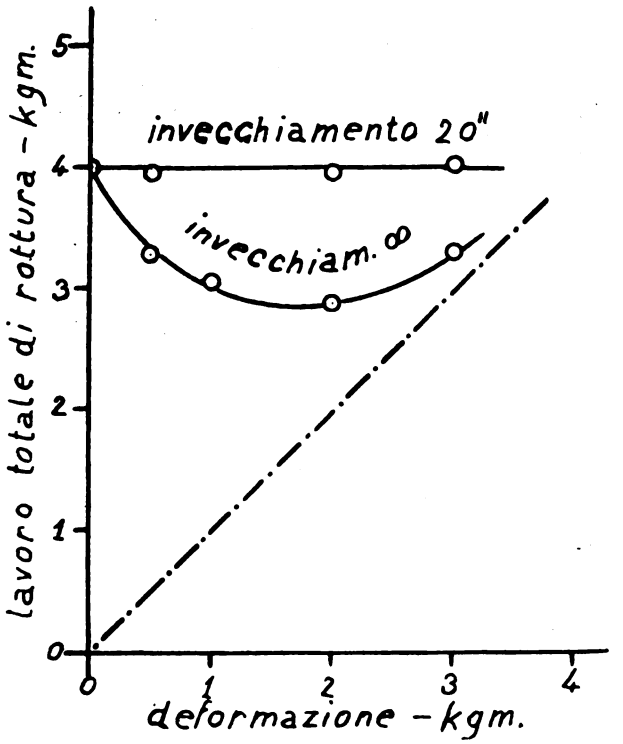


Fig. 4.

di acciai onde tener conto anche della composizione chimica che ha un'influenza notevole, come è noto, sul fenomeno.

(Vedi *Tabella* a pagina seguente).

Digitized by Google

LAVORO TOTALE DI ROTTURA (kgm.) — Acciaio *B*

(Barretta Mesnager — Pendolo Charpy).

Tempo di invecchiamento	Energia assorbita nel 1° colpo: kgm.				
	0	0,5	1	2	3
20 secondi	3 978	4 070	— —	3 655	3 888
	3 876	3 675	— —	3 990	4 033
	4 050	4 171	— —	3 990	3 816
	3 978	4 171	— —	3 990	4 414
	3 978	3 773	— —	4 162	4 258
	— —	3 871	— —	3 990	3 959
Medie	**3 972**	**3 955**	— —	**3 968**	**4 061**
Rinvenimento di 4 ore a 260°-270°	— —	2 839	3 249	3 057	3 410
	— —	3 578	3 249	2 816	3 284
	— —	3 390	3 075	2 816	3 410
	— —	3 109	3 075	2 959	3 284
	— —	3 578	2 862	2 816	3 244
	— —	3 295	2 862	2 888	3 284
Medie	— —	**3 298**	**3 062**	**2 892**	**3 819**

Laboratorio Sperimentale della R. Scuola d'Ingegneria di Torino.

L'Accademico Segretario
Emilio Repossi.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla**.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele**.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4° di 70 pagg e 96 tav.

Opere scelte di Amedeo Avogadro (per cura di I. **Guareschi**).

Torino, Unione tipografico-editrice torinese, 1911, 1 vol. in-4° (4 csn., CXL-492 pp., 1 ritr.).

Miscellanea di studi danteschi. *Dante e il Piemonte.*

Torino, Fratelli Bocca editori, 1922, in-8° (VIII-648 pp.).

Digitized by Google

SOMMARIO

Presidenti della Reale Accademia delle Scienze di Torino dalla sua fondazione . . . . . *Pag.* v

Elenco degli Accademici Nazionali residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 31 dicembre 1928 . . . „ vii

Mutazioni avvenute nel Corpo accademico dal 1° gennaio al 31 dicembre 1928 . . . . . „ xxiii

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 18 Novembre 1928 . *Pag.* 1

Somigliana (Carlo). — Sulla misura della Terra e la gravimetria „ 4

Sacco (Federico). — Nuovi dati di fatto riguardo l'età degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino . . . . . „ 11

Mascarelli (Luigi). — Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati (e dei dinaftili, ecc.). Considerazioni sul grande numero di antipodi ottici privi di atomi asimmetrici, che ne possono derivare . . . . . „ 31

Zoia (Raffaello). — Nuovo procedimento per studiare le variazioni della resistenza all'urto su barrette intagliate dovute al fenomeno dell'invecchiamento . . . . . „ 35

Tip. Vincenzo Bona - Torino

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIV, DISP. 2ª, 3ª, 4ª, 5ª E 6ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

DISTRIBUZIONE DELLE ADUNANZE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1928-929

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1928 - 18 novembre	1928 - 25 novembre
» - 2 dicembre	» - 9 dicembre
» - 16 »	» - 23 »
» - 30 »	1929 - 6 gennaio
1929 - 13 gennaio	» - 20 »
» - 27 »	» - 3 febbraio
» - 10 febbraio	» - 17 »
» - 24 »	» - 3 marzo
» - 10 marzo	» - 17 »
» - 24 »	» - 7 aprile
» - 14 aprile	» - 28 »
» - 5 maggio	» - 12 maggio
» - 19 »	» - 26 »
» - 9 giugno	» - 16 giugno
» - 23 »	» - 30 »

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 25 Novembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono intervenuti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: D'Ovidio, Peano, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Pochettino e il Segretario Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: De Sanctis, Ruffini, Stampini, Brondi, Einaudi, Patetta, Vidari, Faggi, Luzio, Jannaccone e Solari.

Scusano l'assenza i Soci Guidi e Mattirolo.

Il Presidente apre l'adunanza commemorando brevemente il Socio Prof. Giuseppe Prato, morto il 18 agosto, ed il Professore Piero Giacosa, proposto a Socio della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali e morto il 17 ottobre.

Il Presidente comunica quindi una lettera di ringraziamento di S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione, giunta in risposta ad un telegramma di omaggio inviatogli in nome dell'Accademia in occasione dell'apertura del nuovo anno. Egli propone in seguito all'Accademia che, per la fausta notizia della scoperta fatta in questi giorni da S. A. R. il Duca degli Abruzzi delle sorgenti dell'Uebi Scebeli, sia votato il seguente Ordine del giorno:

" La R. Accademia delle Scienze, che altamente si onora di avere fra i suoi Soci residenti S. A. R. Luigi di Savoia, Duca degli Abruzzi, apprende col più vivo compiacimento che il va-

Digitized by Google

loroso ed illustre esploratore ha condotto rapidamente e felicemente a termine la studiata esplorazione alla ricerca ed alla scoperta delle sorgenti dell'Uebi Scebeli.

" Alla nobile gara di ardite iniziative e di geniali imprese, le quali dànno impronta nuova e caratteristica al fervore di vita operosa che ora anima il nostro Paese, il Principe è partecipe e, ancora una volta, vittorioso.

" La R. Accademia plaude al successo della spedizione, che svela un altro dei segreti dell'Africa ancora misteriosa, reca nuovo onore al Nome ed alla Casa di S. A. R., e rende sempre più grande e brillante il contributo, che l'Italia, per merito e coi sacrifizi della gloriosa schiera dei suoi esploratori, ha portato agli studi africani ".

L'Accademia vota per acclamazione e con vivo plauso l'Ordine del giorno propostole.

Il Socio Peano comunica all'Accademia ch'è giunta in omaggio l'opera: *Calcolo numerico* (ed. Zanichelli, a. 1928). di Ugo Cassina, e la presenta con le seguenti parole:

" Questo libro espone la storia dei sistemi di numerazione dai popoli antichi ad oggi e le varie regole per le operazioni aritmetiche, fra cui la moltiplicazione fulminea degli indiani, che permette di scrivere il prodotto di due numeri di più cifre, senza passare per i prodotti parziali.

" Degno di nota speciale è il capitolo sulle " Approssimazioni numeriche ", esposte in modo rigoroso e semplice: poichè rigore e semplicità sono sempre congiunti. E cita alcuni risultati falsi cui si pervenne con teorie inesatte delle approssimazioni.

" Il libro contiene pure i calcoli sul calendario, i prodotti decimali e le loro applicazioni; vari calcoli di numeri trascendenti e di radici di equazioni. Le indicazioni storiche ampie ed esatte rendono lo studio vivo ed attraente.

" Questo volume è di massimo interesse per la matematica pura e per le applicazioni; contiene molte ricerche poco note, o del tutto nuove; ed è da augurarsi la sua diffusione per il progresso della scienza matematica ".

Si procede pure alla votazione per l'assegnazione del premio

Digitized by Google

Gautieri, che non potè esser fatta nell'adunanza precedente per mancanza del numero legale. La votazione, secondo lo Statuto del Premio, è fatta per schede segrete. I votanti sono in numero di 21 e lo scrutinio dà 19 voti favorevoli sul nome di Ettore Cozzani, proposto nella Relazione della Commissione stesa dal Socio on. Cian, contro due schede bianche.

Il Presidente invita quindi l'Accademia a procedere alla votazione per la nomina del Tesoriere, che, scaduto il triennio, può essere riconfermato. La votazione, rimandata, come la precedente, dall'adunanza dello scorso luglio all'attuale, per la mancanza in quella del numero legale, dà i seguenti risultati: Votanti 21: al Socio Prof. Modesto Panetti voti 20; schede bianche 1. Risulta quindi riconfermato alla carica di Tesoriere pel triennio 1° luglio 1928 - 30 giugno 1931 il Socio Prof. Modesto Panetti, il quale ringrazia l'assemblea.

Gli Accademici Segretari:
Emilio Repossi
Adolfo Faggi

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 2 Dicembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Panetti, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli e il Segretario Repossi.

Scusa l'assenza il Socio Guidi.

Il verbale è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio Sacco presenta in omaggio all'Accademia una sua Nota su *I Solchi di Montjovet* e ne espone brevemente il soggetto.

In seguito il Socio Peano presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota della Dott.ssa Cesarina Boccalatte dal titolo: *La Geometria basata sulle idee di punto e angolo retto.*

Digitized by Google

LETTURE

La Geometria basata sulle idee di punto e angolo retto.

Nota della Dott.ssa CESARINA BOCCALATTE
presentata dal Socio nazionale residente Giuseppe Peano.

Euclide nel primo libro degli *Elementi* (Versione Vacca, 1916) comincia così:

1. " Punto è ciò che non ha parti „.
2. " Linea una lunghezza senza larghezza „

Queste proposizioni esprimono il punto e la linea mediante le parole *parte*, *lunghezza*, *larghezza*, e questi termini non sono definiti precedentemente.

La proposizione:

3. " Estremi di una linea sono punti „, non è un'eguaglianza logica; non è la definizione di estremi, poichè dal sapere che gli estremi sono punti, non risulta che cosa siano gli estremi. Quindi queste proposizioni non sono vere definizioni, come da parecchi sono intese. Come osserva il Vacca nella sua Edizione, la parola *ὅρος*, che si trova nel testo greco, significa *termine*, e non già *definizione*, che in greco è *ὁρισμός*.

Quindi quelle prime pagine sono una raccolta di termini, come un dizionario, e le proposizioni relative non sono definizioni, nè postulati; sono schiarimenti.

Le definizioni di Euclide si riproducono in tutti i libri scolastici dei secoli successivi. Cominciamo a vedere qualche differenza in Nicolò Tartalea, " *Euclide Megarense* „ (Venezia, 1565).

Definizione 1. " Il ponto è quello che non ha parti „.

Definizione 2. " La linea è una lunghezza senza larghezza, li termini della quale sono ponti „.

Questa comprende le definizioni 2 e 3 di Euclide.

Digitized by Google

[illegible]

[illegible] composte di un numero finito di punti.

1) Peano, *I principii di Geometria logicamente esposti* (Torino 1889).

In questo libro l'A. partendo da due idee primitive, *punto e segmento*, definisce la retta, il piano, il triangolo, l'angolo, le parallele; e premesso un sistema di postulati, ne dimostra le

loro proprietà, costruendo così tutta la geometria di posizione. Accenna poi che per costrurre tutta la Geometria elementare, occorre ancora qualche altra idea primitiva, per es. quella di *moto*. Per fare questa analisi, l'autore si serve delle notazioni della Logica Matematica.

Egli riprende questo studio in modo più diffuso nell'articolo: *Sui fondamenti della Geometria*. " Riv. di Matematica „, a. 1894.

M. Pieri, rapito alla scienza in giovane età nel 1913, studiò questa questione in una serie di pubblicazioni fatte coi simboli della Logica-Matematica, " la cui utilità a ragione non può negarsi segnatamente in quest'ordine di studi „.

Le prime si riferiscono alla sola *Geometria di Posizione*, in " Atti R. Accademia di Torino „, 1895, 1896 e 1897; " Rivista di Matematica „, a. 1896; e specialmente in " Memorie Accad. delle Scienze di Torino „, a. 1897-98.

Pieri, *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo* (" Memorie R. Accademia di Torino „, a. 1899).

Qui l'A. svolge tutta la geometria elementare con due soli concetti primitivi: il *punto*, ed il *moto*; il moto inteso come rappresentazione di punti in punti.

Definizione. Se a, b, c sono punti, con " a, b, c sono collineari „ si esprime il giudizio: " esiste un movimento (proprio) che rappresenta in sè stesso ciascuno degli a, b, c „.

Segue la definizione di retta a, b: l'insieme dei punti collineari con a, b; ossia l'insieme dei punti che restano fissi in un movimento che lascia fissi a e b, e questa è la definizione di Leibniz.

Definisce il piano; la sfera; la simmetria; la perpendicolarità di due rette; la perpendicolarità tra una retta ed un piano; il segmento, ecc.

E da un sistema di 20 postulati deduce tutte le proprietà di questi enti definiti.

Più tardi il Pieri, *Sur la géométrie envisagée comme système purement logique* (Congrès Intern. de philosophie, Paris, 1900), giunge al risultato che si possa costruire tutta la Geometria elementare colle sole due idee primitive: *punto* e *distanza* tra due punti.

Digitized by Google

E questa seconda idea primitiva non la assume come una relazione fra quattro punti a, b, c, d, sotto la forma: la distanza di a è b è eguale alla distanza da c a d, ma assume soltanto *come primitiva la relazione fra tre punti* a, b, c: " i punti b e c sono equidistanti da a ".

E sviluppa ampiamente questa teoria nelle " Memorie Accademia dei XL ", Roma, 1908.

G. PEANO, *La Geometria basata sulle idee di punto e distanza* (R. Accademia di Torino, a. 1902).

L'A. parte dal lavoro del Pieri, cioè assume le idee di punto e della relazione fra 3 punti: distanza (a, c) = distanza (b, c).

Questa relazione si può risolvere rispetto a, e si leggerà: " il punto a sta sulla sfera di centro c e passante per b ". Ovvero risolta rispetto c: " il punto c sta nel piano normale ad a b nel suo punto medio ". Si può definire la retta per i due punti differenti a e b: " Dire che c è un punto della retta a, b, significa dire che ogni punto, che disti da a e da b quanto c, deve coincidere con c "; ovvero " quando le sfere di centri a e b e passanti per c hanno questo solo punto comune ". Analogamente: " piano (a, b, c) è l'insieme di tutti i punti x tali che ogni punto, che disti da a, b, c quanto x, deve coincidere con x ".

Queste definizioni si debbono a Leibniz (" Math. Schriften ", t. 5, pag. 141 e seguenti): egli se ne vanta e dice " haec definitio mihi est ".

Peano considera poi il punto medio fra due punti a e b, che indica, come nel calcolo geometrico di Möbius, ecc., con $(a + b)/2$; di qui deduce l'eguaglianza dei vettori, le coordinate, ecc.

Sullo stesso soggetto si possono ancora vedere:

O. VEBLEN, *A System of Axiom for Geometry* (" Transactions of the Amer. Mathem. Society ", t. V, luglio 1904, pp. 343-384).

F. SCHUR, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, 1909).

ENRIQUES e AMALDI, in " Questioni riguardanti le Matematiche elementari ".

Digitized by Google

***

Dietro suggerimento del Prof. PEANO, qui spiego come si possano definire tutte le idee geometriche, mediante due idee che assumo come primitive:

punto e *angolo retto.*

Le indicherò con i simboli:

p si legge " punto „.

In quanto segue, a, b, c .... indicano punti.

" $a\,b\,c$ Retto „, si legge " l'angolo $a\,b\,c$ è retto „.

In pratica si riconosce che questa relazione è soddisfatta mediante una squadra; essa sarà l'unico strumento necessario in questa teoria.

Comincio ad enunciare una proprietà:

PROP. 1.

$$a\,b\,c \text{ Retto} \,.\supset.\, c\,b\,a \text{ Retto}.$$

" Se l'angolo $a\,b\,c$ è retto, anche $c\,b\,a$ è retto „.

Questa prima proprietà si dovrà considerare come primitiva, cioè non si deduce da alcuna precedente, che non esiste.

Alla relazione " $a\,b\,c$ Retto „ dò il preciso significato espresso nella teoria dei vettori da

$$(a - b) \times (b - c) = 0.$$

Quindi si può enunciare una seconda proprietà:

PROP. 2.

$$a\,a\,c \text{ Retto}.$$

" Se il punto b coincide con a, l'angolo $a\,b\,c$ è retto „.

La relazione " $a\,b\,c$ Retto „ si può risolvere rispetto ad uno qualunque dei punti che contiene.

Risolta rispetto a, ne risulta come luogo dei punti a, il piano perpendicolare in b alla retta $b\,c$, supposto b e c distinti.

Poniamo pertanto:

Digitized by Google

DEFINIZIONE 1.

$$b \sim = c \,.\, \supset : a \,\varepsilon \text{ Piano } b\,c \,.\, = \,.\, a\,b\,c \text{ Retto.}$$

" Se b è differente da c, allora dire che a sta nel piano $b\,c$, significa che l'angolo $a\,b\,c$ è retto „.

Si deduce dalle nostre convenzioni, in virtù di P. 2:

COROLLARIO 1.

$$b \sim = c \,.\, \supset \,.\, b \,\varepsilon \text{ Piano } b\,c.$$

" Il punto b appartiene al piano $b\,c$ „.

Risolvo ora la relazione " $a\,b\,c$ Retto „ rispetto b, e ne risulta come luogo dei punti b, la Sfera passante per b e di diametro $a\,c$; veniamo così a definire la " Sfera $a\,c$ „, ossia " Sfera di diametro $a\,c$ „.

DEFINIZIONE 2.

$$b \,\varepsilon \text{ Sfera } a\,c \,.\, = \,.\, a\,b\,c \text{ Retto.}$$

Si deduce:

COROLLARIO 2.

$$a, b \,\varepsilon \text{ Sfera } a\,b,$$

" a e b sono punti della sfera $a\,b$ „, conseguenza della P. 2.

COROLLARIO 3.

$$\text{Sfera } a\,b = \text{Sfera } b\,a.$$

Segue dalla proprietà commutativa espressa dalla P. 1.

Vediamo ora come possiamo definire la *linea retta*.

DEFINIZIONE 3.

$$a \sim = b \,.\, \supset \,.\, \dot{} \,.\, c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.\, = \,;$$

$$x \,\varepsilon\, \overline{\text{p}} \,.\, x\,a\,b \text{ Retto} \,.\, \supset_x \,.\, x\,a\,c \text{ Retto.}$$

" Se a è diverso da b, allora dire che c sta sulla linea retta individuata dai punti a e b, significa che comunque si prenda il punto x, in modo che l'angolo $x\,a\,b$ sia retto, ne risulta che anche l'angolo $x\,a\,c$ è retto „.

Possiamo mettere la Def. 3 anche sotto la forma:

Digitized by Google

DEFINIZIONE 3'.

$$c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.=.$$

$$c = a \,.\, \cup \,.\, \text{Piano } a\,b = \text{Piano } a\,c.$$

" Dire che c sta sulla linea retta $a\,b$ significa che o c coincide con a, ovvero il piano $a\,b$ coincide col piano $a\,c$ ".

Si può dare alla Def. 3 ancora un'altra forma:

DEFINIZIONE 3''.

$$c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.=:$$

$$x \,\varepsilon \text{ p.} \, x \,\varepsilon \text{ Sfera } a\,c \,.\, x \,\varepsilon \text{ Sfera } c\,b \,.\, \supset_x \,.\, x = c.$$

" Il punto c sta sulla retta $a\,b$ quando comunque si prenda il punto x, che stia sulle sfere di diametro $a\,c$ e $c\,b$, esso coincide con c ", cioè quelle due sfere hanno il solo punto comune c.

E ancora sostituendo a " Sfera " la sua definizione 2, si ha l'altra forma:

DEFINIZIONE 3'''.

$$c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.=:$$

$$x \,\varepsilon \text{ p} \,.\, a\,x\,c \text{ Retto} \,.\, b\,x\,c \text{ Retto} \,.\, \supset_x \,.\, x = c.$$

" Il punto c sta sulla retta $a\,b$, quando comunque si prenda il punto x, tale che l'angolo $a\,x\,c$ sia retto, e pure l'angolo $b\,x\,c$ sia retto, il punto x deve coincidere con c ".

Ora che abbiamo definito la linea retta, possiamo passare a definire la collinearità.

DEFINIZIONE 4.

$$(a\,b\,c) \text{ Collin} \,.=:$$

$$a = b \,.\, \cup \,.\, a \sim b \,.\, c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b.$$

" Diremo che i punti a, b, c sono collineari, se a coincide con b, ovvero, se essendo a diverso da b, c sta sulla retta $a\,b$ ".

Definiamo ora il rettangolo:

DEFINIZIONE 5.

$$a, b, c, d \,\varepsilon \text{ p} \,.\, \supset \,.\, (a\,b\,c\,d) \text{ Rettangolo} \,.=.$$

$$a\,b\,c \text{ Retto} \,.\, b\,c\,d \text{ Retto} \,.\, c\,d\,a \text{ Retto} \,.\, d\,a\,b \text{ Retto}.$$

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Dicembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. GUIDO GRASSI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Somigliana, Panetti, Ponzio, Majorana, Pochettino e il Segretario Repossi.

Scusano la loro assenza il Presidente Parona ed il Socio Sacco.

Il verbale della seduta antecedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica una lettera del Socio Herlitzka, che accetta l'incarico affidatogli di commemorare il Prof. Giacosa e ringrazia l'Accademia.

In seguito il Socio Majorana prende la parola per presentare in omaggio all'Accademia i due volumi degli *Atti* del Congresso Internazionale dei Fisici tenutosi lo scorso anno a Como, Pavia e Roma in occasione del primo centenario della morte di Alessandro Volta. Il Congresso, al quale parteciparono numerosi fisici d'ogni parte del mondo, e, fra questi, dodici insigniti del premio Nobel, riuscì particolarmente solenne, ed i risultati da esso conseguiti furono così importanti da indurre alcuni fra i più

Digitized by Google

illustri partecipanti a formular la proposta, unanimemente accolta, che il Consiglio di presidenza del Congresso, invece di sciogliersi, rimanesse stabilmente in carica per organizzare future regolari riunioni internazionali di fisici.

Il Socio MAJORANA, a chiarimento di un'osservazione fatta dal Socio SOMIGLIANA sulla priorità del VOLTA nella scoperta della legge che va sotto il nome di " legge di Gay-Lussac „, comunica che il Congresso, udita una comunicazione del Professore AMERIO documentante che il VOLTA riconobbe per primo la costanza del coefficiente di dilatazione dell'aria, fece unanime voto perchè d'ora innanzi nell'espressione della legge di dilatazione dei gas si unisse al nome di GAY-LUSSAC quello del grande fisico comasco.

Il Socio SOMIGLIANA comunica che, secondo gli studi della Commissione Reale per l'Edizione Nazionale delle opere di Alessandro VOLTA, non solo per la legge di Gay-Lussac, ma anche per la legge di Dalton si deve giungere ad un analogo risultato.

In seguito il Socio PANETTI presenta in omaggio all'Accademia il proprio discorso pronunziato per l'inaugurazione del Congresso annuale dell'Associazione Italiana di Aerotecnica dal titolo: *Il contributo della tecnica all'Aeronautica.* Lo stesso opuscolo contiene il discorso di chiusura del Congresso.

Il Presidente presenta all'Accademia i due volumi dell'opera di R. WILLSTÄTTER: *Untersuchungen ueber Enzyme,* e due necrologie di Piero GIACOSA inviate dal Prof. L. MASCARELLI.

Il Socio MATTIROLO dà qualche schiarimento sull'importanza notevole dell'omaggio del Willstätter.

Il Socio SOMIGLIANA presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Dott. B. COLOMBO, intitolata: *Sulla propagazione delle onde sismiche in uno strato piano illimitato,* e ne discorre brevemente.

Digitized by Google

DEFINIZIONE 3. " La linea è la brevissima estensione da un ponto ad un altro „.

Quest'ultima definizione si può anche leggere:

" La retta è il più corto cammino fra due punti „ e sotto questa forma la ritroveremo ancora in Legendre, *Éléments de Géométrie*, 1794. Essa esprime l'idea di retta mediante quella di lunghezza di una linea curva, concetto questo non definito e non semplice.

La proposizione " la retta è minore d'ogni linea contermine „, è un postulato in Archimede, il quale se ne serve, per determinare la lunghezza della circonferenza.

La distinzione delle idee che compaiono in un trattato di geometria, in idee primitive e in idee derivate, delle quali si dà una definizione logica, ha luogo solo ai nostri tempi.

Numerosi sono i lavori dei geometri contemporanei sui principî di Geometria. " Mais les plus complets et les plus approfondis sont ceux qui ont été exécutés au moyen de la Logistique, parce que cet instrument d'abstraction et de précision permet de dévoiler les pétitions de principe, d'éviter les paralogismes et les appels à l'intuition, et de déjouer les associations d'idées et les habitudes de pensée inséparables du langage usuel „. COUTURAT, *Les principes de Mathématiques*, Paris, 1905, pag. 181.

M. PASCH, in *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Leipzig, 1882), costrusse tutta la Geometria di posizione colle sole idee non definite: *punto, segmento rettilineo, regione piana limitata.*

Partendo da questi concetti primitivi definisce la retta indefinita, ed il piano. Per svolgere poi la geometria elementare assume un'altra idea non definita: *il moto*, come concetto di congruenza tra figure qualisiansi composte di un numero finito di punti.

G. PEANO, *I principî di Geometria logicamente esposti* (Torino, 1889).

In questo libro l'A. partendo da due idee primitive, *punto* e *segmento*, definisce la retta, il piano, il triangolo, l'angolo, le parallele; e premesso un sistema di postulati, ne dimostra le

Digitized by Google

loro proprietà, costruendo così tutta la geometria di posizione. Accenna poi che per costrurre tutta la Geometria elementare, occorre ancora qualche altra idea primitiva, per es. quella di *moto*. Per fare questa analisi, l'autore si serve delle notazioni della Logica Matematica.

Egli riprende questo studio in modo più diffuso nell'articolo: *Sui fondamenti della Geometria*, " Riv. di Matematica „, a. 1894.

M. PIERI, rapito alla scienza in giovane età nel 1913, studiò questa questione in una serie di pubblicazioni fatte coi simboli della Logica-Matematica, " la cui utilità a ragione non può negarsi segnatamente in quest'ordine di studi „.

Le prime si riferiscono alla sola *Geometria di Posizione*, in " Atti R. Accademia di Torino „, 1895, 1896 e 1897; " Rivista di Matematica „, a. 1896; e specialmente in " Memorie Accad. delle Scienze di Torino „, a. 1897-98.

PIERI, *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo* (" Memorie R. Accademia di Torino „, a. 1899).

Qui l'A. svolge tutta la geometria elementare con due soli concetti primitivi: il *punto*, ed il *moto*; il moto inteso come rappresentazione di punti in punti.

DEFINIZIONE. Se a, b, c sono punti, con " a, b, c sono collineari „ si esprime il giudizio: " esiste un movimento (proprio) che rappresenta in sè stesso ciascuno degli a, b, c „.

Segue la definizione di retta a, b: l'insieme dei punti collineari con a, b; ossia l'insieme dei punti che restano fissi in un movimento che lascia fissi a e b, e questa è la definizione di Leibniz.

Definisce il piano; la sfera; la simmetria; la perpendicolarità di due rette; la perpendicolarità tra una retta ed un piano; il segmento, ecc.

E da un sistema di 20 postulati deduce tutte le proprietà di questi enti definiti.

Più tardi il PIERI, *Sur la géométrie envisagée comme système purement logique* (Congrès Intern. de philosophie, Paris, 1900), giunge al risultato che si possa costruire tutta la Geometria elementare colle sole due idee primitive: *punto* e *distanza* tra due punti.

Digitized by Google

E questa seconda idea primitiva non la assume come una relazione fra quattro punti a, b, c, d, sotto la forma: la distanza di a è b è eguale alla distanza da c a d, ma assume soltanto *come primitiva la relazione fra tre punti* a, b, c: " i punti b e c sono equidistanti da a „.

E sviluppa ampiamente questa teoria nelle " Memorie Accademia dei XL „, Roma, 1908.

G. Peano, *La Geometria basata sulle idee di punto e distanza* (R. Accademia di Torino, a. 1902).

L'A. parte dal lavoro del Pieri, cioè assume le idee di punto e della relazione fra 3 punti: distanza (a, c) = distanza (b, c).

Questa relazione si può risolvere rispetto a, e si leggerà: " il punto a sta sulla sfera di centro c e passante per b „. Ovvero risolta rispetto c: " il punto c sta nel piano normale ad a b nel suo punto medio „. Si può definire la retta per i due punti differenti a e b: " Dire che c è un punto della retta a, b, significa dire che ogni punto, che disti da a e da b quanto c, deve coincidere con c „; ovvero " quando le sfere di centri a e b e passanti per c hanno questo solo punto comune „. Analogamente: " piano (a, b, c) è l'insieme di tutti i punti x tali che ogni punto, che disti da a, b, c quanto x, deve coincidere con x „.

Queste definizioni si debbono a Leibniz (" Math. Schriften „, t. 5, pag. 141 e seguenti): egli se ne vanta e dice " haec definitio mihi est „.

Peano considera poi il punto medio fra due punti a e b, che indica, come nel calcolo geometrico di Möbius, ecc., con $(a + b)/2$; di qui deduce l'eguaglianza dei vettori, le coordinate, ecc.

Sullo stesso soggetto si possono ancora vedere:

O. Veblen, *A System of Axiom for Geometry* (" Transactions of the Amer. Mathem. Society „, t. V, luglio 1904, pp. 343-384).

F. Schur, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, 1909).

Enriques e Amaldi, in " Questioni riguardanti le Matematiche elementari „.

Digitized by Google

***

Dietro suggerimento del Prof. PEANO, qui spiego come si possano definire tutte le idee geometriche, mediante due idee che assumo come primitive:

punto e *angolo retto.*

Le indicherò con i simboli:

p si legge " punto „.

In quanto segue, a, b, c .... indicano punti.

" $a\,b\,c$ Retto „, si legge " l'angolo $a\,b\,c$ è retto „.

In pratica si riconosce che questa relazione è soddisfatta mediante una squadra; essa sarà l'unico strumento necessario in questa teoria.

Comincio ad enunciare una proprietà:

PROP. 1.

$a\,b\,c$ Retto . ⊃ . $c\,b\,a$ Retto.

" Se l'angolo $a\,b\,c$ è retto, anche $c\,b\,a$ è retto „.

Questa prima proprietà si dovrà considerare come primitiva, cioè non si deduce da alcuna precedente, che non esiste.

Alla relazione " $a\,b\,c$ Retto „ dò il preciso significato espresso nella teoria dei vettori da

$$(a - b) \times (b - c) = 0.$$

Quindi si può enunciare una seconda proprietà:

PROP. 2.

$a\,a\,c$ Retto.

" Se il punto b coincide con a, l'angolo $a\,b\,c$ è retto „.

La relazione " $a\,b\,c$ Retto „ si può risolvere rispetto ad uno qualunque dei punti che contiene.

Risolta rispetto a, ne risulta come luogo dei punti a, il piano perpendicolare in b alla retta $b\,c$, supposto b e c distinti.

Poniamo pertanto:

Digitized by Google

DEFINIZIONE 1.

$$b \sim = c \,.\, \supset : a \,\varepsilon \text{ Piano } b\,c \,.\, = \,.\, a\,b\,c \text{ Retto.}$$

" Se b è differente da c, allora dire che a sta nel piano $b\,c$, significa che l'angolo $a\,b\,c$ è retto „.

Si deduce dalle nostre convenzioni, in virtù di P. 2:

COROLLARIO 1.

$$b \sim = c \,.\, \supset \,.\, b \,\varepsilon \text{ Piano } b\,c.$$

" Il punto b appartiene al piano $b\,c$ „.

Risolvo ora la relazione " $a\,b\,c$ Retto „ rispetto b, e ne risulta come luogo dei punti b, la Sfera passante per b e di diametro $a\,c$; veniamo così a definire la " Sfera $a\,c$ „, ossia " Sfera di diametro $a\,c$ „.

DEFINIZIONE 2.

$$b \,\varepsilon \text{ Sfera } a\,c \,.\, = \,.\, a\,b\,c \text{ Retto.}$$

Si deduce:

COROLLARIO 2.

$$a, b \,\varepsilon \text{ Sfera } a\,b,$$

" a e b sono punti della sfera $a\,b$ „, conseguenza della P. 2.

COROLLARIO 3.

$$\text{Sfera } a\,b = \text{Sfera } b\,a.$$

Segue dalla proprietà commutativa espressa dalla P. 1.

Vediamo ora come possiamo definire la *linea retta*.

DEFINIZIONE 3.

$$a \sim = b \,.\, \supset \,.\, \because c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.\, = ;$$

$$x \,\varepsilon\, \bar{\text{p}} \,.\, x\,a\,b \text{ Retto} \,.\, \supset_x \,.\, x\,a\,c \text{ Retto.}$$

" Se a è diverso da b, allora dire che c sta sulla linea retta individuata dai punti a e b, significa che comunque si prenda il punto x, in modo che l'angolo $x\,a\,b$ sia retto, ne risulta che anche l'angolo $x\,a\,c$ è retto „.

Possiamo mettere la Def. 3 anche sotto la forma:

Digitized by Google

DEFINIZIONE 3'.

$$c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.=.$$

$$c = a \,.\, \cup \,.\, \text{Piano } a\,b = \text{Piano } a\,c.$$

" Dire che c sta sulla linea retta $a\,b$ significa che o c coincide con a, ovvero il piano $a\,b$ coincide col piano $a\,c$ ".

Si può dare alla Def. 3 ancora un'altra forma:

DEFINIZIONE 3''.

$$c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.=:$$

$$x \,\varepsilon \text{ p.} \, x \,\varepsilon \text{ Sfera } a\,c \,.\, x \,\varepsilon \text{ Sfera } c\,b \,.\, \supset_x \,.\, x = c.$$

" Il punto c sta sulla retta $a\,b$ quando comunque si prenda il punto x, che stia sulle sfere di diametro $a\,c$ e $c\,b$, esso coincide con c ", cioè quelle due sfere hanno il solo punto comune c.

E ancora sostituendo a " Sfera " la sua definizione 2, si ha l'altra forma:

DEFINIZIONE 3'''.

$$c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b \,.=:$$

$$x \,\varepsilon \text{ p} \,.\, a\,x\,c \text{ Retto} \,.\, b\,x\,c \text{ Retto} \,.\, \supset_x \,.\, x = c.$$

" Il punto c sta sulla retta $a\,b$, quando comunque si prenda il punto x, tale che l'angolo $a\,x\,c$ sia retto, e pure l'angolo $b\,x\,c$ sia retto, il punto x deve coincidere con c ".

Ora che abbiamo definito la linea retta, possiamo passare a definire la collinearità.

DEFINIZIONE 4.

$$(a\,b\,c) \text{ Collin} \,.=:$$

$$a = b \,.\, \cup \,.\, a \sim b \,.\, c \,\varepsilon \text{ Linea retta } a\,b.$$

" Diremo che i punti a, b, c sono collineari, se a coincide con b, ovvero, se essendo a diverso da b, c sta sulla retta $a\,b$ ".

Definiamo ora il rettangolo:

DEFINIZIONE 5.

$$a, b, c, d \,\varepsilon \text{ p} \,.\, \supset \,.\, (a\,b\,c\,d) \text{ Rettangolo} \,.=.$$

$$a\,b\,c \text{ Retto} \,.\, b\,c\,d \text{ Retto} \,.\, c\,d\,a \text{ Retto} \,.\, d\,a\,b \text{ Retto}.$$

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Dicembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. GUIDO GRASSI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Somigliana, Panetti, Ponzio, Majorana, Pochettino e il Segretario Repossi.

Scusano la loro assenza il Presidente Parona ed il Socio Sacco.

Il verbale della seduta antecedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica una lettera del Socio Herlitzka, che accetta l'incarico affidatogli di commemorare il Prof. Giacosa e ringrazia l'Accademia.

In seguito il Socio Majorana prende la parola per presentare in omaggio all'Accademia i due volumi degli *Atti* del Congresso Internazionale dei Fisici tenutosi lo scorso anno a Como, Pavia e Roma in occasione del primo centenario della morte di Alessandro Volta. Il Congresso, al quale parteciparono numerosi fisici d'ogni parte del mondo, e, fra questi, dodici insigniti del premio Nobel, riuscì particolarmente solenne, ed i risultati da esso conseguiti furono così importanti da indurre alcuni fra i più

Digitized by Google

Ripetendo le note definizioni aritmetiche si ha il prodotto $m\,u$ d'un numero naturale m per un vettore u, ed il quoziente $u\,/\,m$ del vettore u per il numero naturale m. E quindi il prodotto d'un vettore per un numero razionale qualsiasi.

Se u e v sono vettori, porremo:

$$\text{mod}\,u = \text{mod}\,v \,.=.\, a\,\varepsilon\,\text{p}\,.\,\supset_a\,.\,(a,\, a + (u+v)\,/\,2,\, a+u)\ \text{Retto}.$$

" I due vettori u e v hanno la stessa lunghezza o modulo, quando preso ad arbitrio un punto a, l'angolo di cui due vertici sono a e $a + u$, e il vertice intermedio è $a + (u + v)\,/\,2$, è retto „, cioè il triangolo $a,\, a+u,\, a+v$ è isoscele, vale a dire, l'altezza cade nel punto medio del lato.

Due vettori u e v sono ortogonali, e scriveremo come nel calcolo geometrico, $u \times v = 0$, se preso un punto a, l'angolo $(a+u,\, a,\, a+v)$ è retto.

Allora dalla proprietà che l'ipotenusa del triangolo rettangolo è maggiore d'un cateto, deduco la definizione di maggioranza fra distanze o moduli:

$$u \times v = 0\,.\supset.\,\text{mod}\,(u+v) \geqq \text{mod}\,u\,.$$

Si ha la maggioranza, escludendo l'eguaglianza, cioè supponendo $v \sim = 0$.

Definita la maggioranza fra moduli o distanze, si può definire il limite d'un vettore variabile; quindi il prodotto d'un vettore per un numero irrazionale, le coordinate dei vettori e dei punti, e tutti gli enti della geometria analitica.

In conclusione risulta che tutta la geometria si può fondare sull'idea primitiva di punto e da un'altra idea che si può assumere o sotto la forma di equidistanza, con Pieri, o di angolo retto, come qui.

In ambo le teorie però, la definizione di retta si presenta alquanto artificiosa. Quindi in geometria elementare conviene aggiungere qualche altra idea, per es. quella di segmento di retta, senza definizione.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Dicembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. GUIDO GRASSI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Somigliana, Panetti, Ponzio, Majorana, Pochettino e il Segretario Repossi.

Scusano la loro assenza il Presidente Parona ed il Socio Sacco.

Il verbale della seduta antecedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica una lettera del Socio Herlitzka, che accetta l'incarico affidatogli di commemorare il Prof. Giacosa e ringrazia l'Accademia.

In seguito il Socio Majorana prende la parola per presentare in omaggio all'Accademia i due volumi degli *Atti* del Congresso Internazionale dei Fisici tenutosi lo scorso anno a Como, Pavia e Roma in occasione del primo centenario della morte di Alessandro Volta. Il Congresso, al quale parteciparono numerosi fisici d'ogni parte del mondo, e, fra questi, dodici insigniti del premio Nobel, riuscì particolarmente solenne, ed i risultati da esso conseguiti furono così importanti da indurre alcuni fra i più

Digitized by Google

illustri partecipanti a formular la proposta, unanimemente accolta, che il Consiglio di presidenza del Congresso, invece di sciogliersi, rimanesse stabilmente in carica per organizzare future regolari riunioni internazionali di fisici.

Il Socio MAJORANA, a chiarimento di un'osservazione fatta dal Socio SOMIGLIANA sulla priorità del VOLTA nella scoperta della legge che va sotto il nome di " legge di Gay-Lussac „, comunica che il Congresso, udita una comunicazione del Professore AMERIO documentante che il VOLTA riconobbe per primo la costanza del coefficiente di dilatazione dell'aria, fece unanime voto perchè d'ora innanzi nell'espressione della legge di dilatazione dei gas si unisse al nome di GAY-LUSSAC quello del grande fisico comasco.

Il Socio SOMIGLIANA comunica che, secondo gli studi della Commissione Reale per l'Edizione Nazionale delle opere di Alessandro VOLTA, non solo per la legge di Gay-Lussac, ma anche per la legge di Dalton si deve giungere ad un analogo risultato.

In seguito il Socio PANETTI presenta in omaggio all'Accademia il proprio discorso pronunziato per l'inaugurazione del Congresso annuale dell'Associazione Italiana di Aerotecnica dal titolo: *Il contributo della tecnica all'Aeronautica.* Lo stesso opuscolo contiene il discorso di chiusura del Congresso.

Il Presidente presenta all'Accademia i due volumi dell'opera di R. WILLSTÄTTER: *Untersuchungen ueber Enzyme,* e due necrologie di Piero GIACOSA inviate dal Prof. L. MASCARELLI.

Il Socio MATTIROLO dà qualche schiarimento sull'importanza notevole dell'omaggio del Willstätter.

Il Socio SOMIGLIANA presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Dott. B. COLOMBO, intitolata: *Sulla propagazione delle onde sismiche in uno strato piano illimitato,* e ne discorre brevemente.

Digitized by Google

LETTURE

Sulla propagazione delle onde sismiche in uno strato piano illimitato.

Nota del Dott. BONAPARTE COLOMBO
presentata dal Socio nazionale residente C. Somigliana.

1. — Le onde di Rayleigh, dette anche superficiali, sono molto importanti nella teoria dei fenomeni sismici, perchè si ritengono atte a rappresentare le onde lunghe, cioè quelle che. in base all'osservazione, sembrano propagarsi con velocità costante sulla superficie terrestre.

Il prof. Somigliana, in due Note molto interessanti (1), ha fatto rilevare in proposito come esse si presentino naturalmente trattando il problema generale della propagazione delle onde piane in un suolo piano illimitato ed infinitamente profondo. ossia in un semispazio. Infatti egli ha dimostrato che alle tre radici dell'equazione di terzo grado di Rayleigh corrispondono onde piane del suolo di tre categorie, e precisamente quelle che risultano dalla sovrapposizione di un'onda longitudinale e di un'onda trasversale, inclinate fra loro in modo da dar luogo ad una identica velocità di propagazione sulla superficie libera del suolo ; le onde superficiali di Rayleigh appartengono appunto, senza esaurirla, ad una delle tre categorie che si presenta però in modo singolare.

In questa Nota, studiando semplicemente alcune relazioni funzionali, dimostro che le considerazioni ed i risultati del prof. Somigliana si possono estendere al problema generale della propagazione delle onde sismiche in uno strato piano illi-

(1) SOMIGLIANA, *Sulla propagazione delle onde sismiche* (Nota I^a e II^a), "Rend. Acc. dei Lincei „, 1° sem. 1917.

Digitized by Google

mitato, ossia in una lastra a faccie piane parallele di spessore finito, purchè una funzione di una variabile, che compare nel caso del semispazio ed è del tutto arbitraria, soddisfaccia ora alla condizione di ammettere un opportuno periodo; questo dipende dallo spessore della lastra e dalle tangenti trigonometriche degli angoli di emergenza delle coppie di onde che si sovrappongono.

Pertanto la seguente trattazione del problema in esame è completamente diversa da quella del Love [1] e del De Marchi [2].

2. — Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali tale che $z = 0$ e $z = h$ siano le equazioni delle faccie che limitano la lastra di spessore h, e supponiamo che il piano zx sia di propagazione [3] per due diversi sistemi di onde piane, le une longitudinali e le altre trasversali. Siano

$$\alpha_1 x + \gamma_1 z = \text{cost.}, \qquad \alpha_2 x + \gamma_2 z = \text{cost.}$$

le rispettive equazioni dei piani d'onda, necessariamente paralleli all'asse y, e siano

$$(1) \quad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 \varphi (\alpha_1 x + \gamma_1 z - \epsilon_1 t) \\ w_1 = \gamma_1 \varphi (\alpha_1 x + \gamma_1 z - \epsilon_1 t), \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} u_2 = \gamma_2 \psi (\alpha_2 x + \gamma_2 z - \epsilon_2 t) \\ w_2 = -\alpha_2 \psi (\alpha_2 x + \gamma_2 z - \epsilon_2 t) \end{cases}$$

le componenti sugli assi x e z dei rispettivi vettori vibranti; inoltre si osservi che la componente v_1 del primo sull'asse y risulta nulla, essendo per ipotesi longitudinale la relativa onda, e che l'analoga componente v_2 del secondo si può, per sempli-

---

(1) Love, *Some Problems of Geodynamics*, cap. XI.

(2) De Marchi, *Teoria generale delle onde propagate sulla superficie piana di un solido elastico. Applicazione della teoria delle onde superficiali all'analisi dei sismogrammi*, "Rend. Acc. dei Lincei", 1° sem. 1916.

(3) Per maggiori dettagli si consultino le Note citate del prof. Somigliana.

Digitized by Google

cità, ritenere anche nulla, ciò che è lecito ai nostri scopi. Si noti poi che φ e ψ indicano funzioni, per ora arbitrarie, di argomenti i quali possono evidentemente assumere tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$; e infine che, essendo θ_1 e θ_2 gli angoli di emergenza, ossia gli angoli che le normali ai piani d'onda dei due sistemi formano coll'asse x, valgono le formule

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \qquad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\gamma_2}{\alpha_2}.$$

Se λ e μ sono le costanti elastiche di Lamé e ρ la densità, devono essere vere le relazioni

$$(4) \qquad \frac{\lambda+2\mu}{\rho}(\alpha_1^2+\gamma_1^2)=\epsilon_1^2, \quad \frac{\mu}{\rho}(\alpha_2^2+\gamma_2^2)=\epsilon_2^2, \quad \frac{\epsilon_1}{\alpha_1}=\frac{\epsilon_2}{\alpha_2},$$

delle quali le prime due risultano dalle equazioni del moto e la terza dall'imporre che coincidano le velocità superficiali di propagazione delle onde longitudinali e trasversali, che sono appunto eguali rispettivamente ad $\frac{\epsilon_1}{\alpha_1}$ e $\frac{\epsilon_2}{\alpha_2}$; il comune valore di questi rapporti si indichi con V.

L'onda che si ottiene sovrapponendo i due sistemi considerati ha per componenti di vibrazione $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$ e $w = w_1 + w_2$; riesce $v = 0$ per l'ipotesi fatta.

Dalle note formule

$$X_z = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$Y_z = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$Z_z = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

dato che devono essere nulle le componenti della tensione elastica relativa ad un qualsiasi elemento piano delle superficie libere, cioè per $z = 0$ e per $z = h$, si ottengono nel nostro caso le condizioni superficiali seguenti:

Digitized by Google

$$\begin{cases} 2\alpha_1\gamma_1\varphi'(\alpha_1 x - \epsilon_1 t) + (\gamma_2^2 - \alpha_2^2)\psi'(\alpha_2 x - \epsilon_2 t) = 0 \\ [\lambda(\alpha_1^2 + \gamma_1^2) + 2\mu\gamma_1^2]\varphi'(\alpha_1 x - \epsilon_1 t) - 2\mu\alpha_2\gamma_2\psi'(\alpha_2 x - \epsilon_2 t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1\gamma_1\varphi'(\alpha_1 x + \gamma_1 h - \epsilon_1 t) + (\gamma_2^2 - \alpha_2^2)\psi'(\alpha_2 x + \gamma_2 h - \epsilon_2 t) = 0 \\ [\lambda(\alpha_1^2 + \gamma_1^2) + 2\mu\gamma_1^2]\varphi'(\alpha_1 x + \gamma_1 h - \epsilon_1 t) - 2\mu\alpha_2\gamma_2\psi'(\alpha_2 x + \gamma_2 h - \epsilon_2 t) = 0, \end{cases}$$

ove al solito l'apice indica derivazione; la Y_s è senz'altro identicamente nulla.

Prescindendo dal caso banale in cui le funzioni φ e ψ si riducano a costanti, per la compatibilità tanto delle due equazioni (5) quanto delle due equazioni (6) è certo necessario che si abbia

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 2\alpha_1\gamma_1 & \gamma_2^2 - \alpha_2^2 \\ \lambda(\alpha_1^2 + \gamma_1^2) + 2\mu\gamma_1^2 & -2\mu\alpha_2\gamma_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$(7_1) \qquad 4\mu\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2 = [\lambda\alpha_1^2 + (\lambda + 2\mu)\gamma_1^2](\alpha_2^2 - \gamma_2^2).$$

Dimostreremo nel § 3 che, supposta verificata la (7_1), si possono effettivamente soddisfare i sistemi (5) e (6) con funzioni φ e ψ non costanti.

Per ora osserviamo che si possono soddisfare tutte le condizioni (4) e (7_1) nelle costanti $\alpha_1, \gamma_1, \epsilon_1, \alpha_2, \gamma_2, \epsilon_2$. Invero ricavando dalle prime due delle (4) i valori di $\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2$ e $\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2$ in funzione di V^2 e sostituendoli nella (7_1), dopo averne diviso i due membri per $\alpha_1^2\alpha_2^2$ ed elevato a quadrato, si ottiene un'equazione di quarto grado in V^2; determinato V^2, sono determinati in conseguenza $\left(\frac{\epsilon_1}{\alpha_1}\right)^2$ ed $\left(\frac{\epsilon_2}{\alpha_2}\right)^2$, eguali entrambi a V^2, ed anche $\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2$ e $\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2$ (1).

L'equazione ottenuta per V^2 è quella stessa cui è giunto

---

(1) Con riguardo ai segni per i rapporti $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\epsilon_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}, \frac{\epsilon_2}{\alpha_2}$ si possono effettivamente soddisfare le (4) e (7_1); α_1 ed α_2 restano ancora arbitrari.

Digitized by Google

il Rayleigh ricercando la velocità di propagazione delle sue onde superficiali; essa, quando si sopprima la radice $V^2 = 0$ e si ponga $V^2 = \frac{\mu}{\rho}\eta$, assume la nota forma

$$(8) \qquad \eta^3 - 8\eta^2 + 8\left(3 - 2\,\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right)\eta - 16\left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right) = 0,$$

studiata dal prof. Somigliana.

Ricordando le (3) e le (4), si ricavano le formule

$$(9) \qquad \mathrm{tg}^2\theta_1 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\eta - 1, \qquad \mathrm{tg}^2\theta_2 = \eta - 1.$$

3. — Esaminiamo ora i sistemi (5) e (6), supposta naturalmente vera la (7_1), oltre alle (4): ponendo per semplicità

$$A = \alpha_2^2 - \gamma_2^2, \qquad B = 2\alpha_1\gamma_1,$$

essi si soddisfano con funzioni φ' e ψ' tali che valgano le relazioni funzionali

$$(10) \qquad \frac{\varphi'(\alpha_1 x - \epsilon_1 t)}{\psi'(\alpha_2 x - \epsilon_2 t)} = \frac{A}{B},$$

$$(11) \qquad \frac{\varphi'(\alpha_1 x + \gamma_1 h - \epsilon_1 t)}{\psi'(\alpha_2 x + \gamma_2 h - \epsilon_2 t)} = \frac{A}{B} \quad (1).$$

Ponendo poi

$$(12) \qquad \varphi'(\zeta) = AG'\left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right), \qquad \psi'(\zeta) = BF'\left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right),$$

le quali introducono semplicemente un opportuno cambiamento di simboli funzionali, le (10) e (11) si mutano nelle relazioni equivalenti

$$(10_1) \qquad G'(x - Vt) = F'(x - Vt),$$

$$(11_1) \qquad G'\left(x - Vt + \frac{\gamma_1}{\alpha_1}h\right) = F'\left(x - Vt + \frac{\gamma_2}{\alpha_2}h\right).$$

---

(1) Omettiamo la trattazione, estremamente semplice, dei casi speciali in cui riesce $A = 0$ oppure $B = 0$. Pertanto riteniamo senz'altro $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Digitized by Google

La (10_1) si soddisfa, comunque si fissi la funzione $F'(\xi)$, con $G'(\xi) = F'(\xi)$, e la (11_1) si soddisfa in conseguenza quando sia verificata la condizione

$$F'\left(x - Vt + \frac{\gamma_1}{\alpha_1} h\right) = F'\left(x - Vt + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} h\right),$$

ossia

$$F'\left(\xi + \frac{\gamma_1}{\alpha_1} h\right) = F'\left(\xi + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} h\right),$$

od ancora in definitiva

$$F'(\xi + k) = F'(\xi) \tag{13}$$

con

$$k = \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right) h. \tag{14}$$

In conclusione:

Per soddisfare le (10_1) e (11_1) è necessario e sufficiente che sia $G'(\xi) = F'(\xi)$ e che $F'(\xi)$ sia una *funzione periodica arbitraria di periodo k.*

Perciò, ricordando le (12), si trae:

Per soddisfare le (10) *e* (11), *vale a dire le* (5) *e* (6), *è necessario e sufficiente che sia*

$$\varphi'(\zeta) = AF'\left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right), \qquad \psi'(\zeta) = BF'\left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right), \tag{15}$$

indicando $F'(\xi)$ *una funzione periodica arbitraria di periodo k.*

Le (15) porgono poi

$$\varphi(\zeta) = \alpha_1 AF\left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right) + M, \quad \psi(\zeta) = \alpha_2 BF\left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right) + N \quad (M, N = \text{cost.});$$

sostituendo nelle (1) e (2) si ottengono le componenti delle vibrazioni. Si osservi infine che dalla (13) si ricava

$$F(\xi + k) = F(\xi) + C \qquad (C = \text{cost.}).$$

Digitized by Google

4. — Abbiamo stabilito che la funzione $F'(\xi)$, del tutto arbitraria nel caso del suolo piano illimitato e infinitamente profondo, deve invece essere periodica, con periodo k, nel caso dello strato piano illimitato. Vogliamo ora fare qualche considerazione sul periodo.

In grazia alle (3) e alla (14) esso vale

$$k = (\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1)\, h$$

e, per le (9), può anche esprimersi in funzione della corrispondente radice η di (8). Volendo però evitare i radicali, si deve calcolare k^2 e tenere conto della (7_1) scritta nella forma

$$(7_2) \quad 4\mu \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 = [\lambda + (\lambda + 2\mu)\operatorname{tg}^2\theta_1](1 - \operatorname{tg}^2\theta_2)\,;$$

eseguendo i calcoli si ricava

$$k^2 = \left(\frac{1}{2}\,\eta^2 - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\eta\right) h^2.$$

Infine osserviamo che, supposte reali $\operatorname{tg}\theta_1$ e $\operatorname{tg}\theta_2$ [1], il modulo del periodo è maggiore dello spessore della lastra, almeno nel caso in cui il coefficiente di Poisson vale $\frac{1}{4}$ ossia in cui è $\lambda = \mu$ (caso ammesso come tipico dai sismologi). Infatti, anche senza determinare η, si ponga $\operatorname{tg}\theta_2 = \operatorname{tg}\theta_1 + \tau$ e si sostituisca questo valore nella relazione

$$(\lambda + 2\mu)(\operatorname{tg}^2\theta_1 + 1) = \mu(\operatorname{tg}^2\theta_2 + 1)$$

ottenuta dalle (9); si ricava precisamente

$$(\lambda + \mu)\operatorname{tg}^2\theta_1 - 2\mu\tau \operatorname{tg}\theta_1 + \lambda + \mu - \mu\tau^2 = 0,$$

[1] Anzi basta supporre reale $\operatorname{tg}\theta_1$ perchè lo sia anche $\operatorname{tg}\theta_2$; ciò risulta dalle (9) e dalle note diseguaglianze in λ e μ: $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, da cui $\lambda + 2\mu > 0$, $\lambda + \mu > 0$.

Digitized by Google

equazione di secondo grado in $\operatorname{tg}\theta_1$, il cui discriminante

$$\mu(\lambda + 2\mu)\tau^2 - (\lambda + \mu)^2,$$

per l'ipotesi fatta, deve riuscire positivo; allora risulta

$$\tau^2 > \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)},$$

e perciò, per $\lambda = \mu$,

$$\tau^2 > \frac{4}{3} \quad | \operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1 | > 1 \quad \text{e} \quad | k | > h.$$

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Dicembre 1928 (VII)

PRESIDENZA DEL SENATORE ENRICO D'OVIDIO
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, SACCO, POCHETTINO e il Segretario REPOSSI.

Scusano la loro assenza il Presidente PARONA e il Direttore di Classe GRASSI.

Il verbale della adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio D'OVIDIO, assumendo la presidenza, porge ai Soci presenti, ed agli assenti, gli auguri pel nuovo anno, a nome del Presidente PARONA, del Direttore di Classe GRASSI e suo: auguri che i Soci presenti ricambiano di gran cuore.

Il Socio SACCO presenta in omaggio all'Accademia il volume XVII del periodico " Urania ".

Il Socio GARELLI, a proposito del processo verbale dell'ultima seduta, dal quale risulta che il Socio MAJORANA, presentando all'Accademia i due volumi degli *Atti del Congresso internazionale dei Fisici* tenutosi lo scorso anno a Como, Pavia e Roma, in occasione del primo centenario della morte di Alessandro Volta, comunicò che " il Congresso, udita una comuni-

Digitized by Google

" cazione del prof. Amerio documentante che il Volta riconobbe " per primo la costanza del coefficiente di dilatazione dell'aria, " fece unanime voto perchè d'ora innanzi nell'espressione della " legge di dilatazione dei gas si unisse al nome di Gay-Lussac " quello del grande fisico comasco „, fa rilevare che sin dal 1912 il nostro compianto Socio Icilio GUARESCHI, a proposito della legge sulla uniforme dilatazione dell'aria di Alessandro Volta, aveva rivendicato al grande fisico lombardo la priorità della detta legge, proponendo che in suo onore venisse denominata " legge di Volta e Gay-Lussac „, volendo così porre in evidenza che al Volta spettava la priorità della scoperta della legge dell'uniforme dilatazione dell'aria e al Gay-Lussac l'estensione della stessa agli altri gas.

Una prima pubblicazione di questo lavoro comparve nel Supplem. annuale all'" Enc. di Chimica „ diretta dallo stesso Guareschi, ed inoltre nell' " Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik „, 1913-1914, vol. V, pagine 142-154 e 209-225.

In seguito in un lavoro di grande mole intitolato *Notizie storiche sulla legge della dilatazione dei gas di Volta*, pubblicato nel Suppl. annuale del 1913-14, non solo ha confermato le osservazioni precedenti, ma a dar maggior risalto al merito di Volta riprodusse, annotandola, la memoria originale di Volta.

Digitized by Google

Adunanza del 13 Gennaio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, GRASSI, PANETTI, SOMIGLIANA, PONZIO, SACCO, HERLITZKA, POCHETTINO, GARELLI e il Segretario REPOSSI.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio SACCO presenta in omaggio all'Accademia un suo opuscolo dal titolo: *Il carbon fossile di Bagnone.*

In seguito il Socio SOMIGLIANA presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Prof. A. TONOLO sulla: *Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio* S_4.

Il Socio GARELLI presenta poi una Nota del Prof. M. GIUA, dal titolo: *Ricerche sopra alcune reazioni di condensazione*, e la commenta brevemente.

Il Presidente infine, accennando alla prossima ripresa della stampa delle *Memorie,* ricorda ai Soci che già da parecchi anni giace presso l'Accademia la terza parte dello studio di A. TERRACCIANO sulla *Flora sarda*, le cui parti precedenti furono già pubblicate nelle *Memorie* dell'Accademia. Propone quindi che si provveda alla pubblicazione anche di questa ultima parte, sulla quale è già stato dato parere favorevole dalla Commissione a questo scopo nominata, e la consegna al Socio MATTIROLO perchè la riprenda brevemente in esame.

Digitized by Google

LETTURE

Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio S_4.

Nota di ANGELO TONOLO
presentata dal Socio nazionale residente Carlo Somigliana.

Si consideri una superficie Σ dello spazio lineare S_4, il cui spazio 2-tangente in ogni punto P di Σ sia a quattro dimensioni. In questo spazio 2-tangente vi è un piano normale, nel senso che ogni sua retta passante per P è normale a Σ in questo punto. Si può allora porre la quistione di cercare in questo piano una coppia di normali ortogonali fra loro da ritenersi privilegiata rispetto alle infinite altre coppie passanti per P. È questo il problema che si è proposto il Prof. VITALI, e che ha avuto da Lui elegante risoluzione per tutte le superficie dello spazio hilbertiano il cui spazio 2-tangente è a quattro o a cinque dimensioni (1).

Secondo questo Autore (limitandomi alle superficie prese in esame nella presente Nota), la definizione di coppia privilegiata di normali ortogonali deve essere tale da risultare simmetrica rispetto alle medesime. Per le superficie Σ dello spazio S_4, sono

(1) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*, "Annales de la Société polonaise de mathématique", t. VII (1928). È ovvio che per le superficie dello spazio hilbertiano, il cui spazio 2-tangente è a cinque dimensioni, bisognerà cercare una terna privilegiata di normali ortogonali fra loro due a due. Avverto che in una seconda Memoria, pubblicata negli stessi "Annales", t. VII (1928), il Prof. VITALI ha risolto l'analoga quistione per ogni varietà dello spazio hilbertiano.

Digitized by Google

riuscito a determinare una simile coppia la quale, in generale, non coincide con quella del VITALI. E poichè la sua determinazione si fa in base a considerazioni geometriche assai semplici, ho creduto opportuno renderla nota a mezzo della presente comunicazione.

1. Preliminari. — Nello spazio lineare S_4, i cui punti sono riferiti ad un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, z, t, si consideri una superficie Σ di equazioni parametriche

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \\ t = t(u, v), \end{cases}$$

il cui spazio 2-tangente sia a quattro dimensioni in ogni punto di Σ.

Sia

$$(2)\qquad a_{11}\,du^2 + 2a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2$$

la forma che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare di Σ, ove si è posto [2]:

$$(3)\qquad a_{rs} = S\,x_r'\,x_s' \qquad (r, s = 1, 2),$$

indicando con x_1', x_2' rispettivamente le derivate x_u', x_v'. Diciamo a il discriminante della forma (2).

Sia P un punto qualsivoglia di Σ, e indichiamo con X_3, Y_3, Z_3, T_3; X_4, Y_4, Z_4, T_4 i coseni direttori di due direzioni del piano normale a Σ in P passanti per questo punto e fra loro perpendicolari.

---

[2] Il simbolo S rappresenta una somma di quattro termini che si ottengono da quello scritto sotto il segno, mutando successivamente x, o la funzione che si riferisce all'asse delle x, rispettivamente in y, z, t, o nelle funzioni analoghe che sono relative agli assi y, z, t.

Digitized by Google

Se denotiamo con x_{11}, x_{12}, x_{22} le derivate seconde covarianti x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} della funzione x rispetto alla forma (2), valgono le formule seguenti:

$$x_{rs} = f_{rs}\, X_3 + g_{rs}\, X_4 \tag{4}$$

(e analoghe naturalmente per le derivate covarianti di y, z, t), dove

$$f_{rs} = S\, X_3\, x_{rs}, \qquad (6)\ g_{rs} = S\, X_4\, x_{rs} \tag{5}$$

sono due tensori doppi simmetrici covarianti.

Alla forma differenziale (2), associamo le seguenti

$$f_{11}\, du^2 + 2f_{12}\, du\, dv + f_{22}\, dv^2, \tag{7}$$

$$g_{11}\, du^2 + 2g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2. \tag{8}$$

In seguito si vedrà che nelle formule finali, entreranno in giuoco soltanto dei tensori calcolati con i coefficienti delle forme (2), (7), (8).

2. Determinazione di una particolare coppia ortogonale di normali della superficie Σ. — Il punto generico P di Σ considerato nel n° precedente, abbia per coordinate curvilinee u, v, e per coordinate cartesiane x, y, z, t. Indichiamo con π il piano tangente, e con ν il piano normale a Σ nel punto P. Le equazioni del piano ν si possono scrivere così:

$$\begin{cases} S(\xi - x)\, x_1' = 0 \\ S(\xi - x)\, x_2' = 0, \end{cases} \tag{9}$$

dove ξ, η, ζ, τ indicano le coordinate correnti dei punti del piano ν.

Sia P' un punto di Σ infinitamente vicino a P di coordinate curvilinee $u + du$, $v + dv$, e di coordinate cartesiane $x + dx$, ..., $t + dt$.

Le equazioni del piano normale ν' a Σ nel punto P', saranno:

Digitized by Google

$$(10)\quad \begin{cases} S(\xi - x - dx)(x_1' + x_{11}''\,du + x_{12}''\,dv + \theta_2) = 0 \\ S(\xi - x - dx)(x_2' + x_{21}''\,du + x_{22}''\,dv + \theta_2^*) = 0\,, \end{cases}$$

dove θ_2 e θ_2^* rappresentano termini di second'ordine almeno nei differenziali du, dv e x_{11}'', x_{12}'', x_{22}'' sono le derivate seconde ordinarie della funzione x. Sostituiamo al posto del dx la sua espressione $x_1'\,du + x_2'\,dv$, e poi sviluppiamo i prodotti che figurano nelle (10), tenendo conto soltanto dei termini che sono di primo ordine nei differenziali du, dv. Allora, in forza delle (3) e delle (9), le (10) diventano:

$$(11)\quad \begin{cases} S(\xi - x)(x_{11}''\,du + x_{12}''\,dv) = a_{11}\,du + a_{12}\,dv \\ S(\xi - x)(x_{21}''\,du + x_{22}''\,dv) = a_{21}\,du + a_{22}\,dv\,, \end{cases}$$

alle quali conviene dare un'altra forma. Denotiamo con $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\}$ i simboli di Christoffel di seconda specie relativi alla forma (2), e ricordiamo che

$$(12)\qquad x_{rs} = x_{rs}'' - \sum_1^2{}_t \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\} x_t'.$$

Poniamo nelle equazioni (11) le derivate seconde ordinarie con le loro espressioni ricavate dalle (12): a causa delle (9), le (11) risultano le seguenti:

$$(13)\quad \begin{cases} S(\xi - x)(x_{11}\,du + x_{12}\,dv) = a_{11}\,du + a_{12}\,dv \\ S(\xi - x)(x_{21}\,du + x_{22}\,dv) = a_{21}\,du + a_{22}\,dv\,. \end{cases}$$

Infine, sostituendo in queste al posto delle derivate covarianti i secondi membri delle (4), si traggono le formule finali:

$$(14)\quad \begin{cases} S(\xi - x)\,\{(f_{11}\,du + f_{12}\,dv)\,X_3 + (g_{11}\,du + g_{12}\,dv)\,X_4\,\} = \\ \qquad = a_{11}\,du + a_{12}\,dv \\ S(\xi - x)\,\{(f_{21}\,du + f_{22}\,dv)\,X_3 + (g_{21}\,du + g_{22}\,dv)\,X_4\,\} = \\ \qquad = a_{21}\,du + a_{22}\,dv. \end{cases}$$

Digitized by Google

Per risolvere il sistema formato dalle (9) e (14) rispetto alle differenze $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, $t - \tau$, conviene sostituire le due prime equazioni con altre equivalenti nel modo seguente: indichiamo con X_1, Y_1, Z_1, T_1; X_2, Y_2, Z_2, T_2 i coseni direttori delle tangenti a due linee di Σ passanti per P e ortogonali fra loro. Allora le due equazioni (9) possono venire rimpiazzate dalle

$$(15)\quad \begin{cases} S(\xi - x) X_1 = 0 \\ S(\xi - x) X_2 = 0 , \end{cases}$$

e il sistema delle (15) e (14), sarà equivalente al sistema (9), (14).

Notiamo ora che il determinante

$$(16)\quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & T_4 \end{vmatrix}$$

è ortogonale (e noi lo supporremo di valore uno). Vedremo subito come questo fatto faciliti i calcoli per la risoluzione del sistema (15), (14) rispetto alle differenze $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, $\tau - t$.

Con questa risoluzione noi verremo a determinare il punto d'incontro Q dei due piani normali ν e ν'.

Calcoliamo intanto il determinante B dei coefficienti delle differenze $\xi - x$, ..., $\tau - t$.

Abbiamo:

$$B = \begin{vmatrix} X_1 & \dots \\ X_2 & \dots \\ (f_{11}\,du + f_{12}\,dv) X_3 + (g_{11}\,du + g_{12}\,dv) X_4 & \dots \\ (f_{21}\,du + f_{22}\,dv) X_3 + (g_{21}\,du + g_{22}\,dv) X_4 & \dots \end{vmatrix} .$$

Ovviamente si vede che B è uguale alla somma di

Digitized by Google

quattro determinanti, dei quali due sono nulli, e gli altri due valgono

$$(f_{11}\,du + f_{12}\,dv)\,(g_{21}\,du + g_{22}\,dv),$$

$$-(f_{21}\,du + f_{22}\,dv)\,(g_{11}\,du + g_{12}\,dv),$$

perchè il determinante (16) è uguale a uno. Abbiamo perciò:

$$(17)\qquad B = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} dv^2.$$

Le direzioni PP' (reali od immaginarie) per cui B si annulla in P, sono determinate dalla equazione

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

Osservo che il primo membro di questa equazione (18), all'infuori di un fattore, coincide con la forma F_2 di Fubini [3] relativa alle superficie dello spazio S_4. Notiamo ancora che non può mai accadere che siano tutti nulli in P i minori di second'ordine che figurano nella (18): infatti, nel caso opposto, le due forme (7), (8) sarebbero proporzionali, e allora la superficie Σ nel punto P non avrebbe il suo spazio 2-tangente di quattro dimensioni.

Risolviamo ora il sistema (15), (14), limitando la esplicita risoluzione alla differenza $\xi - x$. Si ha:

$$(19)\qquad \xi - x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Y_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & Y_2 & \cdot & \cdot \\ a_{11}\,du + a_{12}\,dv & y_{11}\,du + y_{12}\,dv & \cdot & \cdot \\ a_{21}\,du + a_{22}\,dv & y_{21}\,du + y_{22}\,dv & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} dv^2}.$$

---

[3] G. Fubini, E. Čech, *Geometria proiettiva differenziale* [Bologna, Nicola Zanichelli, in due tomi, 1926 e 1927]. Tomo secondo, pag. 632.

Digitized by Google

Detto A il determinante numeratore della (19), si trae:

$$= (a_{11}\,du + a_{12}\,dv)\begin{vmatrix} Y_1 & \cdot\cdot \\ Y_2 & \cdot\cdot \\ y_{21}\,du + y_{22}\,dv & \cdot\cdot \end{vmatrix} - (a_{21}\,du + a_{22}\,dv)\begin{vmatrix} Y_1 & \cdot\cdot \\ Y_2 & \cdot\cdot \\ y_{11}\,du + y_{12}\,dv & \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

Diciamo A_1 e A_2 i due determinanti che figurano nella (20): prendiamo in considerazione A_1, e in esso surroghiamo le derivate covarianti con le loro espressioni (4); si ha:

$$(21)\quad A_1 = (f_{21}\,du + f_{22}\,dv)\begin{vmatrix} Y_1 & \cdot\cdot \\ Y_2 & \cdot\cdot \\ Y_3 & \cdot\cdot \end{vmatrix} + (g_{21}\,du + g_{22}\,dv)\begin{vmatrix} Y_1 & \cdot\cdot \\ Y_2 & \cdot\cdot \\ Y_4 & \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

Poichè nel determinante (16) ogni elemento è uguale al proprio complemento algebrico, abbiamo anche:

$$(22)\quad A_1 = -(f_{21}\,du + f_{22}\,dv)\,X_4 + (g_{21}\,du + g_{22}\,dv)\,X_3.$$

Procedendo in modo analogo, si trova:

$$(23)\quad A_2 = -(f_{11}\,du + f_{12}\,dv)\,X_4 + (g_{11}\,du + g_{12}\,dv)\,X_3.$$

Perciò, sostituendo in (20), le (22) e (23), si ricava:

$$A = \left\{ \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} dv^2 \right\} X_4 -$$

$$- \left\{ \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} dv^2 \right\} X_3.$$

E infine la formula:

$$(24)\quad \xi - x = \frac{\left\{ \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} du^2 + \cdot\cdot \right\} X_4 - \left\{ \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} du^2 + \cdot\cdot \right\} X_3}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} dv^2}.$$

Digitized by Google

Diamo ora forma invariantiva al secondo membro della (24): introduciamo perciò i tre seguenti sistemi di funzioni:

$$(25)\qquad F_{11} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,, \quad F_{12} = F_{21} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,,$$

$$F_{22} = \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,;$$

$$(26)\qquad G_{11} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,, \quad G_{12} = G_{21} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{22} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,,$$

$$G_{22} = \begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,;$$

$$(27)\qquad H_{11} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,, \quad H_{12} = H_{21} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,,$$

$$H_{22} = \begin{vmatrix} f_{12} & f_{22} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} : \sqrt{a}\,;$$

e dimostriamo che essi costituiscono tre tensori doppi (simmetrici) covarianti. Limitiamo la dimostrazione al sistema F_{ij}. Sarà comodo ora indicare con u_1, u_2 le variabili u, v. Eseguiamo una qualsivoglia trasformazione di variabili

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} u_1 = u_1(v_1, v_2) \\ u_2 = u_2(v_1, v_2) \end{cases}$$

a determinante funzionale non nullo, è — adoperando le notazioni del VITALI — indichiamo con $F_{ij}[u]$ le funzioni F_{ij} definite dalle (25), nelle variabili u e con $F_{ij}[v]$ le trasformate delle F_{ij} a mezzo della sostituzione (α). Poniamo ancora:

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_{ij}}{\partial v_{hk}} = \dfrac{\partial u_i}{\partial v_h}\dfrac{\partial u_j}{\partial v_k} + \dfrac{\partial u_i}{\partial v_k}\dfrac{\partial u_j}{\partial v_h} & \text{se } i \neq j\,, \\ \dfrac{\partial u_{ij}}{\partial v_{hk}} = \dfrac{\partial u_i}{\partial v_h}\dfrac{\partial u_j}{\partial v_k} & \text{se } i = j\,. \end{cases}$$

Digitized by Google

Con queste notazioni, è notorio che si ha:

$$(29)\qquad \begin{cases} a_{ij}[v] = \sum'_{rs} a_{rs}[u] \dfrac{\partial u_{rs}}{\partial v_{ij}}, \\ f_{ij}[v] = \sum'_{rs} f_{rs}[u] \dfrac{\partial u_{rs}}{\partial v_{ij}}, \end{cases}$$

avendo indicato con Σ' la somma di tre termini che si ottengono da quello scritto, obbligando la coppia rs ad assumere soltanto le combinazioni con ripetizione 11, 12, 22.

Vediamo ora come si trasforma $F_{11}[u]$ a mezzo della sostituzione (α). È:

$$(30)\qquad F_{11}[v] = \begin{vmatrix} f_{11}[v] & f_{12}[v] \\ a_{11}[v] & a_{12}[v] \end{vmatrix} : \sqrt{a[v]}.$$

In forza delle (29), e ricordando che

$$(31)\qquad \sqrt{a[v]} = \sqrt{a[u]} \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)},$$

possiamo scrivere la (30) così:

$$(32)\qquad F_{11}[v] = \frac{\begin{Vmatrix} f_{11}[u] & f_{12}[u] & f_{22}[u] \\ a_{11}[u] & a_{12}[u] & a_{22}[u] \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{11}} & \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{11}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{11}} \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{12}} & \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{12}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{12}} \end{Vmatrix}}{\sqrt{a[u]} \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)}}.$$

Il prodotto delle due matrici che figura nel numeratore del secondo membro della (32) è uguale alla somma dei prodotti dei determinanti

Digitized by Google

$$(33)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left|\begin{matrix} f_{11}[u] & f_{12}[u] \\ a_{11}[u] & a_{12}[u] \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{11}} & \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{11}} \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{12}} & \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{12}} \end{matrix}\right| + \\ \left|\begin{matrix} f_{11}[u] & f_{22}[u] \\ a_{11}[u] & a_{22}[u] \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{11}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{11}} \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial v_{12}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{12}} \end{matrix}\right| + \\ \left|\begin{matrix} f_{12}[u] & f_{22}[u] \\ a_{12}[u] & a_{22}[u] \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{11}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{11}} \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial v_{12}} & \frac{\partial u_{22}}{\partial v_{12}} \end{matrix}\right| , \end{array} \right.$$

che rispettivamente chiameremo m, n, p.

Prendiamo in considerazione il prodotto m; si ha, a causa delle posizioni (25), (28):

$$(34)\quad m = \sqrt{a[u]}\; F_{11}[u] \left|\begin{matrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\right)^2 & 2\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial u_2}{\partial v_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial u_1}{\partial v_2} & \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial u_2}{\partial v_2} + \frac{\partial u_1}{\partial v_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_1} \end{matrix}\right| .$$

Sviluppando il determinante della (34), si trova:

$$(35)\quad m = \sqrt{a[u]}\; \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)}\; F_{11}[u] \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\right)^2 .$$

Analogamente si hanno le formule:

$$(36)\quad n = \sqrt{a[u]}\; \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)}\; 2F_{12}[u] \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial u_2}{\partial v_1} ,$$

$$(37)\quad p = \sqrt{a[u]}\; \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)}\; F_{22}[u] \left(\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right)^2 .$$

Sostituendo le (35), (36), (37) nella (32), si trae:

$$(38)\quad F_{11}[v] = \sum{}'_{rs} F_{rs}[u] \frac{\partial u_{rs}}{\partial v_{11}} .$$

Digitized by Google

Similmente si dimostrano le relazioni

$$F_{12}[v] = \sum_{rs}' F_{rs}[u] \frac{\partial u_{rs}}{\partial v_{12}}, \tag{39}$$

$$F_{22}[v] = \sum_{rs}' F_{rs}[u] \frac{\partial u_{rs}}{\partial v_{22}}. \tag{40}$$

Le (38), (39), (40) provano che le $F_{rs}[u]$ definite dalle posizioni (25) formano un tensore doppio covariante, *c. d. d.*

Ritorniamo ora alle variabili u, v, e dividiamo numeratore e denominatore della (24) per $\sqrt{a}$; indi introduciamo le notazioni (25), (26), (27) si ha:

$$\xi - x = \frac{(F_{11}du^2 + 2F_{12}du\,dv + F_{22}dv^2)X_4 - (G_{11}du^2 + 2G_{12}du\,dv + G_{22}dv^2)X_3}{H_{11}du^2 + 2H_{12}du\,dv + H_{22}dv^2},$$

nella quale è manifesto il carattere invariantivo di fronte a qualsiasi cambiamento delle variabili u, v.

Poniamo:

$$\mu = F_{11}\,du^2 + 2F_{12}\,du\,dv + F_{22}\,dv^2, \tag{42}$$

$$\lambda = G_{11}\,du^2 + 2G_{12}\,du\,dv + G_{22}\,dv^2, \tag{43}$$

$$\nu = H_{11}\,du^2 + 2H_{12}\,du\,dv + H_{22}\,dv^2. \tag{44}$$

Allora, la (41) assume l'aspetto

$$\xi - x = \frac{\mu X_4 - \lambda X_3}{\nu}. \tag{45}$$

Le coordinate ξ, η, ζ, τ del punto d'incontro dei due piani normali alla superficie Σ nei punti P e P' si ricavano pertanto dalla (45) e dalle tre seguenti:

$$\eta - y = \frac{\mu Y_4 - \lambda Y_3}{\nu}, \tag{46}$$

$$\zeta - z = \frac{\mu Z_4 - \lambda Z_3}{\nu}, \tag{47}$$

$$\tau - t = \frac{\mu T_4 - \lambda T_3}{\nu}. \tag{48}$$

Digitized by Google

Consideriamo il determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix},$$

e supponiamo che esso sia nullo. Valgono allora le relazioni

$$F_{11} : F_{12} : F_{22} = G_{11} : G_{12} : G_{22} = H_{11} : H_{12} : H_{22}.$$

Ne consegue in forza delle (45), (46), (47), (48) che il punto Q resta fisso al variare della direzione PP' attorno a P. Viceversa se avviene questo fatto, valgono le precedenti relazioni di proporzionalità, e quindi il determinante D ha valore zero.

In ciò che segue noi supporremo che D non sia nullo. Aggiungiamo che questo carattere si conserva, sia per cambiamenti delle coordinate u, v, sia per quelli delle direzioni $X_3, \ldots, T_3$; $X_4, \ldots, T_4$.

Seguiamo ora il criterio del VITALI (4) per determinare una coppia di normali passanti per il punto P ortogonali fra loro che risponda ad una definizione simmetrica rispetto alle due rette. Dividiamo allora la (43) per la (42); si ha:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{G_{11}\,du^2 + 2G_{12}\,du\,dv + G_{22}\,dv^2}{F_{11}\,du^2 + 2F_{12}\,du\,dv + F_{22}\,dv^2}. \tag{49}$$

Questa ci dice che fissato un valore al rapporto $\frac{dv}{du}$, cioè assegnata una direzione sul piano tangente π in P alla superficie Σ, resta fissato un valore per $\frac{\lambda}{\mu}$, e quindi una direzione sul piano normale ν di Σ nel punto P. Invece, ad ogni valore del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, cioè ad ogni direzione passante per P del piano ν, corrispondono due valori del rapporto $\frac{dv}{du}$, cioè due direzioni del piano tangente π passanti per P. Queste due direzioni possono naturalmente essere tutte e due reali, o coinci-

(4) Cfr. G. VITALI, loc. cit. (1), pag. 64.

Digitized by Google

dere, od essere immaginarie. Interessa fissare quelle direzioni (eventualmente immaginarie) passanti per P del piano normale ν, alle quali corrispondono sul piano π due direzioni che coincidono. Queste rette si determinano, cercando i valori del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ che annullano il discriminante della equazione

$$(\lambda F_{11} - \mu G_{11})\, du^2 + 2\,(\lambda F_{12} - \mu G_{12})\, du\, dv + \\ + (\lambda F_{22} - \mu G_{22})\, dv^2 = 0\,;$$

questi valori $\frac{\lambda}{\mu}$ sono pertanto radici della equazione

$$\begin{vmatrix} \lambda F_{11} - \mu G_{11} & \lambda F_{12} - \mu G_{12} \\ \lambda F_{12} - \mu G_{12} & \lambda F_{22} - \mu G_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{50}$$

Adoperando una denominazione del VITALI chiameremo *normali doppie* quelle normali di ν individuate dalle radici $\frac{\lambda}{\mu}$ della equazione (50).

Dimostriamo che le nostre normali doppie sono certamente immaginarie [5]. Basterà provare che il discriminante della equazione (50) è negativo. Per questo, ricordiamo che effettuando una qualunque trasformazione di variabili u, v (a determinante funzionale non nullo), il discriminante dell'equazione (50) trasformata, è uguale al prodotto del discriminante dell'equazione primitiva per il quadrato del determinante funzionale della trasformazione adoperata. Cosicchè, per ciò che riguarda il segno di questo discriminante, basterà riferirsi ad una particolare scelta di variabili u, v. E noi, allora, approfittando del fatto che la forma (2) è definita (positiva), prendiamo come variabili u, v quelle che rendono le forme (2), (7) simultaneamente ortogonali. Con queste variabili, avendo

$$f_{12} = f_{12} = 0;\ F_{11} = F_{22} = 0;\ G_{11} = -a_{11}\, g_{12},\ G_{22} = a_{22}\, g_{12},$$

[5]) Le normali doppie del VITALI possono anche essere reali.

Digitized by Google

il discriminante della equazione (50) diventa uguale a

$$-4a_{11}\ a_{22}\ g^2_{12}\ F^2_{12}.$$

Ora nè g_{12}, nè F_{12} possono annullarsi, perchè nel caso opposto sarebbe nullo il determinante D: il discriminante della (50) è certamente negativo, essendo positivi a_{11}, a_{22}.

Queste normali doppie possono essere le rette cicliche del piano v.

Escluso questo ultimo caso, le normali doppie dividono v in due angoli. Le bisettrici del loro angolo sono sempre reali e perpendicolari fra loro. *Queste bisettrici allora formano una coppia di normali in* P *alla superficie* Σ *che gode della proprietà di simmetria richiesta.*

3. Caso delle superficie cicliche. — Se le normali doppie sono le rette cicliche del piano v, dovendo l'equazione (50) essere equivalente all'equazione

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0,$$

dovrà essere, qualunque sia la coppia $X_3, \ldots, T_3$; $X_4, \ldots, T_4$,

$$F_{11}\ F_{22} - F_{12}^2 = G_{11}\ G_{22} - G_{12}^2, \tag{51}$$

$$F_{11}\ G_{22} - 2F_{12}\ G_{12} + F_{22}\ G_{11} = 0. \tag{52}$$

Chiamiamo *punto ciclico* un punto P di Σ nel quale le normali doppie sono le rette cicliche del piano normale in P alla superficie Σ, e *superficie ciclica* una superficie nella quale i punti sono tutti ciclici. Un interessante esempio di superficie che hanno questa proprietà, ci è offerto dalle *superficie riemanniane di* KOMMERELL (6).

(6) Nella Nota del VITALI si prova (pagg. 65-67) che queste superficie sono pure cicliche secondo il criterio seguito da questo Autore per definire una coppia privilegiata di normali.

Digitized by Google

Come equazioni di queste superficie, noi assumiamo le seguenti:

$$(53)\qquad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) \\ t = t(u, v), \end{cases}$$

dove $z + it$ è funzione della variabile complessa $u + iv$. Proviamo che esse sono cicliche: basterà provare che per esse sussistono le (51), (52).

Tenendo presenti le relazioni di monogeneità

$$z_u' = t_v', \qquad z_v' = -t_u',$$

si trova:

$$(54)\qquad ds^2 = (1 + \Delta)(du^2 + dv^2),$$

avendo posto:

$$\Delta = z_u'^2 + z_v'^2.$$

Per le derivate seconde covarianti delle funzioni (53) rispetto alla forma (54), si hanno le espressioni:

$$(55)\qquad \begin{cases} x_{uu} = -\frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)}, \quad x_{uv} = -\frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)}, \quad x_{vv} = \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)}; \\ y_{uu} = \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)}, \quad y_{uv} = -\frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)}, \quad y_{vv} = -\frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)}; \\ z_{uu} = z_{uu}'' - \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} z_u' + \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} z_v', \\ z_{uv} = z_{uv}'' - \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} z_u' - \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} z_v', \\ z_{vv} = z_{vv}'' + \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} z_u' - \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} z_v', \\ t_{uu} = t_{uu}'' - \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} t_u' + \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} t_v', \\ t_{uv} = t_{uv}'' - \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} t_u' - \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} t_v', \\ t_{vv} = t_{vv}'' + \frac{\Delta_u'}{2(1+\Delta)} t_u' - \frac{\Delta_v'}{2(1+\Delta)} t_v'. \end{cases}$$

Digitized by Google

Da queste si traggono le relazioni:

$$(56)\qquad \begin{cases} x_{uu} + x_{vv} = 0\,, \\ y_{uu} + y_{vv} = 0\,, \\ z_{uu} + z_{vv} = 0\,, \\ t_{uu} + t_{vv} = 0\,. \end{cases}$$

Facilmente si verifica che

$$Sx_{uu}\,x_{uv} = 0\,,$$

il che significa che tali direzioni sono fra loro perpendicolari.

Indichiamo ora con $X_3, \ldots, T_3$; $X_4, \ldots, T_4$ i coseni direttori delle direzioni normali alla superficie individuate dalle derivate covarianti $x_{uu}, \ldots, t_{uu}$; $x_{uv}, \ldots, t_{uv}$.

Avremo:

$$(57)\qquad \begin{cases} x_{uu} = f_{11}\,X_3\,, \\ y_{uu} = f_{11}\,Y_3\,, \\ z_{uu} = f_{11}\,Z_3\,, \\ t_{uu} = f_{11}\,T_3\,. \end{cases} \qquad (58)\qquad \begin{cases} x_{uv} = g_{12}\,X_4\,, \\ y_{uv} = g_{12}\,Y_4\,, \\ z_{uv} = g_{12}\,Z_4\,, \\ t_{uv} = g_{12}\,T_4\,. \end{cases}$$

Perciò:

$$(59)\qquad g_{11} = f_{12} = g_{22} = 0\,.$$

E in forza delle (56),

$$(60)\qquad f_{22} = -f_{11}\,.$$

Resta a calcolare f_{11} e g_{12}.

Digitized by Google

Dalle (57), (58) si trae:

$$f^2_{11} = Sx^2_{uu}$$

$$g^2_{12} = Sx^2_{uv} .$$

Ponendo al posto delle derivate le loro espressioni (55) si ricava, dopo ovvi calcoli,

$$(61) \qquad f_{11} = g_{12} = \pm \sqrt{\frac{z_{uu}'^2 + z_{ur}'^2}{1+\Delta}} .$$

Perciò, essendo $a_{11} = a_{22} = 1 + \Delta$, $a_{12} = 0$, a causa delle (59), (60), (61), si trova:

$$F_{11} = 0, \quad F_{12} = \pm f_{11}, \quad F_{22} = 0;$$

$$G_{11} = \mp g_{12}, \quad G_{12} = 0, \quad G_{22} = \pm g_{12}.$$

E perciò:

$$F_{11} F_{22} - F^2_{12} = G_{11} G_{22} - G^2_{12},$$

$$F_{11} G_{22} - 2F_{12} G_{12} + F_{22} G_{11} = 0,$$

c. d. d.

Per un'osservazione già fatta dal VITALI nella nota citata (pag. 60-61), le relazioni precedenti sussistono per ogni altra coppia ortogonale di normali.

4. Proprietà analitiche della coppia di normali. — Per le normali che abbiamo determinato al n° 2, si può istituire una ricerca analitica perfettamente simile a quella fatta dal VITALI nel citato lavoro (pag. 63-65). E appunto per questa stretta analogia, noi qui ci limitiamo ad affermare, senza dimostrare, certi risultati, tanto sono ovvie le modificazioni da farsi per passare dal procedimento del VITALI a quello che andremo ora svolgendo.

Consideriamo tre direzioni dello spazio 2-tangente in P alla superficie definite così:

$$\overline{x_{rs}} = F_{rs} X_4 - G_{rs} X_3, \ldots, \quad \overline{t_{rs}} = F_{rs} T_4 - G_{rs} T_3 .$$

Digitized by Google

Avendosi allora dalle (45), (46), (47), (48)

$$\xi - x = \frac{\overline{x_{11}}\, du^2 + 2\overline{x_{12}}\, du\, dv + \overline{x_{22}}\, dv^2}{\nu},$$

. . . . . .

$$\tau - t = \frac{\overline{t_{11}}\, du^2 + 2\overline{t_{12}}\, du\, dv + \overline{t_{22}}\, dv^2}{\nu},$$

ne concludiamo che la normale PQ alla superficie Σ, ha i coseni direttori proporzionali alle quantità

$$\overline{x_{11}}\, du^2 + 2\overline{x_{12}}\, du\, dv + \overline{x_{22}}\, dv^2, \ldots, \quad \overline{t_{11}}\, du^2 + 2\overline{t_{12}}\, du\, dv + \overline{t_{22}}\, dv^2.$$

Poichè il nostro spazio 2-tangente è a quattro dimensioni, e le tre direzioni testè definite sono situate sul piano normale ν in P, esse non saranno indipendenti, cosicchè, posto

$$\overline{A}_{rs,\,pq} = S\overline{x}_{rs}\,\overline{x}_{pq},$$

il determinante

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} \overline{A}_{11,\,11} & \overline{A}_{11,\,12} & \overline{A}_{11,\,22} \\ \overline{A}_{12,\,11} & \overline{A}_{12,\,12} & \overline{A}_{12,\,22} \\ \overline{A}_{22,\,11} & \overline{A}_{22,\,12} & \overline{A}_{22,\,22} \end{vmatrix}$$

sarà nullo.

Diciamo $\overline{A}^{rs,pq}$ il complemento algebrico dell'elemento $\overline{A}_{rs,pq}$ del determinante $\overline{A}$, e consideriamo il sistema di funzioni

$$\alpha^{hk,\,pq} = 2^{\varepsilon_{hk} + \varepsilon_{pq}}\, \overline{A}^{hk,\,pq} : 4a^3, \tag{62}$$

dove ϵ_{hk}, ϵ_{pq} valgono zero o uno, secondo che gli indici h, k; p, q sono differenti od uguali. Il sistema (62) è un tensore quadruplo contravariante. Poniamo ancora

$$\bar{R}_{rs,\,pq} = \overline{A}_{rp,\,sq} - \overline{A}_{rq,\,sp}, \tag{63}$$

$$\overline{\rho}^{rs,\,pq} = \overline{\alpha}^{rp,\,sq} - \overline{\alpha}^{rq,\,sp}. \tag{64}$$

Digitized by Google

Sono questi rispettivamente due tensori quadrupli, il (63) covariante, e il (64) controvariante. Le funzioni

$$\bar{J}_2 = \bar{R}_{12,12} : a \,, \tag{65}$$

$$\bar{J}_4 = \bar{\rho}^{12,12} \,.\, a \tag{66}$$

sono due invarianti.

Consideriamo infine l'equazione di terzo grado in θ

$$\begin{vmatrix} \bar{A}_{11,11} & \bar{A}_{11,12} & \bar{A}_{11,22} - \theta \\ \bar{A}_{12,11} & \bar{A}_{12,12} + \frac{\theta}{2} & \bar{A}_{12,22} \\ \bar{A}_{22,11} - \theta & \bar{A}_{22,12} & \bar{A}_{22,22} \end{vmatrix} = 0 \,, \tag{67}$$

cioè

$$\rho^2 + 2\bar{J}_2 \rho + 4\bar{J}_4 = 0 \,,$$

avendo posto $\rho = \frac{\theta}{a}$.

Nel numero 2 la coppia di normali di coseni direttori $X_3, \ldots, T_3$; $X_4, \ldots, T_4$ è arbitraria. Assumiamo ora come tale coppia proprio quella che ci è offerta dalle bisettrici determinate nel numero suddetto. Allora si può provare che, fatta la posizione

$$(F, G) = F_{11} G_{22} - 2F_{12} G_{12} + F_{22} G_{11} \,,$$

e quindi anche

$$(F, F) = 2(F_{11} F_{22} - F^2_{12}),$$

$$(G, G) = 2(G_{11} G_{22} - G^2_{12}),$$

la espressione (F, G) ha valore nullo, mentre le espressioni (F, F), (G, G) sono radici della equazione (67). Possiamo pertanto enunciare il teorema seguente, che trova il suo analogo nel lavoro del VITALI [7]:

---

[7] Cfr. VITALI, loc. cit. [1], pag. 63.

Digitized by Google

TEOREMA. — *Se* Σ *è una superficie dello spazio lineare* S_4, *il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni, esiste in ogni suo punto una coppia ortogonale di normali a* Σ, *per la quale ha luogo la relazione*

$$(F, G) = 0.$$

Digitized by Google

Ricerche sopra alcune reazioni di condensazione.

Nota di MICHELE GIUA
presentata dal Socio nazion. residente Felice Garelli.

In una Nota precedente, pubblicata negli *Atti* di questa Accademia (1), occupandomi della utilizzazione come carburante del fuselolo che si forma nella cosiddetta fermentazione acetono-butilica, eseguii diverse esperienze: 1°, per trasformare gli alcoli superiori contenuti nel fuselolo in eteri semplici e misti, che hanno il vantaggio di essere meno volatili dell'etere etilico e che si prestano per una maggiore compressione nei motori a scoppio; 2°, per trasformare questi alcoli superiori in idrocarburi olefinici. Fra i componenti del fuselolo, solamente l'alcool amilico può dare per disidratazione un prodotto liquido, mentre gli altri dànno idrocarburi gassosi, ciò che renderebbe il processo di scarsa importanza, se gli idrocarburi olefinici, a temperature elevate, non formassero prodotti di polimerizzazione, particolarmente sotto l'azione di catalizzatori adatti. Poichè le esperienze cennate, di carattere orientativo, furono condotte in un apparecchio assai semplice, funzionante alla pressione ordinaria — e non volendo per il momento variare le condizioni delle esperienze precedenti — ho continuato lo studio dell'argomento facendo avvenire una condensazione catalitica degli idrocarburi olefinici (in modo particolare del butilene) con l'aldeide acetica, prodotto oggi facilmente accessibile alla tecnica.

Per l'azione disidratante degli ossidi metallici, che si esercita su una miscela di alcool ed aldeide, si può eliminare l'ossigeno sotto forma di acqua e produzione di un idrocarburo non

(1) Vol. LXI, pag. 199 (1926).

Digitized by Google

saturo. Così, impiegando miscele di alcool butilico e amilico con l'aldeide acetica, le reazioni di disidratazione possono procedere nel modo seguente:

$$C_4H_9—OH + CH_3—CHO \rightarrow C_6H_{10} + 2H_2O.$$

$$C_5H_{11}—OH + CH_3—CHO \rightarrow C_7H_{12} + 2H_2O.$$

Queste, ed altre reazioni analoghe, possono trovare una conferma nel processo per la preparazione del " sintolo „ e derivati, introdotto nella tecnica da Fr. Fischer e fondato sulla condensazione catalitica sotto pressione del gas d'acqua (2).

In un'altra serie di esperienze ho tentato di condensare l'acetilene con l'acetone, in presenza di opportuni catalizzatori. Come è noto, sulla detta condensazione è fondato anche un metodo industriale per la preparazione dell'isoprene e quindi, per successiva polimerizzazione, del caucciù sintetico (3). I catalizzatori impiegati furono il sodio metallico, l'ossido di mercurio e di calcio, la calce sodata; i risultati ottenuti dimostrano che il sodio è il più attivo; esso agisce come condensante verso lo stesso acetone, trasformandolo in una serie numerosa di derivati, come l'alcool diacetonico, l'ossido di mesitile, il forone, lo xilitone, ecc. (4).

I liquidi ottenuti nelle condizioni sperimentali descritte più

---

(2) Fr. Fischer e Hans Tropsch, " Brennstoff Chemie „, *4*, 276 (1923); *5*, 201 (1924); " Ber. „, *56*, 2428 (1923); " Gesammelte Abhandlungen zur Kenntnis der Kohle „, vol. VII, pag. 49 e *passim* (1925). — Cfr. anche Naphtali, *Leichte Kohlenwasserstofföle*, pag. 348 (1928).

(3) Cfr. Karrer, *Lehrbuch der org. Chemie*, pag. 63 (1928).

(4) Sulla condensazione dell'acetone in mezzo alcalino cfr.: Fittig, " Ann. Chem. „, *110*, 23 (1859); Beilstein e Rieth, Ivi, *126*, 245 (1863); Claisen, Ivi, *180*, 4 (1876); Pawlow, Ivi, *188*, 128 (1877); Bredt e Rübel, Ivi, *299*, 165 (1898); Kerp e Müller, Ivi, *299*, 114, 211 (1898); Louise, " Bull. Soc. Chim. „ (2), *39*, 522 (1906); Oendorff e Young, " Am. chem. J. „, *15*, 249 (1893); Thitherley, " J. chem. Soc. „, *81*, 1526 (1902); Pinner, " Ber. „, *15*, 589 (1882); Freund e Speyer, Ivi, *35*, 2321 (1902); Knövenagel, Ivi, *39*, 3460 (1906); Reich e Serpek, " Helv. chim. Acta „, *3*, 138 (1920); Porlezza, " Gazz. chim. ital. „, *54*, 491 (1924).

Digitized by Google

oltre sono miscele complesse a causa della formazione dei prodotti di condensazione dello stesso acetone; in ogni caso, mai la parte trasformata dell'acetone messo a reagire ha superato il 65 %. Come già si avvertì nella nota precedente, anche nelle esperienze descritte in questa non si è preso di mira lo studio completo analitico dei diversi prodotti della reazione.

Parte sperimentale

(In collaborazione coi Dottori L. Thumiger ed E. Brunelli).

Pirogenazione di miscele di alcoli e aldeide acetica. — Fu impiegato lo stesso apparecchio descritto nella nota precedente. L'aldeide acetica venne fatta gocciolare da un imbuto a rubinetto nel pallone di distillazione, in modo da essere trascinata dai vapori di alcool, attraverso il tubo, sulla massa catalitica, costituita da 80 % di Al_2O_3 e 20 % di Cr_2O_3. La temperatura del tubo di catalisi fu mantenuta fra 400-450°. L'esperienza venne condotta nel modo seguente: sopra una miscela di alcool isobutilico e di alcool amilico di fermentazione, formata da gr. 18 del primo e gr. 22 del secondo, portata all'ebollizione, si lasciano gocciolare gr. 22 di aldeide acetica. Dagli apparecchi di condensazione sfuggono copiosi vapori che reagiscono rapidamente col bromo; il condensato liquido che si raccoglie è diviso in due strati: quello superiore distilla fra 80-90° e pesa gr. 25; quello inferiore pesa gr. 14 e distilla fra 95-107°. Esso è costituito da acqua e piccole quantità di alcoli inalterati. Lo strato superiore è costituito da idrocarburi, in prevalenza non saturi; reagisce energicamente col bromo, mentre non reagisce che debolmente col sodio metallico. La presenza del doppio legame fu anche confermata con la reazione di Balbiano dell'acetato mercurico (5).

Il distillato fra 80-90° dà infatti con la soluzione acquosa satura di acetato mercurico un precipitato bianco.

(5) Balbiano, " Chem. Zeit. „, 1901, pag. 932; " Ber. „ *36*, 3575 (1905); " Gazz. chim. ital. „, *36*, 277 (1906); " Rend. Acc. Lincei „, *18*, I, 372 (1909); *24*, I, 165 (1915).

Digitized by Google

Acetilene e acetone. — Nelle esperienze, su 500-600 gr. di acetone, in presenza del catalizzatore, furono fatti gorgogliare circa 50 l. di acetilene, purificato previamente sia con soluzione alcalina di permanganato, che con soluzione acida.

1ª Esperienza. — 500 gr. di acetone furono trattati a freddo e agitando con gr. 23 di sodio metallico; cessato lo sviluppo d'idrogeno fu immessa una corrente regolare di acetilene, dapprima a freddo, indi riscaldando a b. m. per circa 4-5 ore. Dopo saturazione con anidride carbonica il liquido filtrato fu distillato frazionatamente.

Fra 55-65° distillarono gr. 230; fra 65-150° gr. 220;
fra 150-200° gr. 31 e fra 200-250° gr. 49.

2ª Esperienza. — La stessa quantità di acetone fu assoggettata all'azione dell'acetilene in presenza di un miscuglio costituito da gr. 50 di ossido mercurico e gr. 50 di calce viva. In questa esperienza si ebbe una perdita di acetone a causa di un non perfetto funzionamento degli apparecchi di condensazione. Il liquido filtrato, colorato in giallo, sottoposto alla distillazione frazionata, dette:

Fra 55-60° gr. 300; fra 60-70° gr. 130; fra 70-120° gr. 25.

3ª Esperienza. — L'acetone (gr. 600), in presenza di gr. 100 di calce sodata e gr. 20 di ossido di mercurio, fu sottoposto all'azione di una lenta corrente di acetilene per circa 12 ore, riscaldando debolmente a b. m. Per distillazione del liquido filtrato, colorato in rosso-bruno, si ottennero le seguenti frazioni:

Fra 55-65° gr. 439; fra 65-75° gr. 121; fra 75-100° gr. 16;
fra 100-120° gr. 38.

La frazione che bolle fra 65-150° della esperienza 1ª sottoposta ad un ulteriore processo di distillazione frazionata, dette un liquido di odore penetrante, con punto di ebollizione compreso fra 102-104°, che sottoponemmo all'analisi elementare.

Digitized by Google

Gr. 0,2503 di sostanza dettero gr. 0,6567 di CO_2 e gr. 0,2172 di H_2O.

Calcolato per C_5H_8O	Trovato
C % : 71,37	71,56
H „ : 9,59	9,64.

Questi dati analitici concordano per il 3-metilbutinolo che prende origine nella reazione fra l'acetilene e il sodio-acetone (6) oppure fra l'acetiluro di sodio e l'acetone (7).

Le frazioni che bollono a temperature superiori ai 150° reagiscono con l'idrossilamina, la fenilidrazina e la semicarbazide, indizio ch'esse contengono prodotti della condensazione alcalina dell'acetone. Inoltre, queste frazioni gelatinizzano facilmente il pirocollodio (contenente il 12,1 % di N), caratteristica anche questa di vari chetoni derivati dall'acetone.

Queste ricerche verranno continuate.

Torino, Laboratorio di Chimica organica
della R. Scuola di Ingegneria.

(6) Cfr. i brevetti Merck e Bayer in " Chem. Centr. „, 1914, II, 1370 1916, I, 815; II, 288.

(7) Hess e Munderloh, " Ber. „, *51*, 377 (1918).

L'Accademico Segretario
Emilio Repossi.

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIV, DISP. 7ª E 8ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Gennaio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Grassi, Panetti, Sacco, Pochettino, Garelli e Boggio, in funzione di Segretario.

Scusano l'assenza i Soci: Mattirolo, Somigliana e Repossi.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente presenta in omaggio all'Accademia le opere:

Emanuele Paternò: *Conferenze e discorsi scientifici*;

Aderito Belli: *Lazzaro Spallanzani*;

Ente autonomo per l'Acquedotto Pugliese: *Seconda relazione 1928,*

illustrandole con brevi parole, e ricordando che Lazzaro Spallanzani fu nominato Socio straniero della nostra Accademia il 25 luglio 1783.

Il Presidente presenta, a nome del Socio Somigliana, per l'inserzione negli *Atti*, una Nota dei Prof.ri A. Amerio, C. De Pasquale e V. Ricca, sulle *Misure pireliometriche eseguite sull'Aspromonte* (*).

(*) La Nota Amerio, De Pasquale, Ricca: *Misure pireliometriche eseguite sull'Aspromonte*, essendo ritardata, uscirà nella prossima dispensa.

Digitized by Google

Il Socio Pochettino presenta poi una Nota della Dottoressa G. Aliverti, sulle *Misure di radioattività atmosferica,* e la commenta brevemente.

Il Presidente presenta una Relazione del Socio Mattirolo circa la stampa dell'ultima parte della *Flora sarda* del Plazza (A. Terracciano) nel volume delle *Memorie* dell'Accademia; ma stante l'assenza del Socio Mattirolo, si delibera di rimandare la discussione ad una prossima seduta.

Digitized by Google

LETTURE

Misure di radioattività atmosferica.

Nota di G. ALIVERTI
presentata dal Socio nazionale residente A. Pochettino.

Fra le diverse questioni che interessano attualmente la Geofisica e la Meteorologia, non occupa l'ultimo posto quella della radioattività atmosferica; essa si connette sopratutto al problema, non ancora completamente risoluto, dell'origine dell'elettricità atmosferica, e interessa dal punto di vista meteorologico come uno degli elementi definienti le proprietà, lo stato e le perturbazioni dell'atmosfera. È ovvio che anche per questo problema sarebbe utile e desiderabile una vasta organizzazione e coordinazione delle misure, intesa a raccogliere numerosissimi dati sperimentali tutti confrontabili fra loro. Per ora tuttavia ci si deve accontentare di una serie di dati staccati, dovuti alla iniziativa individuale; essendomisi presentata la possibilità di fare misure al Col d'Olen, ho creduto quindi non privo di qualche interesse un confronto fra la radioattività atmosferica a Torino e quella di lassù. Nella presente Nota riferisco appunto sui dati ottenuti.

Al Col d'Olen (m. 2900 s. m.) ho eseguite misure nel mese di agosto dello scorso anno. Mi servii del metodo di attivazione dei fili; esso è quello che meglio si presta per esperienze di alta montagna, e che inoltre permette di raccogliere ed individuare i depositi attivi provenienti dalle tre diverse emanazioni che possono essere presenti nell'atmosfera. Usai un apparecchio di dimensioni circa uguali a quello di Elster e Geitel (1). Esponevo il filo di rame, lungo 15 metri e del diametro di mm. 0,5,

(1) Elster u. Geitel, " Phys. ZS. ,, *3*, 1902-1903.

Digitized by Google

in vicinanza dell'Istituto Mosso all'altezza di circa 3 m. dal suolo; lo tenevo esposto per 2 ore, carico a potenziale negativo circa costante, mai inferiore a 2500 Volta, usando una macchina elettrostatica a caduta d'acqua.

Anche recentemente sono state fatte misure con esposizioni molto lunghe (2); ma l'attivazione di 2 ore presenta, secondo me, notevoli vantaggi ed è da preferire. Le lunghe attivazioni (parecchie decine di ore) possono sovente, e senza controllo, non rispondere bene allo scopo per il quale si usano, cioè per la determinazione del rapporto fra il numero di atomi di Torio A e il numero di atomi di Radio A (sono questi i due elementi sempre presenti nell'atmosfera) esistenti nel medesimo volume di aria. In realtà capita sovente di osservare valori molto differenti dell'attività totale e della percentuale di Torio, sperimentando in giornate consecutive apparentemente normali e, talvolta, lo stesso accade per misure eseguite nella medesima giornata. Dunque per questo fatto e insieme perchè il deposito di Radio si distrugge nell'intervallo di 4 ore mentre quello di Torio dura molto più a lungo, rimarrà sul filo una quantità di deposito di Torio rispecchiante una media delle condizioni verificatesi durante la lunga esposizione, e per il deposito di Radio una quantità corrispondente alle condizioni delle sole ultime 4 ore. Allo scopo di determinare il rapporto suddetto, meglio sarebbe fare attivazioni brevi e poi, analizzata la curva sperimentale di disattivazione, risalire ai valori delle singole attività per lunghe esposizioni, mediante tavole.

Finita dunque l'attivazione, di due ore, portavo il filo avvolto sopra un telaio metallico, nella camera di ionizzazione. Osservavo la velocità di scarica della foglia dell'elettroscopio a intervalli di 15′ e per non meno di tre ore. La conoscenza dell'ordinata iniziale e di quella al tempo 180′ è in realtà sufficiente a determinare separatamente le attività dei componenti il deposito. Infatti se indichiamo con R_0 l'attività iniziale dovuta a depositi di Radio + Attinio, e con T_0 quella dovuta al

(2) Sam. Y. Khambata, " Indian Journal of Physics „, sett. 1927.

Digitized by Google

deposito di Torio, possiamo scrivere rispettivamente per i tempi 0′ e 180′:

$$(1)\quad \begin{cases} R_0 + T_0 = a_0 \\ 0{,}02\, R_0 + 1{,}785\, T_0 = a_t \end{cases}$$

dove a_0 e a_t rappresentano le ordinate della curva sperimentale tempo-attività. Si possono raggruppare in un sole termine, senza errore sensibile, le attività dei depositi di Radio e di Attinio perchè esse al tempo 180′ sono entrambe ridotte a circa il 2 % del valore iniziale. Il deposito di Torio, al tempo 180′, raggiunge invece il massimo di attività. Il coefficiente 0,02 posto nelle (1) si riferisce al Radio; la piccola differenza che esiste fra questo e l'analogo coefficiente per l'Attinio porterebbe, nella ipotesi più sfavorevole, a un errore del 4-5 % nella determinazione del Torio, e, praticamente, a nessun errore nella ulteriore separazione del Radio dall'Attinio. L'errore sul Torio ha poca importanza, data la grande variabilità che si nota nell'attività di questo tipo. Conosciuto dalle (1) il valore di T_0, si calcola facilmente tutta la curva del deposito di Torio. Detratta questa dalla curva sperimentale, se ne ottiene un'altra che a sua volta è poi facile analizzare ulteriormente nel caso in cui siano presenti entrambi i depositi di Radio o di Attinio.

Per la separazione della parte di Torio e per la interpretazione della curva rimanente ho assunto però sempre come tempo zero quello corrispondente ai 15′ dall'inizio della disattivazione; sopratutto per non eseguire delle extrapolazioni arbitrarie, ma anche per non servirmi delle primissime determinazioni dell'attività, che potevano essere affette da grosso errore (quando per es. l'elettroscopio veniva accidentalmente scaricato nel mettere in posto il telaio col filo). I coefficienti numerici delle (1) risultano allora modificati, ma valgono sempre le considerazioni fatte sopra. Ho ricavato il valore iniziale (per $t = 0$) dell'attività di ciascuno dei depositi presenti facendo uso delle tavole, dopo aver decomposta ciascuna curva sperimentale nelle sue componenti. Le curve ottenute nelle esperienze fatte al Col d'Olen, detratta la percentuale di Torio presente,

Digitized by Google

ricopiano (v. figure) la curva del deposito di Radio data dalle tavole ([3]).

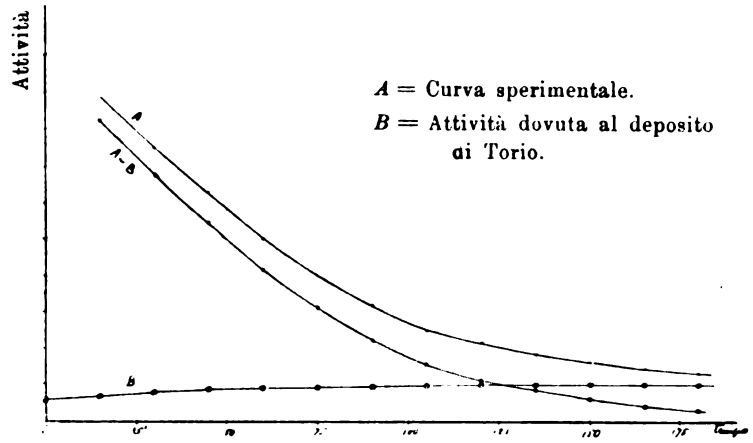


Fig. 1. — Col d'Olen (7-8-1928).

Risultano dunque presenti in quell'atmosfera soltanto emanazioni di Radio e di Torio; l'attività di tipo Torio appare piccola

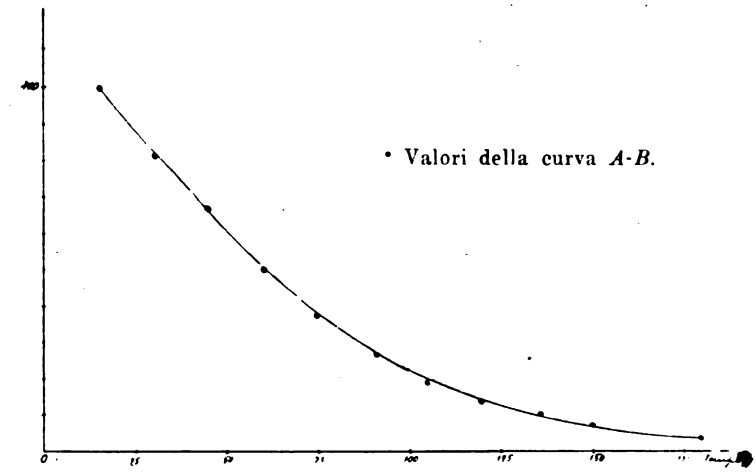


Fig. 2. — Confronto della curva *A-B* con quella data dalle tavole per il deposito di radio.

([3]) Meyer und Schweidler, *Radioaktivität*, 1927.

Digitized by Google

rispetto a quella di tipo Radio; al massimo ne è il 7 % (il 13 agosto, attivazione del pomeriggio).

La media dei numeri di attivazione (*), ottenuti in nove giornate normali (cielo sereno e atmosfera relativamente calma), vale 250; i singoli valori si scostano abbastanza poco dalla media (v. tabella).

	Data								
	4-VIII	6-VIII	7-VIII	8-VIII	9-VIII	10-VIII	11-VIII	12-VIII	14-VIII
A (totale)	223	193	183	333	265	290	224	288	253
A_R (radio)	220	186	176	330	255	282	219	283	246
A_T (torio)	3	7	7	3	10	8	5	5	7
A_T/A_R	0,015	0,035	0,039	0,01	0,04	0,03	0,015	0,015	0,028

Valori particolarmente bassi osservai invece in due misure eseguite nella giornata del 13 agosto; nella mattinata, a cielo coperto (esposizione dalle $6^h 30'$ alle $8^h 30'$) risultò A = 150 e nel pomeriggio esposizione dalle $11^h 30'$ alle $13^h 30'$) A = 60. Durante l'attivazione del pomeriggio, vento a raffiche sospingeva la nebbia dalla Valsesia verso il Colle. Il valore massimo 333 è di una giornata calda, senza vento, a cielo sereno e perfettamente trasparente.

Dal Direttore degli Osservatori Meteorologici e Geofisici del Monte Rosa mi vennero gentilmente forniti i dati meteorologici del mese di agosto riguardanti il Col d'Olen. Il confronto dell'andamento dell'attività raccolta in quel periodo con l'andamento dei diversi fattori meteorologici non rivela alcuna dipendenza particolare. La nota relazione con la pressione non appare molto evidente; se si eccettuano le due misure del 6 e 7 agosto che indicano una diminuzione di attività in corrispondenza all'andamento crescente della pressione. Il fatto si può attribuire alla relativamente piccola ampiezza delle variazioni verificatesi nella pres-

(*) Diminuzione di potenziale, in Volta per un'ora, dovuta a un metro di filo.

Digitized by Google

sione in quel periodo. Una specie di parallelismo c'è con l'umidità relativa. Riporto nella seguente tabella i valori di A delle giornate normali e i corrispondenti valori dell'umidità relativa.

A (totale)	223	193	183	333	265	290	224	288	253
U. R.	74	51	20	52	44	63	56	75	75

Una corrispondenza in questo senso era stata osservata da Satterly (5) in misure quantitative da lui eseguite a Cambridge; ma Jaufmann alla Zugspitze (6) ne ha notata una di senso contrario. Nel mio caso i due andamenti non sono così concordanti da permettere di asserire una sicura relazione.

A scopo di confronto eseguii, come dissi, misure anche a Torino (240 m. s. m.), alcune prima, altre dopo quelle del Col d'Olen. Tendevo il filo tra due finestre del primo piano, attraverso il cortile dell'Istituto di Fisica volto a ponente, ad un'altezza sul suolo maggiore quindi di alcuni metri di quella del Col d'Olen. Approfittai solo di giornate normali, cioè a cielo sereno ed atmosfera calma. L'attività del deposito raccolto è molto minore in generale di quella misurata al Col d'Olen. Tre misure fatte nell'ultima quindicina di luglio dànno come media A = 60. Dieci misure eseguite, sempre in giornate normali, nell'ultima quindicina di ottobre e in novembre dànno il valore medio 62, con un massimo, 120, del 25 ottobre e un minimo, 19, del 17 novembre. Il rapporto tra attività-Torio e attività-Radio risultò in un solo caso 0,02; nelle altre misure è trascurabile, poichè corrisponde a soli 2 o 3 millesimi.

I valori trovati in montagna, per il fatto che lassù la pressione è ridotta rispetto a Torino di circa $^1/_4$, sono da ritenere tutti leggermente inferiori al vero, perchè col diminuire della pressione il percorso delle particelle α aumenta e quindi, per dimensioni della camera di ionizzazione che non consentano l'esaurimento del percorso stesso, diminuisce la ionizzazione

(5) « Phil. Mag. », 1910 (2).

(6) Veröffentl. Bayer. Centralst. München 1909, C. 30.

Digitized by Google

prodotta. In media dunque l'attività totale raccolta a Torino è un po' meno della quarta parte di quella raccolta al Col d'Olen.

Mentre fra i risultati da me ottenuti a Torino e al Col d'Olen si può stabilire un confronto quantitativo perchè le condizioni di esperienza furono nei due casi all'incirca uguali, per quel che riguarda sia lo stato meteorologico dell'atmosfera, sia l'apparecchio usato, che fu sempre lo stesso; altrettanto non si può fare, con sicurezza, per i risultati degli altri sperimentatori. Questo del resto accade per tutte le misure della Geofisica e della Meteorologia, ma in particolare per queste che dipendono in modo notevole dallo strumento di misura.

Nell'andamento però i risultati su riportati concordano con quelli ottenuti dagli altri.

Istituto Fisico della R. Università,
Torino, 23 gennaio 1929, anno VII.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Febbraio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, GRASSI, SACCO. POCHETTINO, BOGGIO e il Segretario REPOSSI.

Scusa l'assenza il Socio D'OVIDIO.

Il verbale della adunanza antecedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio SACCO presenta in omaggio all'Accademia un suo opuscolo: *I massi erratici.*

Il Socio REPOSSI presenta in seguito per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Dott. Giuseppe RESEGOTTI, dal titolo: *Heulandite e stilbite di Prascorsano presso Cuorgnè*, ed una Nota della Dott.ssa Virginia GENNARO, dal titolo: *Thomsonite e scolecite dell'alta Valle d'Ayas e delle Valli di Lanzo*; e ne illustra brevemente il contenuto.

Il Presidente PARONA presenta poi una sua Nota dal titolo: *Appunti per uno studio sulle "Spugne" del Permiano di Sicilia*, facendo rilevare all'Accademia l'importanza che la paleontologia di tale periodo ha per la geologia siciliana.

Da ultimo il Socio MATTIROLO, al quale fu affidato in esame il manoscritto della III parte della *Flora Sarda* del TERRACCIANO, riferisce sull'importanza che tale opera, di cui l'Accademia pubblicò già le prime due parti, possiede, e conclude la sua Relazione con la proposta ch'essa venga pure pubblicata nelle nostre *Memorie*.

Il Presidente ringrazia vivamente il Socio MATTIROLO ed assicura che la proposta di pubblicazione verrà presa in esame quando si conosceranno esattamente le condizioni per la stampa delle *Memorie*.

Digitized by Google

LETTURE

Heulandite e Stilbite di Prascorsano presso Cuorgnè (Piemonte).

Nota del Dott. GIUSEPPE RESEGOTTI
presentata dal Socio nazionale residente E. Repossi.

Percorrendo la strada che da Belmonte scende a Prascorsano e prosegue poscia per Forno Rivara, dopo aver attraversato i graniti della " zona del Canavese „ si incontrano le formazioni dell'estesa serie dei gneiss Sesia-Val di Lanzo (1).

Il limite delle due zone qui a contatto, è in parte occultato dai terreni coltivi che occupano il fondo della valletta tra Pemonte e Prascorsano; gli sparsi lembi affioranti rivelano tuttavia in modo chiarissimo una zona di intensa laminazione, fortemente provata dall'azione degli agenti fisici, sì che le rocce, profondamente alterate, si lasciano agevolmente tagliare con un coltello.

Analogamente si presentano per breve tratto le rocce affioranti ai lati della carrozzabile per Pratiglione; a queste fanno seguito forme gradatamente più sane e più evidenti di gneiss appartenenti al gruppo dei gneiss minuti e micascisti.

È nota la grande varietà di tipi litologici che, pur formando un distinto membro tectonico, comprende il gruppo dei gneiss minuti e micascisti nella serie dei gneiss Sesia-Val di Lanzo, varietà di cui è dato rendersi conto facilmente già al semplice esame macroscopico delle rocce che accompagnano la carrozzabile suddetta, e meglio ancora con lo studio degli ottimi campioni che si possono raccogliere in alcune cave aperte nella formazione in parola.

Poco oltre i casolari di I Buf (2) è aperta una di tali cave,

(1) *Carta Geologica d'Italia,* foglio *Ivrea.* 1 : 100.000. Roma, 1912.
(2) *Carta d'Italia,* 1 : 50.000, foglio *Cuorgnè.* Istituto Geografico Militare.

Digitized by Google

da cui si estrae pietrisco per inghiaiamento stradale. Quando la visitai per la prima volta ebbi la ventura di trovarla in piena attività; il che mi permise di raccogliere alquanto materiale da studio. In seguito purtroppo la cava venne abbandonata e mi fu quindi troncata la possibilità di aumentare ancora la raccolta oltremodo promettente, di bei campioni mineralogici di questa interessante località piemontese.

Lo scavo abbastanza profondo ha messo qui allo scoperto rocce sanissime di cui è molto evidente l'andamento della scistosità, diretta sensibilmente da Nord a Sud con inclinazione di circa 60° ad Est.

La massa è attraversata da numerosi filoni e filoncelli di quarzo, frequentemente cariato e colorito in giallo da ossidi di ferro e sovente accompagnato dai minerali che formano oggetto della presente Nota.

La tessitura della roccia è fortemente scistosa.

In sezione sottile si osserva, in vari tipi, struttura ora quasi granulare ed ora pseudoporfirica per la comparsa di grossi noduli feldspatici sparsi qua e là, tanto da ricordare nettamente certi ortogneiss derivati per laminazione di rocce porfiriche.

Nel tipo più comune, che parmi corrispondere ai gneiss minuti leptinitici dello Stella (1), la massa è costituita da un aggregato di quarzo, albite ed ortoclasio con pochissimo microclino, disposti in straterelli alternanti con altri analoghi, ma cui si aggiunge piuttosto abbondante la muscovite. Sparso abbondantemente è il granato, associato, particolarmente negli strati micacei, a numerosi sciami di individui di epidoto; l'uno e l'altro sono visibili solo al microscopio. Sporadico qualche cubetto di pirite.

Le azioni dinamometamorfiche subìte dalla roccia sono accusate dalle estinzioni ondulate del quarzo.

Nella massa rocciosa si osservano delle concentrazioni albitiche in cui sono aperte geodine tappezzate di cristallini imperfettamente sviluppati dello stesso minerale.

---

(1) Stella A., *Relazione sul rilevamento geologico eseguito nell'anno 1893 nelle Alpi Occidentali*, " Boll. R. Comit. Geol. ,, Roma, 1894, n. 4, pag. 3.

Digitized by Google

L'esame di una sezione tagliata attraverso una di tali plaghe mostra che la struttura normale della roccia va diventando man mano più granulare avvicinandosi alle concentrazioni in parola; contemporaneamente si produce un aumento considerevolissimo nel granato, che compare associato, oltre che all'epidoto, anche ad abbondanti granuli tipici di zoisite. In queste plaghe sono anche più abbondanti i solfuri, pirite e galena.

La roccia dell'altra cava, più oltre verso Pratiglione, è invece un gneiss riccamente muscovitico a glaucofane.

Nella cava di I Buf ho potuto raccogliere campioni discretamente belli ed alcuni certamente pregevoli di due zeoliti: la *heulandite* e la *stilbite*, accompagnate talora da cristallini di altri minerali di interesse e bellezza assai inferiori.

Poichè non mi risulta che sia già nota tale località per le zeoliti suddette, reputo opportuno riferirne brevemente, accennando pure agli altri minerali che si rinvengono cristallizzati nelle geodi e nelle litoclasi ed a quelli che si rinvengono solo in roccia ma che assumono importanza per concentrazioni non normali per la roccia stessa.

Galena. — Trovasi in cubetti ed in masserelle cristalline irregolari, frequente però soltanto in vicinanza delle geodine più volte citate.

Pirite. — Componente accessorio costante della roccia in cubetti microscopici, nei pressi delle concentrazioni feldspatiche trovasi più abbondante ed in cubi più grossi.

Quarzo. — Nelle litoclasi trovasi qua e là qualche cristallo di questa specie con la consueta combinazione del prisma coi due romboedri.

Albite. — Forma delle concentrazioni in cui sono aperte delle geodine, nel cui lume sporgono cristallini del minerale stesso per lo più estremamente piccoli e non geminati. Al fianco sinistro della cava in una roccia profondamente alterata, nella quale si identificano filoni quarzosi e nuclei feldspatici, si trovano cristalli assai migliori, lunghi fino a 5 mm. a facce abbastanza brillanti, ora semplici ed ora geminati secondo la legge

Digitized by Google

dell'albite. Alcune misure eseguite su cristallini abbastanza belli condussero alla determinazione delle forme:

$\}010\{$ $\}001\{$ $\}110\{$ $\}1\bar{1}0\{$ $\{1\bar{3}0\{$ $\}\bar{1}01\}$ $\}\bar{4}03\{$ $\}\bar{1}\bar{1}1\{$

e forse $\}\bar{2}01\{$.

Granato. — Abbondantissimo attorno ai nuclei feldspatici; sempre anomalo.

Zoisite. — Abbondante assieme al granato come sopra.

Epidoto. — Cristallini schiacciati tappezzano alcune litoclasi.

Heulandite. — I tipi di giacitura per questo minerale sono tre, cui corrispondono anche differenti aspetti nei cristalli.

Cristalli di questo minerale si trovano anzitutto schiacciati nelle piccole litoclasi della roccia. Date le condizioni di spazio ristretto in cui si sono formati, sono ridotti a semplici lamelle a contorno poligonale, torbide e gialle per ossidi di ferro.

Un secondo tipo di giacitura si ha nelle cavernosità dei filoni e delle concentrazioni quarzose. Ma anche qui i cristalli non sono eccessivamente brillanti ed hanno anzi le facce torbide e lattiginose, che non permettono quindi di fare misure goniometriche di qualche precisione. A parte questo difetto di limpidezza, i campioni provenienti da questo tipo di giacitura sono veramente pregevoli per la ricchezza di ben formati cristalli che, ora isolati ed adagiati su $\}010\{$ ed ora ed assai più frequentemenți intrecciati caoticamente, rivestono densamente la roccia che li porta.

Provengono da questa giacitura i cristalli più grossi, lunghi secondo z fino a 6 : 8 mm., larghi secondo x 2 : 3 mm. e con uno sviluppo secondo y di 4 : 6 mm. ed anche più in qualche individuo eccezionale.

Il terzo tipo di giacitura è dato dalle geodine feldspatiche, nelle quali pochi ma limpidissimi e perfetti cristalli sporgono nella cavità mescolati ai cristallini di albite. Non si hanno qui campioni paragonabili a quelli del tipo precedente per ricchezza e grossezza di individui; in compenso la maggior perfezione dei

Digitized by Google

singoli cristallini permette di farne oggetto di determinazioni cristallografiche con risultato soddisfacente.

Per le osservazioni goniometriche vennero utilizzati alcuni di questi cristallini, che, pur essendo i migliori, diedero misure i cui valori estremi sono abbastanza lontani, e le medie alquanto divergenti dai valori calcolati; ciò che non deve far specie, tenendo conto delle forti oscillazioni nei valori angolari che sono proprie di questo minerale.

Le forme rinvenute sono le seguenti:

$$\{010\} \quad \{110\} \quad \{001\} \quad \{201\} \quad \{\bar{2}01\}$$

associate in due sole combinazioni diverse, l'una costituita da tutte e cinque le forme trovate, l'altra differente unicamente per la mancanza della $\{110\}$; l'*habitus* è però lo stesso per entrambe e corrisponde a quello noto e comune per l'Heulandite della maggior parte dei giacimenti (Fig. 1).

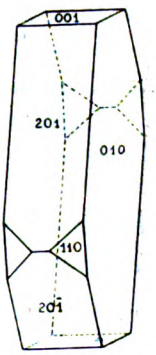


Fig. 1.

Dal maggiore o minore sviluppo secondo l'asse *y* si hanno forme quasi tabulari secondo $\{010\}$ oppure prismatiche secondo detto asse. Le massime dimensioni nelle stesse direzioni di cui nel tipo precedentemente descritto sono rispettivamente 6, 2 e 4 mm.

Le facce di $\{010\}$ sono sempre le più estese; seguono quelle di $\{201\}$, di $\{\bar{2}01\}$ ed infine di $\{001\}$. Le facce di $\{110\}$ raramente sono tutte presenti ed in genere hanno uno sviluppo assai variabile. L'Heulandite di Prascorsano apparterrebbe quindi al primo dei tipi fondamentali stabiliti dal Königsberger per le Heulanditi dei giacimenti alpini (1).

Il colore di questi cristallini non è latteo o giallo ruggine opaco come nelle altre giaciture; essi sono invece od incolori o leggerissimamente sfumati di giallo verdognolo e trasparentis-

(1) Königsberger J., *Ueber alpine Minerallagerstätten*. Citato in "Zeit. f. Kryst.,, 1923, Band LVII, pag. 679.

Digitized by Google

simi. Le facce di }010{ hanno la caratteristica lucentezza madreperlacea, vivissima specialmente sulle facce di sfaldatura, che è facilissima e perfetta.

Per le misure goniometriche servono ottimamente bene le facce di }010{ perfettamente piane; della zona [010], le cui facce sono tutte alquanto striate parallelamente all'asse di zona, sono migliori le facce di }001{, cui seguono le }$\bar{2}$01{ ed infine le }201{ sempre un po' ondulate. Le }110{ sono limpide ma frequentemente curve.

Segue la tabella delle misure eseguite e dei valori calcolati con le costanti del Des Cloizeaux:

$$0{,}40347 : 1 : 0{,}42929 \qquad \beta = 88° 34' 30''.$$

Spigoli misurati	Numero delle misure	Limiti delle osservazioni	Medie	Angoli calcolati
(001)—(201)	8	63° 41′ — 64° 32′	63° 58′	63° 40′
(001)—($\bar{2}$01)	7	65° 42′ — 66° 52′	66° 17′	66°
(201)—($\bar{2}$01)	8	49° 5′ — 50° 30′	49° 55′	50° 20′
(110)—(010)	15	67° 4′ — 67° 57′	67° 35′	68° 2′
(110)—(20$\bar{1}$)	5	32° 57′ — 34° 10′	33° 34′	33° 7′
(110)—(201)	8	31° 57′ — 32° 47′	32° 35′	32° 44′

P. sp. 2,27 (a 16°) (1).

La possibilità di disporre di numerose e belle lamine di sfaldatura }010{ mi permise di eseguire in modo abbastanza completo l'esame delle proprietà ottiche.

L'Heulandite è notoriamente un minerale assai interessante per le curiose e varie anomalie ottiche che presenta; dopo il

(1) I pesi specifici furono determinati colla soluzione di Thoulet e la Bilancia di Westphal.

Digitized by Google

Des Cloizeaux, il Mallard ed il Rinne (1) che le fecero rilevare, numerosi studiosi se ne sono occupati sperimentando cristalli di ogni località, e si può dire, che per quasi tutti i giacimenti, si trovarono per le singole proprietà ottiche valori differenti e variabili talora anche considerevolmente.

Per rendermi conto comparativamente dell'entità delle anomalie ottiche dell'Heulandite di Prascorsano, ho esaminato tutti i lavori includenti osservazioni sulle proprietà ottiche dello stesso minerale delle più note e classiche località.

Per quanto ho potuto constatare, parmi che, se qualitativamente per le suddette anomalie l'Heulandite in parola non differisce sostanzialmente dalle altre finora studiate, si caratterizza invece per la varietà e l'accentuarsi di esse e per l'estrema ed irregolare loro variabilità. L'esame della distribuzione dei valori delle singole proprietà nei vari punti di uno stesso cristallo, lascia la netta impressione di un disturbo ottico veramente eccezionale.

Le determinazioni ottiche vennero tutte eseguite su lamine di sfaldatura immerse in balsamo sciolto a freddo in xilolo.

Degli indici di rifrazione potei determinare col metodo dell'immersione unicamente α e β, che risultarono rispettivamente

$$\alpha = 1{,}498 \pm 0{,}001 \text{ (Na)}, \qquad \beta = 1{,}500 \pm 0{,}001 \text{ (Na)}.$$

La bisettrice acuta positiva coincide, come sempre, con y ed emerge quindi normalmente dalle lamine di sfaldatura, sulle quali si osservano assai nettamente le figure di interferenza.

Come nella maggior parte delle Heulanditi conosciute, anche in questa, l'aspetto delle lamine a nicols incrociati non è mai uniforme. L'area della sezione appare sempre divisa in settori irregolarmente triangolari, aventi per base i singoli lati del

---

(1) Des Cloizeaux A., *Manuel de Minéralogie*, Paris, 1862, pag. 425.

Mallard E., *De l'action de la chaleur sur l'Heulandite*, « Bull. Soc. Min. de France », vol. 5, 1882, pag. 255.

Rinne F., *Ueber Faujasit und Heulandit*, « Neues Jahrb. f. Min. », 1887, II, pag. 16.

Digitized by Google

contorno e sfumanti nell'interno in un altro settore a contorno indistinto occupante la parte centrale della lamina. Questo predomina nelle lamelle prossime alle facce naturali }010{, mentre è nullo nelle lamine passanti per il nocciolo del cristallo, la cui area è interamente divisa nei settori triangolari, qui molto netti, aventi i vertici nel centro della sezione.

Il comportamento è analogo a quello di moltissime Heulanditi, tra cui quelle studiate dal Rinne (1), che gli fecero formulare l'ipotesi che i cristalli del minerale in parola siano formati da tanti spicchi piramidali incontrantisi nel centro del cristallo ed aventi come base i lati del contorno.

Il numero dei settori osservati in questa Heulandite non è sempre uguale, varia da 4 a 8 secondo le lamine ed i cristalli. Le lamelle superficiali e le facce naturali }010{ non sono neppur esse completamente uniformi, come fu osservato da varii studiosi per Heulanditi di altre località, ma accennano a settori sia pure limitatamente alla porzione periferica, lasciando indivisa la parte centrale, che soffre tuttavia di tutti i disturbi comuni alle lamine a settori di cui dirò ora.

La struttura dell'Heulandite di Prascorsano è ancora complicata dall'esistenza di una fascia indivisa, di vario spessore nelle diverse lamine e nei diversi cristalli, che riveste come una buccia la parte a settori interna, da cui si distingue nettamente per una maggior normalità nel contegno ottico.

Oltre alla divisione in settori, si osserva nettamente per certe posizioni della lamina, rispetto ai nicols incrociati, una franca zonatura parallela ai lati del contorno.

Il confine tra i varii settori è sinuoso ed irregolare, in nessun caso rettilineo come fu osservato per qualche Heulandite.

Ognuno dei campi in cui le lamine sono divise presenta poi la più varia irregolarità nell'orientazione del piano degli assi ottici e nel valore dell'angolo di questi, nonchè della dispersione delle bisettrici e degli assi. Le estinzioni sono estremamente ondulate; partendo da una certa posizione della la-

(1) Rinne, op. cit.

Digitized by Google

mina che a nicols incrociati appare caoticamente chiazzata di chiari e scuri, e ruotando il tavolino in un certo senso, si vedono molteplici onde di estinzione attraversare i varii settori (parecchie per settore). Fa eccezione la zona esterna suddetta che ha pure estinzioni alquanto variabili, ma indipendentemente dalle onde che attraversano il resto della sezione.

La dispersione delle bisettrici, incrociata, è fortissima in certi punti, minore in altri e sopratutto nella fascia periferica in cui è talvolta insensibile. A luce bianca estinzione perfetta non si può in genere ottenere.

L'angolo degli assi ottici è noto variare da 0° a 92° e come media frequentemente osservata nei campi costanti 52°-53°. Nell'Heulandite di Prascorsano è variabilissimo in ogni plaga, ma in molte determinazioni non trovai mai meno di 20°30′ nè più di 47°, valori sempre più bassi della media suddetta.

Le tabelline seguenti varranno a dare idea della variabilità di orientazione ottica delle singole plaghe dei vari settori.

Le osservazioni furono eseguite in punti appartenenti sicuramente allo stesso settore in tutto lo spessore della lamina, a luci rossa (riga C) e verde (riga F) valendomi di schermi colorati monocromatici; gli angoli degli assi ottici vennero misurati col metodo del Mallard usando all'uopo un oculare a filo mobile della Casa Leitz.

Per l'orientazione del piano degli assi ottici riferita ad x, gli angoli δ sono positivi se formati nell'angolo ottuso xz, negativi in caso contrario.

Fascia periferica in vari punti:

δ = +72° +59° +86° +89° (rosso)

valori poco diversi pel verde

2E =	—	23° 20′	37° 40′	—	(rosso)
2E =	—	21° 50′	36° 50′	—	(verde)

$\rho > \upsilon$.

Digitized by Google

Settori $\{201\}$:

$\delta = +21°$	$+41°$	$+5°$		(rosso)
$\delta = +17°$	$+36°$	—		(verde)
$2E = 47°$	—	$35° 30'$		(rosso)
$2E = 46°$	—	$33°$		(verde)

$\rho > \upsilon$.

Settori $\{001\}$:

$\delta = -17°$	$0°$	$-3°$	$9°$	(rosso)
$\delta = -20°$	$-4°$	$-7°$	$-12°$	(verde)
$2E = 25° 50'$	$29° 10'$	$35° 40'$	$20° 30'$	(rosso)
$2E = 28°$	$33°$	$41° 20'$	$21° 50'$	(verde)

$\rho < \upsilon$.

Settori $\{\bar{2}01\}$:

$\delta = -53°$	$-63°$	$-57°$	$-86°$	(rosso)
$\delta = -43°$	$-56°$	$-50°$	$-78°$	(verde)
$2E =$ —	$32° 20'$	$35° 40'$	—	(rosso)
$2E =$ —	$34° 50'$	$37° 50'$	—	(verde)

$\rho < \upsilon$.

Le fotografie (Figg. 2-5), dànno pure e meglio idea dell'anomalo comportamento. Le fot. 2 e 3 a nicols incrociati (22 diametri) sono di una stessa lamina in due diverse posizioni; le fot. 4 e 5 pure a nicols incrociati (14 diametri) sono di due lamine di uno stesso cristallo ma tagliate a diversa profondità.

Disponendo di quantità sufficente di sostanza fu possibile eseguire l'analisi coi seguenti risultati:

H_2O	15,35
SiO_2	57,30
Al_2O_3	17,37
CaO	7,15
Na_2O	1,02
K_2O	1,25
	99,44.

Digitized by Google

Stilbite. — Si accompagna ovunque all'Heulandite, ma non possiede come quella caratteri distinti nelle varie giaciture. Anche di questa zeolite vennero raccolti campioni bellissimi.

Si trova raramente in cristalli con facce non ben definite, opache e fibrose, più sovente in aggruppamenti sferoidali o fascicolati e sopratutto in forma di rosette piane raggiate.

Il colore è per lo più bianco sporco o giallognolo.

Non fu possibile fare alcuna determinazione goniometrica e neppure ottica, salvo quella degli indici di rifrazione, dato che la facilissima sfaldatura secondo } 010 { è normale all'asse di media elasticità.

Col metodo dell'immersione si determinarono su lamine sottili di sfaldatura gli indici di rifrazione

$$\alpha = 1{,}488 \pm 0{,}001 \text{ (Na)}, \qquad \gamma = 1{,}501 \pm 0{,}001 \text{ (Na)},$$

$$\gamma - \alpha = 0{,}013.$$

La birifrangenza è quindi alquanto più elevata di quella della Stilbite di Kilpatrik studiata da Lacroix e M. Lévy e riportata dal Dana (1).

$$n_p = 1{,}494, \quad n_g = 1{,}500, \quad n_g - n_p = 0{,}006.$$

Rifrangenza e birifrangenza si accordano assai meglio coi valori trovati da Bianchi e Cavinato (2) per le Stilbiti del Miage e di altre località per le quali nei diversi casi n_g, n_p, $n_g - n_p$ stanno nei seguenti limiti:

$$n_g \quad 1{,}503 - 1{,}499, \qquad n_p \quad 1{,}492 - 1{,}489,$$

$$n_g - n_p \quad 0{,}012 - 0{,}010.$$

P. sp. 2,14 (a 16°).

---

(1) Dana E. S., *The System of Mineralogy*, New York, 1914, pag. 583.

(2) A. Bianchi e A. Cavinato, *I minerali del Miage*, "Atti Soc. Ital. Sc. Nat.", vol. LXIV, 1925, pag. 132.

Digitized by Google

Anche della Stilbite venne eseguita un'analisi con materiale controllato al microscopio coi seguenti risultati:

H_2O	17,05
SiO_2	57,57
Al_2O_3	16,06
CaO	7,96
Na_2O	1,21
	99,85

Mi sarebbe interessato fare, per entrambe le zeoliti, anche qualche osservazione sulla disidratazione, ma la quantità di materiale rimasta a mia disposizione dopo eseguite le esperienze precedenti mi parve troppo esigua, di modo che dovetti rinunciarvi.

Baritina. — In alcune geodi si trovarono dei fascetti di cristalli di questo minerale, limpidi, giallognoli, a spigoli un po' arrotondati e con le forme:

$\}001\{$ $\}010\{$ $\}011\{$ $\}102\{$ $\}111\{$ $\}113\{$.

Torino, Istituto Mineralogico della R. Università, febbraio 1929.

Digitized by Google

Fig. 2.

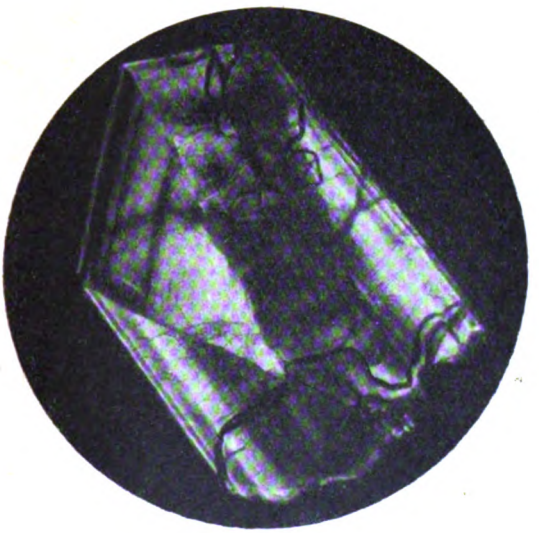


Fig. 3.

Figg. 2 e 3. — Lamina di sfaldatura $\}010\{$ di Heulandite in due diverse posizioni rispetto ai nicols. Nicols incrociati. Ingrand. 22 diam.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 4. — Lamina di sfaldatura }010{ di Heulandite passante pel nocciolo del cristallo.
Nicols incrociati. Ingrand. 14 diametri.

Fig. 5. — Lamina di sfaldatura }010{ di Heulandite prossima alla superficie del cristallo.
Nicols incrociati. Ingrand. 14 diametri.

Digitized by Google

Digitized by Google

Appunti per uno studio sulle " Spugne „ del Permiano di Sicilia (Bacino del Sosio).

Nota del Socio naz. resid. C. F. PARONA

Non è il caso di esporre notizie particolareggiate sul Permiano di Sicilia: in tutti i trattati di Geologia se ne parla, come di un giacimento tipico, in considerazione dell'importanza che gli affioramenti dei *calcari* bianchi, porosi *a Schwagerina* offrono per la ricchezza straordinaria in fossili ben conservati, complessità della fauna, e per gli interessanti rapporti ch'essa presenta colle faune sincrone di lontani paesi, nonchè per la conoscenza dell'evoluzione delle faune marine dal Paleozoico più recente al Mesozoico più antico. Ricorderò soltanto che recentemente le ricerche del collega prof. R. Fabiani lo hanno condotto a riconoscere, che le piccole masse (Rocca di S. Benedetto, Rupe del Passo di Burgio e Pietra di Salomone) lungo la valle del torrente di S. Calogero sono rinserrate " fra depositi del Trias (marne, argille, con intercalazioni di calcari lastriformi ad *Halobia* e *Posidonomya*) più o meno intensamente piegati e disturbati, ma con una disposizione d'insieme, che rivela i residui di una cerniera anticlinale deformata e spezzata „ (1).

Il prof. Fabiani chiude la sua comunicazione coll'augurio, che possa completarsi finalmente l'illustrazione di questa fauna permiana, della quale i foraminiferi, le spugne, i coralli, i cri-

(1) R. Fabiani, *Primi risultati di nuove ricerche negli affioramenti permiani del bacino del Sosio* (Palermo), " Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei „, 1° sem. 1926, pag. 612.

Digitized by Google

noidi, i briozoi e non pochi brachiopodi (1) e molluschi restano da far conoscere: impresa utile ed anche degna della memoria dell'illustre paleontologo palermitano G. G. Gemmellaro, che, scoprendo la fauna e iniziandone l'illustrazione (1887-1899), dimostrò come la vita marina nel Permiano, ritenuta fino allora piuttosto povera, risultasse inaspettatamente invece assai ricca, quanto in altri periodi paleozoici più antichi. Invitato direttamente e ripetutamente dal collega a partecipare all'impresa, e precisamente ad occuparmi dello studio delle " spugne „, che costituiscono parte cospicua della fauna per abbondanza e varietà di forme, ho infine accettato, non nascondendomi per altro le difficoltà da superare, che infatti, a studio iniziato, mi risultarono gravi e forse non tutte superabili.

Poichè il completamento del lavoro esigerà lungo tempo, parmi ora opportuno di annunciarlo, riferendone sommariamente i primi risultati, e presentando avanti tutto l'elenco delle opere consultate, alle quali mi riferirò nei brevi appunti paleontologici.

1. Diener C., *The Permo-carboniferous Fauna of Chitichum*, n° 1, " Palaeontol. Indica „, ser. XV, Himálayan Fossils, I, 1915.
2. Douvillé H., in " Mission scientifique en Perse par J. de Morgan „. III, *Études géol.*, Partie IV, *Paléontol.*, Paris, 1904, pag. 225.
3. — — *Les Spongiaires primitifs*, " Bull. Soc. Géol. France „, XIV, 1914, pag. 397.
4. Dunikowski (v.) E., *Ueber Permo-Carbon Schwämme von Spitzbergen*, " K. S. Vetenskaps-Akad. Handlingar „, XXI, 1884-1885.
5. Gerth H., " *Timorella permica* „ *n. g., n. sp., eine neue Lithistide aus dem Perm von Timor*, " Centralbl. f. M. G. u. Pal. „, Stuttgart, 1909.
6. — — *Die Spongien aus dem Perm von Timor*, 2e Nederland Timor-Expedit., S. Gravenhage-Algemaene Landsdrukkerij, 1927.
7. Girty G. H., *The Guadalupian Fauna*, U. S. S., Prof. Paper 58, 1908.
8. — — *On Some new and old species of carboniferous Fossils*, " Proc. of the U. S. N. Museum „, XXXIV, pag. 281, Washington, 1908.

(1) L'illustrazione dei " brachiopodi „ per parte del Gemmellaro e poi del Di Stefano (1914), fu ripresa recentemente dal Dott. Giovanni Merla, *Contributo alla conoscenza della Fauna dei calcari a " Schwagerina „ della Valle del Sosio*, " Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. „, Memorie, XXXVIII, 1927.

Digitized by Google

9. Hayasaka Ichirô, " *Amblysiphonella* „ *from Japan and China*, " The Sc. Rep. of the Tôhoku Imp. Univ. „, Sendai, Japan, Sec. Ser. (Geology), V, n. 1, 1918.

10. Hinde G. J., *Catalogue of the fossil Sponges in the Geol. Departm. of the Brit. Museum*, London, 1883.

11. — — *On the Genus Hindia Duncan, and the Name of its Typical Species*, " Ann. a Mag. Nat. Hist. „, XIX, 1887.

12. — — *A Monograph of the British Fossils Sponges*, II Spong. of the Palaeoz. Group, Palaeontogr. Soc., 1887, 1888.

13. — — *On the Chert and Siliceous Schits of the Permo-Carboniferous Strata of Spitzbergen, and on the Characters of the Sponges therefrom, which have been described by Dr. E. von Dunikowski*, " The Geol. Magaz. „, V, 1888.

14. — — *On* " *Pemmatites costipatus* „ sp. n., *a Lithistid Sponge from the Yoredale Beds of Yorkshire*, " The Quart. Journ. Geol. Soc. of London „, LII, 1896.

15. King W., *A Monogr. of the Permian Fossils of England*, Palaeontogr. Society, London, 1850.

16. Lange E., *Eine mittelpermische Fauna von Guguk Bulat* — Padanger Oberland, Sumatra — Beiträge zur Geolog. und Palaeont. von Sumatra. Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgeg. von A. Tobler, Basel, 1925.

17. Mansuy H., *Faunes des Calcaires à Productus du Cambodge-Spongiaires*, " Mém. du Serv. géolog. de l'Indochine „, II, fasc. IV, pag. 107, 1913.

18. Kauff H., *Palaeospongiologie*, " Palaeontographica „, XL, 1893-94, XLI, 1895.

19. Schellwien E., *Die Fauna der karnischen Fusulinenkalks*, " Palaeontographica „, XXXIX, 1892.

20. Steinmann G., *Pharetronen-Studien* (*Sphinctozoa*), " N. Jahrb. f. M. G. u. P. „, II Bd., pag. 139, Stuttgart, 1882.

21. Stuckenberg A., *Korallen und Bryozoen der Steinkohlenablagerungen des Ural und des Timan*, " Mém. du Comité Géologique, Russ. „, X, n° 3, 1895.

22. Tschernyschew Th., *Ueber die Artinsk- und Carbon-Schwämme von Ural und vom Timan*, " Verhandl. d. Russ. K. Miner. Gesellsch. „, XXXVI, Petersburg, 1898.

23. Vinassa de Regny P., *Triadische Algen, Spongien, Anthozoen und Briozoen aus Timor*, " Palaeontol. von Timor „, Stuttgart, 1915.

24. Waagen W., *Salt-Range Fossils* (I, Productus Limestones Fossils), *Coelenterata*, " Palaeont. Indica „, ser. XXXIII, 1887.

25. Yabe H., *Material for a knowledge of the Anthracolitic Fauna of Japan*, I, " Journ. Geol. Soc. of Tokio „, IX, n° 104, 1902.

Digitized by Google

***

La collezione del Museo di Palermo avuta in esame conta molti campioni e frammenti, non meno di trecento, che provengono nella maggior parte dallo spuntone di S. Calogero e gli altri dalla Rocca di Salomone; essi sono ripartibili in parecchi generi e numerose specie: qualcuno dei primi e non poche delle seconde da ritenersi nuovi per la scienza. Prevalgono le calcispongie: poche infatti, relativamente, quelle attribuibili alle silicospongie; e al pronto loro riconoscimento si oppone la difficoltà dell'intervenuto fenomeno di calcificazione, per cui i tentativi per isolare le spicole, non più silicee, mediante i processi suggeriti dagli autori (1), e valutarle nella loro forma intera in relazione ai caratteri strutturali, mi riescono finora incerti o vani. Si può, entro certi limiti, rimediare con sezioni sottili, spesso con ottimi risultati, col sussidio della fotografia.

Ciò premesso, passiamo, con qualche cenno, in rassegna i generi riconosciuti, a cominciare dalle calcispongie e dall'interessante gruppo di generi a caratteri primitivi, che Steinmann ha riunito, col tipico genere *Barroisia* Mun.-Chalm., sotto il nome di *Sphintoxoa* (**20** e **3**) (2).

Sollasia n. f. — Il tipo del genere è la *Sollasia ostiolata* Steinmann (**20**) del calcare carbonifero di Sabargas in Spagna (Asturie). L'unico esemplare, formato da quattro articoli, può essere confrontato con due forme: *Sollasia ostiolata* Steinm. (**20**, pag. 151, tav. VII, figg. 3, 3*a*, 3*b*) e *Taumastocoelia cassiana* Steinm. triassica (**20**, pag. 153, tav. VII, figg. 5, 5*a*, 5*b*, e tavv. VIII, IX), presentando per altro una statura tre volte maggiore. A quest'ultima si avvicina nell'aspetto per la suc-

(1) Ved. l'opera colle più recenti istruzioni e direttive: Léon Moret, *Contribution à l'étude des Spongiaires siliceux du Crétacé supérieur français*, " Mém. Soc. Géol. de France „, t. II, 1926; III, 1926, 1re part., cap. I, II.

(2) Ved. anche: Y. Delage et E. Hérouard, *Traité de Zoologie Concrète*, tome II, *Spongiaires*, pag. 79, Paris, 1899.

Digitized by Google

cessione e conformazione degli articoli, collegati da sutura ben impressa; ma per gli altri caratteri, superficie liscia, posizione dei cercini agli ostioli dei canali parietali, canale assile unico, rapporti strutturali fra i successivi articoli, esso spetta evidentemente al gen. *Sollasia*. Ricordo che il gen. *Sollasia* è citato con dubbio da Girty (7) fra le spugne del Guadalupiano.

Celyphia n. f. — Questo genere del Pomel è noto finora come triassico (S. Cassiano), ed io mi riferisco alla trattazione fattane dallo Steinmann (20, pag. 158, tav. VII, figg. 6-10; tav. IX, fig. 3), illustrando la *Celyphia marginata* (Münst.). I campioni in buon numero appartengono probabilmente almeno a due forme specificamente diverse: non pochi di essi risultano di parecchi articoli subglobulari, sovrapposti in serie diritta o tortuosa, a rapido o a lento sviluppo in grandezza degli articoli. Noto particolarmente la forma che meglio si avvicina alla *C. marginata*, per la conformazione e collegamento degli articoli, stato della superficie e caratteri degli ostioli; può dirsi che ne differisca soltanto per la statura maggiore.

Amblysiphonella vesiculosa (Koninck). — Sono numerosi i frammenti che, con ogni probabilità, appartengono a questo genere, e, in base ai caratteri esterni specialmente, sembrano raggruppabili in diverse forme. Il controllo dei caratteri interni rivelerà se spettano a forme nuove, o se e a quali forme conosciute e descritte [Steinmann (20), Waagen e Wentzel (24), Diener (1), Yabe (25), Hayasaka (9), Girty (7), Vinassa (23), Douvillé (2, 3, calcari a *Fusulinella* della Persia)] esse possono essere attribuite. La presenza della grande *Amblysiphonella vesiculosa* (Koninck), Waagen et Wentzel (24, middle *Productus* limestone) mi pare in ogni caso accertata, anche per la struttura interna di un piccolo esemplare e dall'aspetto di un esemplare di statura notevolmente superiore a quella del più grande figurato dai due autori citati (24, pag. 973, tav. 122).

In contrasto con questa *Amblysiphonella* gigante sta un'esile forma congenere, contraddistinta dalla brevità del diametro trasverso in rapporto colla lunghezza del cilindro.

Digitized by Google

N. gen. (cfr. *Barroisia* Mun.-Chalm., in Steinm.), **n. f.** — Mi riferisco ad una spugna del giacimento siciliano e della collezione padovana, favoritami in esame dall'amico prof. G. Dal Piaz, la quale nell'aspetto esterno di forma articolata si avvicina alla *Sebargasia carbonaria* Steinm. (**20**, pag. 171, tav. VI, fig. 2), differendone tuttavia per la maggior statura, ma specialmente perchè gli articoli, in serie lineare sovrapposti, sono separati l'uno dall'altro da un solco profondo e sono circolarmente nella linea mediana assai prominenti a guisa di corona, quasi anelli irregolari e ineguali fortemente carenati: carattere che la contraddistingue anche dalla *Amblysiphonella*. D'altra parte questa spugna si allontana dallo schema strutturale interno di questi due generi: manca infatti un vero canale assile, continuo, largo e subregolare, ed è un succedersi di lacune, più o meno ma sempre ampie, pure irregolari, angolose in sezione, tre o quattro per ciascun articolo, così da ricordare la *Barroisia anastomosans* (Mant.) dell'Aptiano (**20**, pag. 116, tav. VIII, fig. 1; **3**, pag. 399, tav. XII, figg. 4, 5), quando in essa l'irregolarità strutturale interna è molto accentuata. In qualche lembo ben conservato della superficie esterna, le fini granulosità dei pori si presentano evidenti, numerose, arrotondate.

Steinmannia gemina Waagen e Wentzel. — A questa fra le due specie degli autori citati (**24**, pag. 982, tav. CXXIV) attribuisco parecchi esemplari. che le corrispondono per statura, per il fatto della geminazione ed anche per la struttura interna, posta in evidenza da una sezione longitudinale. Il riferimento è stabilito anche in confronto delle due specie americane del Girty (**7**, **8**) e delle forme triassiche istituite dal Vinassa de Regny (**23**).

Colospongia n. f. — Attribuisco a questo genere del Laube una n. f., la quale, a parte la statura alquanto maggiore e l'ornamentazione dalla superficie a reticulato più evidente e regolare, ha spiccata affinità con la *Colospongia dubia* (Münst.) del Trias di S. Cassiano (Steinmann, **20**, pag. 173, tav. VI, fig. 3) per l'irregolarità di sviluppo dei segmenti e loro rapporti, andamento e sviluppo del condotto assile.

Digitized by Google

Guadalupia cylindrica Girty? — L'interessante genere del Girty è ben rappresentato nella fauna siciliana, ed una delle forme potrei senza esitare riferire alla *Guad. cylindrica* Girty (7, pag. 81, tav. V, fig. 12 ; tav. VI, figg. 3, 4) in vista della perfetta corrispondenza nella struttura largamente lacunare, quale risulta dalle sezioni trasverse e longitudinali. Ma resta qualche dubbio, perchè, mentre dalle figure del Girty non appare che la superficie esterna dei suoi esemplari cilindroidi sia granulare, nei nostri invece, che non raggiungono la statura di quelli della Guadalupa, la superficie esterna è distintamente granulare, e qua e là nodulosa. È da notare, tanto per la *Guad. cylindrica* Girty, quanto per la *Guad. zitteliana* Girty, la somiglianza della struttura della zona marginale (sez. trasv.), sebbene meno regolare, con quella del gen. *Coscinocyathus*, in modo anche più evidente che nel gen. *Amblysiphonella* (cfr. 3, tav. XII, fig. 9, *a*, *b*).

Fra le calcispongie, o ritenute tali, sonvene altre di riferimento tuttora dubbioso. Parecchi esemplari spettano forse al genere *Cysthothalamia* Girty (7, pag. 89) e taluni fors'anche alla *C. nodulifera* Girty (7, tav. VII, figg. 1-3). Una forma, nell'aspetto esterno e nei caratteri strutturali, ricorda assai da vicino *Maeandrostia Kanzanensis* Girty n. g., n. sp. (8, pag. 285, tav. XV, fig. 1) del giacimento a *Steinmannia* di Chanute nello Stato del Kansas. Della stessa provenienza è *Heliospongia ramosa* Girty (8, pag. 289, tavv. XVI, XVII), alla quale si avvicina un'altra spugna siciliana; ma la non buona conservazione della superficie dei rami e della struttura interna non permette, coi materiali in esame, un risolutivo studio, anche se esteso in confronto di silicospongie a forma ramosa, ad es. con quelle del gen. *Doryderma* Zittel. Posso infine notare certe affinità di altri esemplari, e numerosi frammenti di spugne cilindroidi, coi generi *Enoplocoelia* Steinm. (20, pag. 166, tav. VI, fig. 4) degli strati di S. Cassiano, e *Sphaerocoelia* Steinm. (20, pag. 162, tav. VII, fig. 4; 3, pag. 402, tav. XII, figg. 1-3) del Cenomaniano.

Riassumendo, e attenendomi alla classificazione di Steinmann integrata da quelle di Girty, risulta già notevole, per

Digitized by Google

l'Ordine *Sycones*, Sottordine *Sphintoxoa*, il numero dei generi accertati come presenti nella fauna permiana sicula. Delle famiglie: Sphaeroelidae i generi *Sollasia, Steinmannia, Celyphia*; Sphaerosiphonidae i generi *Enoplocoelia, Amblysiphonella*; Guadalupiidae il gen. *Guadalupia*; Cystothalamiidae il gen. *Cysthothalamia*.

Passiamo ora al gruppo delle Silicospongie, con poche specie per ora, perchè parecchie spugne mi restano indeterminate, non conoscendo generi e specie cui riferirle e dovendosi meglio chiarire i loro caratteri strutturali per accertare che sono effettivamente, come pare, nuovi per la scienza.

Virgula cfr. **malayica** Gerth. — Attribuisco al gen. *Virgula* Girty una delle spugne della fauna siciliana rappresentata da numerosi esemplari, ma colle stesse riserve espresse dal Gerth per la sua *Virgula*? *malayica*, non risultando nettamente quali siano i caratteri strutturali interni delle due forme guadalupiane-tipo, *V. neptunia* e *V. rigida* Girty (7). La nostra forma nell'insieme dei caratteri esterni, colla sua ornamentazione a cercini e strozzature anulari e irregolari, ricorda la *V. rigida* Girty (7, pag. 74, tav. VII, figg. 13, 14), ma nella statura la supera di gran lunga: così per l'aspetto esterno somiglia in modo evidente alla *V.*? *malayica* Gerth (6, pag. 115, tav. V, figg. 2, 2*a*), e altrettanto posso dire riguardo ai caratteri strutturali, che nelle sezioni trasversali e longitudinali dei nostri esemplari si possono ancora più chiaramente studiare.

Timorella n. f. — Una sessantina di esemplari, che in grande maggioranza appartengono certamente ad una sola specie, nell'aspetto ficoide si avvicinano assai ad *Aulocopella cepa* (Fr. Roemer) Rff. e ad *Aulocopium aurantium* Oswald del Siluriano (Rauff, 18, pag. 392, tav. XXIV), pur distinguendosi per la forma quasi costante, per la minor statura e per essere lungamente peduncolati, mentre non mancano caratteri di affinità strutturale, in particolare colla prima delle due specie citate. Ed è infatti colla *Aulocop. cepa* che il Gerth confronta la sua *Timorella permica* (6, pag. 122, tav. V, fig. 5; tav. II, figg. 1, 1*a*; tav. VII, fig. 5; tav. I, fig. 5), tipo del genere pur suo, al quale

Digitized by Google

ritengo debba essere assegnata la spugna siciliana, che è la più ricca di esemplari fra quante costituiscono la fauna. L'identità specifica colla *T. permica* non risulta; i nostri esemplari più grandi sono di un terzo più piccoli di quello figurato dall'autore (5, pag. 696, fig. 1); meno numerose e più fini rughe e solchi, che irradiano irregolarmente dall'osculo, il peduncolo, più o meno allungato, non manca mai, determinando appunto nettamente l'aspetto ficoide, mentre la *T. permica* appare piuttosto arrotondata; nè a diverse conclusioni porta il confronto colle altre due forme illustrate dal Gerth. Così l'identità manca per quanto riguarda la struttura interna, che nella forma siciliana è in generale ben conservata, come dimostrano le ben riuscite fotografie delle sezioni, assai espressive. Superficie esterna finamente granulare, con pori numerosi. Restano per altro a chiarire gli eventuali rapporti con *Anthracosycon ficus* n. g., n. sp. Girty (6, pag. 72, tav. VII, fig. 2).

Dagli esemplari della descritta forma altri in minor numero si differenziano perchè più allungati, cilindroidi, coll'osculo meno distintamente stelliforme, ma essenzialmente non differenti nei caratteri interni strutturali.

? **Stuckenbergia** sp. — Qualche esemplare cilindroide, irregolare di forma, se non per l'aspetto generale della spugna, ma piuttosto per la corrispondenza nei caratteri strutturali interni, posti in evidenza dalle sezioni, in confronto con quelli della *Stuckenbergia ufensis* (Stuck.) (in Tschernyschew, 22, pag. 39, fig. 13 = *Kazania ufimiana* Stuckenberg, 21, pag. 184, tav. XVIII, fig. 4), mi lascia credere che anche questo genere, o un genere strettamente affine, sia rappresentato nella fauna siciliana.

Come per il gen. *Stuckenbergia,* parecchi altri riferimenti di spugne della collezione in esame rimangono indecisi; ma spero di avere altro materiale di studio e di poter risolvere i dubbi. Molto probabile è la rappresentanza del gen. *Hindia* Duncan (11), specialmente per una forma che ha affinità con *H. Wanneri* Gerth (6, pag. 100, tav. III, fig. 1, *a*, *b*; II, fig. 7). Altrettanto posso dire sulla presenza del gen. *Pemmatites* Dunikowski (4), se considero la descrizione di *Pemmatites timo-*

Digitized by Google

rensis Gerth (6, pag. 102, tav. III, figg. 5-8). Non del tutto sicura rimane l'attribuzione al gen. *Palaeojerea* Gerth di altra forma, per quanto notevoli siano le affinità di struttura, se non d'aspetto, con *Palaeojerea Molengraaffi* Gerth (6, pag. 112, tav. VIII, fig. 1, *a*, *b*; tav. I, fig. 2). Sarei tentato di attribuirne un'altra a *Palaeoderma tubulosa* Gerth n. g., n. sp. (6, pag. 116, tav. V, fig. 6, *a*, *b*), ma l'unico frammento è troppo poca cosa per accertare il riferimento, tanto più che il diametro dei canali caratteristici non è uniforme, ma varia dall'uno all'altro. Così spero che nuove indagini risolveranno le incertezze sulla determinazione di altre spugne, che hanno affinità con altri generi istituiti dal Gerth: *Pycnospongia (P. timorensis)* Gerth (6, pag. 113, tav. II, fig. 6; tav. VII, fig. 1, *a*), *Aulacospongia (A. Hanieli)* Gerth (6, pag. 118, tav. I, fig. 6; tav. II, fig. 4; tav. VIII, fig. 2, *a*).

Parecchie altre spugne appartengono alla fauna siciliana, che non hanno corrispondenze coi generi finora citati, e che sono probabilmente tipi di generi non ancora descritti. Altri si avvicinano piuttosto a generi del Paleozoico antico: quali *Pattersonia* S. A. Miller, *Brachiospongia* Marsh, *Pycnopegma* Rff. ecc. (ved.: in Hinde (10-14) e in Rauff (18)); così ricordo anche due frammenti, che nel disegno geometrico della ornamentazione esterna riproducono esattamente quello in particolar modo caratteristico della *Sphaerospongia tessellata* (Phillips) (12, pag. 136, tav. IV, fig. 2, *a*, *b*) del Devoniano. Queste affinità di generi contribuiscono a conservare alla fauna stessa l'impronta paleozoica, e nel tempo stesso, insieme cogli altri generi, ne attestano la ricchezza e complessità.

***

Queste brevi note, in attesa dello studio completo e delle conclusioni, possono dare un'idea della larga parte che anche le spugne hanno nella composizione della fauna dei calcari a *Schwagerina* di Sicilia dell'Eopermico (Artinskiano superiore): nelle deduzioni da questo esame preventivo bisogna però procedere cauti per non pregiudicare quelle definitive. Considerando l'insieme dei fossili delle diverse classi, che compongono la ricca fauna, riesce evidente il carattere neritico del deposito di cal-

Digitized by Google

care bianco conchigliare che la contiene; di un livello neritico, confermato dalla presenza di spugne calcari e di silicospongie lithistidi, ma di litorale abbastanza profondo, data specialmente l'abbondanza dei brachiopodi.

Le spugne riconosciute specificamente, o almeno genericamente, suggeriscono confronti interessanti con altri giacimenti, con altre faune: e al riguardo accenno innanzi tutto alle affinità col gruppo di spugne faretrone illustrate dallo Steinmann (20), non solo per le corrispondenze con spugne del calcare carbonifero (Uraliano) di Sebargas nelle Asturie, ma anche per le affinità con spugne della fauna triassica di S. Cassiano, in contrasto abbastanza singolare col fatto, che per le faune del Carbonifero e del Permiano della Carnia nessun autore nota la presenza di spugne, tranne Schellwien (19), che accenna solo al gen. *Amblysiphonella*.

È nota l'abbondanza di spicule di Spongiari (*Pemmatites*) nelle ftaniti a *Productus* del Permiano inferiore dello Spitzberge (4, 14); ora la presenza del gen. *Pemmatites* nella nostra fauna non è da escludere. Riguardo alla fauna degli strati artinskiani degli Urali e di Timan, già fu notato dagli autori il ristretto numero di specie comuni colla fauna siciliana, nella quale le ammonidee dimostrerebbero un più avanzato grado di evoluzione: ora questa scarsità di forme comuni non è contraddetta dallo studio delle spugne in esame (21, 22). Il genere *Amblysiphonella* ricompare in Persia (2, 3): così per questa classe di fossili i rapporti colla fauna della Salt-Range imalaiana (Carbonifero superiore e Permiano) sono limitati alla comunanza di forme dei generi *Amblysiphonella* e *Steinmannia* (1, 24); come si può ripetere per i giacimenti dell'Indocina (17), della Cina e del Giappone (9, 25). Il gen. *Amblysiphonella* è citato con dubbio dal Lange (16) per il Permiano medio di Sumatra, particolarmente ricco di foraminiferi, con rappresentanti del gen. *Molengraaffia* Vin. (23), che finora non mi risulta presente nella nostra fauna.

Più notevoli sono le affinità riscontrate colle spugne del Permiano di Timor, illustrate recentemente dal Gerth (5, 6): egli distribuisce le 23 forme riconosciute, e tutte nuove, in 11 generi, dei quali ben 8 nuovi: per verità poche sono le forme

Digitized by Google

che mi risultarono con certezza finora comuni alle due faune, ma assai significative; in particolar modo una specie del genere *Timorella*, che è la spugna più ricca di esemplari fra tutte le nostre, e si può prevedere, che le affinità risulteranno più estese col procedere delle ricerche.

Passando in fine ai giacimenti antracolitici superiori dell'America settentrionale, sono fors'anche più interessanti i confronti coi risultati degli studî del Girty (7, 8) sulle faune del Guadalupiano, cioè della Sierra di Guadalupa al sud-ovest del Nuovo Messico, ovest del Texas, a numerosi brachiopodi, con rappresentanza di generi asiatici, e sulla fauna raccolta presso Chauute nello Stato del Kansas. È da segnalare la comunanza dei generi *Amblysiphonella*, *Steinmannia*, *Guadalupia*, *Virgula*, per ricordare soltanto quelli accertati, con specie strettamente affini, se non identiche, alle forme congeneri della fauna siciliana.

Se consideriamo poi la fauna siciliana anche semplicemente in base ai generi riscontrativi, riconosciuti con sicurezza o con molta probabilità di esattezza, in confronto colla fauna di Guadalupa, descritta dal Girty, prevalentemente composta di generi di calcispongie, e con quella di Timor a silicospongie, fatta conoscere del Gerth, rileviamo un altro fatto interessante; che cioè la nostra fauna, nella sua ricchezza, ha comuni un buon numero dei due gruppi di generi, che finora si conoscevano separatamente esclusivi o alla fauna di Guadalupa o a quella di Timor. E qui occorre avvertire, che non è il caso di sospettare, che nel giacimento siciliano calcispongie e silicospongie siano ripartite in due differenti livelli, in quanto che le une e le altre trovai associate nei campioni del calcare fossilifero.

Da questa rapida rassegna risulta dunque, che il contributo portato alla fauna permiana del calcare a *Schwagerina* di Sicilia collo studio delle spugne deve riuscire utile, non solo per la migliore e più estesa conoscenza paleontologica del giacimento siciliano, e, in generale, dello sviluppo evolutivo delle spugne nel tempo, ma anche sotto il punto di vista paleogeografico, per i rapporti e le affinità faunistiche, che vanno meglio delineandosi fra i depositi marini permiani nella loro distribuzione geografica, così largamente estesa ai tre continenti ora ricordati.

Digitized by Google

Thomsonite e scolecite dell'alta Valle di Ayas e delle Valli di Lanzo.

Nota di VIRGINIA GENNARO
presentata dal Socio nazionale residente E. Repossi.

Già diversi autori si occuparono frammentariamente dei giacimenti in pietre verdi dell'alta Valle d'Ayas, descrivendone alcuni interessanti minerali.

Per primo il Novarese diede notizie del giacimento della Bettolina Nord, valico situato appena a settentrione del Monte Rosso di Verra, che mette in comunicazione l'alta Valle di Gressoney con l'alta Valle d'Ayas; quivi nella massa prasinitico-serpentinosa che va ad appoggiarsi ai gneiss-micascisti del M. Rosa compaiono nuclei ben evidenti di granato, epidoto, diopside, clorite, anfibolo, magnetite ed altri minerali, e la precisa descrizione di tale giacimento precede uno studio dello Zambonini su di un ricco epidoto di questa località (1).

Successivamente il Boeris studiò un altro epidoto proveniente da un masso caduto con tutta probabilità dalla Rocca di Verra (2), dove con molta verosimiglianza si ripetono giacimenti simili a quelli del Monte Rosso, ed avendo egli visitato anche questi ultimi, oltre i minerali già rinvenuti dal Novarese, ve ne notò alcuni altri e precisamente titanolivina, perowskite, ilmenite, diopside, prehnite, clorite (3). Parte del materiale pos-

(1) F. Zambonini, *Sull'epidoto del Passo Bettolina, Vallone di Verra*, " Rend. R. Acc. Lincei „, s. V, XII, p. 567. Roma, 1903.

(2) G. Boeris, *Sull'epidoto della Valle di Ayas*, " Mem. R. Acc. Scienze „, serie VI, tomo VI. Bologna, 1909.

(3) G. Boeris, *Appunti di mineralogia valdostana: minerali del M. Rosso in Valle di Ayas*, " Rendic. R. Acc. Scienze „, Bologna, 1910.

Digitized by Google

seduto dal Boeris e quello più tardi raccolto dal Bianchi, fu affidato per lo studio al Carpanese, che lo iniziò pubblicando una nota (1) sull'epidoto del M. Rosso di Verra, che completa il lavoro dello Zambonini sullo stesso minerale della medesima località.

Nella collezione di minerali piemontesi del Museo di Torino mancavano affatto campioni provenienti da questo interessante giacimento, che mi recai a visitare con lo scopo appunto di colmare tale lacuna.

Ebbi così agio di constatare che non solo sul versante di Ayas, ma anche sul versante di Gressoney sono assai diffuse le lenti di granato accompagnato dai soliti minerali. Infatti percorrendo il sentiero che dal Colle della Bettaforca sale al Rifugio Quintino Sella, in tutta la zona serpentinosa che precede quella delle prasiniti anfiboliche si susseguono numerose le lenti di granatite, lenti che pel colore, la disposizione, il rivestimento di clorite ricordano perfettamente quelle degli analoghi giacimenti di Comba Robert, della Gava, di S. Ambrogio, ecc. Però, siccome la roccia vi è compatta e priva di fessure, rari sono i minerali ben cristallizzati, e infatti non mi fu possibile raccogliere che alcuni campioni di granato, diopside e vesuvianite verde chiara. Nelle serpentine si osservano inoltre frequenti noduli di talco lamellare, di titanolivina e, presso al contatto con le prasiniti, grossi individui di titanite che in alcuni punti è rosea, tanto da far pensare alla greenovite già altre volte riscontrata in rocce verdi (2).

E proprio nell'esaminare con una certa attenzione questa zona di contatto fra i serpentini e le prasiniti anfiboliche, nelle *ciapere* che dal sentiero Bettaforca-Capanna Sella scendono verso la Valle d'Ayas, la mia attenzione fu attirata da incrostazioni bianche che, abbastanza numerose, compaiono sui massi di prasinite. E feci raccolta di questo materiale, che in escursione

(1) T. Carpanese, *L'epidoto del M. Rosso di Verra (Gruppo del M. Rosa)*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie VI, II, 276. Roma, 1903.

(2) E. Repossi, *La bassa Val della Mera* (Parte 2ª), « Mem. Soc. It. Sc. Nat. », VIII, 114. Pavia, 1916.

Digitized by Google

successiva trovai pure diffuso più a nord, e precisamente nelle ciapere prasinitiche, sempre del versante di Ayas, presso al confine prasiniti-gneiss e micascisti del M. Rosa. Questi due contatti corrispondono sulla carta al 50.000 ai due passi della Bettolina (m. 2896) e della Bettolina Nord (quest'ultimo è solo indicato dalla quota m. 3157).

Già un esame sommario mi permise di ascrivere a due specie diverse il materiale raccolto. Infatti alcuni blocchi di prasinite portano alla superficie sferette bianche che, spezzate, hanno l'aspetto di coccarde a struttura raggiata, formate da un aggregato di aghetti cristallini abbastanza lucenti.

Altri blocchi, e questi assai più numerosi, recano vere incrostazioni, sia alla superficie, sia come riempimento di fessure, costituite pure da aggregati cristallini, ma assai più minuti ed opachi dei precedenti.

In entrambi i casi è impossibile isolare cristalli anche piccoli che si prestino a misure, perciò per la identificazione ho dovuto accontentarmi dello studio ottico e chimico.

Le determinazioni ottiche furono eseguite su frammenti di minerale schiacciato fra due vetrini. Pel primo dei due minerali a cui ho ora accennato gli aghetti cristallini hanno sempre estinzione parallela all'allungamento: possiedono facile sfaldatura secondo una faccia della zona d'allungamento dalla quale esce la bisettrice acuta con carattere positivo e secondo un'altra della medesima zona dalla quale emerge la bisettrice ottusa. Nelle lamine normali alla bisettrice acuta, che hanno allungamento positivo, la birifrazione è minima, invece diventa forte in quelle normali alla bisettrice ottusa, allungate negativamente.

Sulle lamine di sfaldatura normali alla bisettrice acuta riesce assai facile misurare l'angolo degli assi ottici: questa misura, eseguita a luce gialla coll'oculare micrometrico a filo mobile, e ripetuta più volte su diverse laminette, ha dato come media:

$$2E = 72°.$$

Ho determinato gli indici di rifrazione per mezzo dei liquidi ad indice noto ed ogni volta controllato. Sulle lamine a bassa

Digitized by Google

birifrazione e dalle quali emerge la bisettrice acuta ho misurato nella direzione d'allungamento $n = 1.525$ e in direzione normale $n = 1.523$. Sulle lamine a birifrazione forte e dalle quali emerge la bisettrice ottusa si misura nella direzione dell'allungamento ancora $n = 1.525$ e in direzione normale $n = 1.537$.

Risultano perciò

$$n_p = 1.523$$
$$n_m = 1.525$$
$$n_g = 1.537$$

valori perfettamente d'accordo con quelli dati da Schroeder (1), Scheit (2), Riva (3) per la *thomsonite*. Tale risultato viene anche confermato da quello dell'analisi che potei eseguire, avendo a disposizione non molto, ma sufficiente materiale. Questo fu accuratamente purificato e siccome l'attacco avvenne facilissimamente con HCl, si determinarono tutti i componenti sulla stessa porzione.

H_2O	14.62
SiO_2	37.35
Al_2O_3	29.17
CaO	13.80
Na_2O	4.62
K_2O	0.24
	99.80

P. Sp. = 2.25.

La roccia sulla quale è appoggiata la thomsonite è una tipica prasinite anfibolica con epidoto ordinario, zoisite, clorite, anfibolo actinolite, albite quali componenti essenziali, e titanite, pirite più o meno alterata, rutilo quali elementi accessori.

---

(1) Schroeder van der Kolk, *Tabellen zur mikr. Best. der Min.* Wiesbaden, 1906.

(2) A. Scheit, *Eine regelmässige Verwachsung von Thomsonit und Natrolit*, " Tschermak min. petr. Mittheil. „ XXXI, 495, 1912.

(3) P. Riva, *Thomsonite del territorio di Casarza Ligure*, " Riv. di Min. e Crist. Ital. „ XLIII, 61. Padova, 1914.

Digitized by Google

Anche del secondo minerale, che giace sopra una roccia perfettamente simile, salvo forse una maggiore diffusione dell'epidoto, si fece l'analisi, dopo aver determinato il peso specifico e i caratteri ottici.

Gli aghetti cristallini presentano sempre allungamento negativo, estinzione ora parallela, ora inclinata rispetto alla direzione d'allungamento. Da laminette dove si è misurata un'estinzione massima compresa fra i 15°-18°, emerge la bisettrice ottusa con carattere positivo e in esse la birifrazione è discreta, misurandosi in una direzione $n = 1.510$ e in direzione normale $n = 1.518$. Su laminette aventi estinzione parallela nella direzione di allungamento si misura ancora $n = 1.510$ e in direzione normale $n = 1.519$.

Da ciò risulta che

$$n_p = 1.510$$
$$n_m = 1.518$$
$$n_g = 1.519.$$

La bisettrice acuta, di carattere negativo, fa un angolo di 18° circa con z e il piano degli assi ottici è sensibilmente normale a 010.

Sono frequenti individui che presentano tracce di geminazione: misurando le estinzioni simmetriche si ottiene come massimo un valore di 17°.

L'analisi fornisce i seguenti risultati:

H_2O	13.84
SiO_2	46.37
Al_2O_3	25.80
CaO	13.58
Na_2O	0.64
K_2O	0.13
	100.36

P. Sp. = 2.25.

I caratteri ottici e i dati analitici permettono di affermare che il minerale in esame è *scolecite.*

Digitized by Google

Sarebbe stato interessante determinare in queste due zeoliti di località nuova l'andamento della disidratazione, dato il sempre grande interesse che offre la questione della presenza dell'acqua nelle zeoliti, ma si è dovuto rinunciarvi perchè si sarebbe sacrificato troppo del non molto abbondante materiale per riunire la dose di polvere necessaria alle determinazioni numerose e precise quali si richiedono oggi.

***

Nella raccolta piemontese del Museo Mineralogico di Torino esistono parecchi campioni di un minerale zeolitico indicato come *scolecite* e provenienti alcuni da Balme (Val d'Ala), altri da Lemie (Val di Viù) e al Museo Mineralogico del Valentino ho rinvenuto un campione analogo, catalogato come *mesotipo,* proveniente da Lemie. Ora in nessuno dei numerosi lavori sulla Val d'Ala è citata la scolecite: solo il Borson (1) accenna a parecchi campioni di mesotipo aciculare raggiato proveniente da Lemie, a mesotipo in mammelloni ricoprenti una roccia epidotica, proveniente dalle Valli di Lanzo, a mesotipo in pezzi staccati e parzialmente alterato proveniente " dalle sommità della Valle di Viù „, a mesotipo globulare sopra roccia di talco e granato della Mussa (V. d'Ala), a mesotipo di Balme (Ala), ecc.

Il Barelli pure (2) ricorda, attingendo evidentemente la notizia dal Borson, mesotipo bianco, globulare, raggiato nei dintorni di Viù, presso Lemie.

Il Jervis (3) invece non parla affatto di mesotipo, ma cita la thomsonite a Viù e, nel paragrafo consacrato a Lemie, fra i minerali della Torre d'Ovarda.

Ora i campioni del Museo Mineralogico descritti come mesotipo dal Borson nel suo *Catalogue raisonné*, risultano in un

---

(1) E. Borson, *Catalogue raisonné du Musée d'histoire nat. de l'Acad. de Turin*, Turin, 1811, p. 137. — Idem, *idem*, Turin, 1830, p. 289.

(2) V. Barelli, *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna*, Torino, 1835, p. 12.

(3) G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia*, Torino, 1873, p. 59.

Digitized by Google

vecchio catalogo manoscritto della raccolta, posteriore al Borson, elencati come scolecite, restando così eliminata la denominazione di mesotipo, che si presta facilmente ad equivoci, giacchè i vecchi autori se ne servivano per indicare sia la natrolite (Natron-mesotyp) che la scolecite (Kalk-mesotyp) (1).

Molto probabilmente i suddetti campioni non provengono precisamente nè da Balme, nè da Lemie, nè dalla Mussa, ma bensì dalla zona prasinitica che separa la Val d'Ala da quella d'Usseglio, poichè la roccia che porta il minerale zeolitico è una di quelle tipiche prasiniti a grana grossa, quali sono diffuse alla Torre d'Ovarda e zona limitrofa.

Il fatto che queste zeoliti si trovano in roccia prasinitica, quindi in giacitura analoga a quelle rinvenute alla Bettolina, e la loro evidente rassomiglianza con queste mi spinsero a studiarle contemporaneamente, sebbene non sia noto con precisione il luogo dove esse furono raccolte.

Si tratta d'una ventina di pezzi, dove il minerale minutamente cristallino forma aggregati globuliformi, croste che tappezzano le fessure della prasinite, allargandosi di tanto in tanto in coccarde.

Evidente sopratutto in alcuni campioni è una struttura zonata della crosta cristallina, che fa subito pensare alla presenza di due minerali diversi, depositatisi l'uno successivamente e sopra l'altro.

L'esame analitico e ottico ha permesso di concludere che due campioni vanno separati dagli altri perchè recano solo prehnite, confusa grossolanamente con la scolecite; alla maggioranza va conservata la dicitura di scolecite, poichè solo questa è presente, invece alcuni altri campioni vanno distinti dai precedenti poichè in essi oltre la scolecite è anche presente la thomsonite.

Sugli strati, sui noduli di scolecite si nota in due o tre campioni anche una generazione di piccoli, ma discreti cristalli, che poterono essere misurati. Sono prismi $\}110\{$ sormontati

---

(1) C. Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, II Bd., 1684. Leipzig, 1897.

Digitized by Google

da una piramide, che ricordano perfettamente quelli del Miage: già esaminati alla lente mostrano evidente la traccia di una geminazione rispetto alla faccia 100, geminazione che si controlla facilmente osservando il cristallo al microscopio in direzione normale alla 010: si ottengono estinzioni simmetriche con angoli di 16°-17°. Non ho riscontrato traccia di geminazioni più complicate quali sono quelle citate dal Lacroix (1), Bianchi e Cavinato (2) per la scolecite del Miage.

I cristallini impiantati sulle sferule di scolecite fibrosa hanno libera solo una estremità nella quale compaiono quattro facce della stessa forma } 111 { e abbastanza frequentemente faccette lineari di } 101 {, come provano le misure eseguite:

N.	Angoli	Limiti	Medie	Valori calcolati
6	110—1$\bar{1}$0	88.12—88.58	88.28	88.26
8	110—1$\underline{\bar{1}}$0	91.5 —92.12	91.47	91.34
4	111—1$\bar{1}$1	33.31—34.30	34.5	34.18
2	111—101	16.20—17.6	16.43	17.9
6	111—1$\underline{\bar{1}}$1	37.57—38.15	38.4	38 —
3	111—$\underline{1\bar{1}}$1	51.17—52.11	51.44	52.4
6	110—111	63.19—64.33	64.21	63.58

Nella tabella gli angoli misurati sono messi a confronto con quelli calcolati da Bianchi e Cavinato, che, meglio di quelli calcolati dal Flink, generalmente riportati nei testi, loro si avvicinano.

Gli indici di rifrazione sono coincidenti con i valori dati di solito per la scolecite e precisamente

$$n_p = 1.512\,,$$
$$n_m = n_g = 1.519\,.$$

(1) A. Lacroix, *Minéralogie de la France*, Paris, 1896, p. 273.

(2) A. Bianchi e A. Cavinato, *I minerali del Miage*, "Atti Soc. It. Sc. Nat. „, LXIV. Pavia, 1925.

Digitized by Google

Sia per la scolecite di Viù come per quella della Bettolina, data l'estrema piccolezza dei cristalli che impedisce di staccare laminette normali alla bisettrice acuta, non mi è stato possibile misurare, come avrei desiderato, l'angolo degli assi ottici.

L'analisi ha fornito i seguenti risultati:

H_2O	14.43
SiO_2	45.56
Al_2O_3	25.70
CaO	14.23
Na_2O	0.50
K_2O	0.11
	100.53

P. Sp. = 2.27.

Come già ho accennato, in alcuni campioni sopra i noduli di scolecite si è depositata in forma di crosta cristallina la thomsonite. Fu eseguita l'analisi dei due minerali, che si possono isolare bene l'uno dall'altro, essendo separati da uno strato pulverulento bianco, probabilmente d'alterazione.

In un campione sul quale scolecite e thomsonite erano abbastanza abbondanti e da cui si potè staccare una dose dei due minerali sufficiente per l'analisi, senza guastarlo troppo, la thomsonite è alla superficie un poco alterata e sebbene si sia avuto cura di usare per l'analisi solo la parte interna più fresca, pure risulta dalla percentuale dell'acqua un po' alta e da quella della calce un po' bassa che il minerale è leggermente alterato.

Analisi thomsonite		Analisi scolecite	
H_2O	15.72	H_2O	13.50
SiO_2	37.18	SiO_2	44.63
Al_2O_3	31.81	Al_2O_3	26.68
CaO	12.54	CaO	13.63
Na_2O	3.46	Na_2O	0.66
K_2O	0.14	K_2O	0.18
	100.85		99.28

P. sp. = 2.26.

Digitized by Google

Anche della thomsonite ho determinato gli indici di rifrazione, sebbene la cosa non riesca tanto facile dato l'intorbidamento degli aghetti cristallini e la loro estrema minutezza. Inoltre in questa thomsonite si direbbe assai poco marcata, se non addirittura mancante la sfaldatura 010, giacchè molto difficilmente si riesce ad ottenere le laminette ad allungamento positivo, da cui emerge la bisettrice acuta, necessarie per la misura di n_p. Invece perfetta è la sfaldatura 100. Ad ogni modo, anche se non rigorosamente esatti, gli indici di rifrazione della thomsonite analizzata hanno valori assai prossimi ai seguenti:

$$n_p = 1.528,$$
$$n_m = 1.530,$$
$$n_g = 1.538.$$

Ho pure determinato l'angolo degli assi ottici ($2E = 69°$ a luce gialla) e gli indici di rifrazione per la thomsonite del campione del Valentino, indicato come mesotipo, dove il minerale si presenta non più in aggregati cristallini, ma addirittura in minuti cristalletti quadrati troncati dalla base, freschissimi, ottenendo questi valori:

$$n_p = 1.530,$$
$$n_m = 1.531,$$
$$n_g = 1.541,$$

i quali sono notevolmente più alti di quelli citati comunemente dagli autori.

Infatti Dana, Hintze, Weinschenk, Rosenbusch, Lacroix riportano i valori determinati da Des Cloizeaux con luce rossa per la thomsonite di Kaaden (Boemia), dove

$$n_p = 1.497,$$
$$n_m = 1.503,$$
$$n_g = 1.525.$$

Già lo Scheit trovò valori più alti per la thomsonite di Jakuben (Boemia):

$$n_p = 1.521, \quad n_m = 1.523, \quad n_g = 1.534;$$

Digitized by Google

così pure la Riva per la thomsonite di Casarza:

$$n_p = 1.517\,, \quad n_m = 1.520\,, \quad n_g = 1.538\,,$$

e la Bellinzona per la thomsonite dei Monzoni (1).

Più recentemente ancora il Gordon (2) riprese in esame thomsoniti di varie località, conservate nell'Accademia di Storia Naturale di Filadelfia, e constatò in primo luogo che non tutti i campioni catalogati come thomsonite lo erano realmente, essendosi in alcuni casi confuso natrolite, scolecite, mesolite con la thomsonite.

Inoltre, determinati gli indici di rifrazione di varie thomsoniti, trovò che per questo minerale essi variano da un minimo (Th. di Faroë Islands) dove

$$n_p = 1.517\,, \quad n_m = 1.520\,, \quad n_g = 1.530$$

a un massimo (Th. di Kilpatrick) dove

$$n_p = 1.529\,, \quad n_m = 1.531\,, \quad n_g = 1.541.$$

Di poco superiori sono gli indici della calciothomsonite di Franklin Furnace, dove

$$n_p = 1.530\,, \quad n_m = 1.532\,, \quad n_g = 1.542.$$

La thomsonite di Viù possiede dunque indici di rifrazione che rientrano perfettamente nei limiti segnati da Gordon.

---

(1) G. Bellinzona, *Thomsonite associata a cabasite dei Monzoni*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie V, XXXII, 346. Roma, 1923.

(2) S. G. Gordon, *Optical notes on Thomsonite*, « Journ. of Min. Soc. of America », VIII, n. 7, 125, 1923.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 24 Febbraio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. G. GRASSI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Somigliana, Sacco, Pochettino, Garelli, Vallauri e Boggio in funzione di Segretario.

Scusano la loro assenza il Presidente Parona ed il Segretario Repossi.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente Grassi rivolge cordiali parole di benvenuto al nuovo Socio Prof. Vallauri, il quale risponde ringraziando vivamente per l'alto onore avuto dall'Accademia e salutando nel Grassi il suo venerato Maestro, assicurando inoltre la Classe che farà del suo meglio, compatibilmente con le sue mansioni e incarichi, per rendersi degno dell'alta distinzione avuta.

Il Presidente legge i seguenti telegrammi inviati a S. M. il Re, a S. Santità e a S. E. il Capo del Governo, in occasione della avvenuta conciliazione:

Primo Aiutante Campo Sua Maestà il Re - Roma:

Prego esprimere a Sua Maestà esultanza questa Reale Accademia Scienze per avvenuta conciliazione che assicura all'amata Italia inestimabili benefizi pace e grandezza. Ossequi.

Presidente: Parona.

Digitized by Google

Sua Eminenza Reverendissima Cardinale Segretario, Stato Vaticano - Roma:

Nome Reale Accademia Scienze Torino prego deporre ai piedi Sua Santità espressione esultanza storico avvenimento auspicata conciliazione con augurii lungo felice Pontificato per bene Chiesa Cattolica e Patria italiana. Ossequi.

Presidente: PARONA.

Sua Eccellenza Capo Governo BENITO MUSSOLINI - Roma.

Nome Reale Accademia Scienze Torino esprimo a Vostra Eccellenza calorosi rallegramenti, ringraziamenti per grande storico avvenimento che conferma al suo altissimo Artefice la perenne riconoscenza della Patria e della Cristianità. Ossequi.

Presidente: PARONA.

La Classe accoglie con vivo plauso la lettura di tali telegrammi.

Il Presidente dà poi comunicazione dei due telegrammi di risposta finora pervenuti all'Accademia, e che sono del Generale di Bernezzo per S. M. il RE e di Sua Eminenza il Cardinale GASPARRI per S. Santità.

Il Presidente presenta poi l'omaggio pervenuto all'Accademia dell'opera di Georg MOHR: *Euclides Danicus,* Amsterdam, 1672, stampata a Copenhagen, sulla quale interloquiscono i Soci D'OVIDIO e PEANO.

Il Socio SACCO, a nome dell'autore Dr. DU RICHE PRELLER, presenta due volumi intitolati: *Italian Mountain Geology,* illustrandoli brevemente. Inoltre presenta il suo lavoro: *Schema geologico del Biellese,* estratto dal volume " Il Biellese „, e ne commenta il contenuto in poche parole.

Il Socio BOGGIO presenta per l'inserzione negli *Atti* la Nota del Prof. BURALI-FORTI: *Una prima questione di balistica esterna,* riassumendone in breve il contenuto.

Il Socio Senatore D'OVIDIO prega il Presidente di volere trasmettere, a nome della Classe, i migliori auguri e cordiali saluti al Prof. PARONA.

Digitized by Google

LETTURE

Una prima questione di balistica esterna.

Nota di C. BURALI-FORTI
presentata dal Socio nazionale residente T. Boggio.

1. Generalità e notazioni.

Studiamo il moto *assoluto* di un proiettile ridotto alla sua espressione più semplice, il *baricentro* e la *massa* (un *punto-massa*), con mezzi geometrici, diversi dagli ordinari, che permettono di vedere sotto *nuovo aspetto* la *funzione resistente*. Risolta questa *prima questione di balistica esterna* si può poi continuare lo studio (*) quando all'ipotetico proiettile punto-

(*) Mediante *vettori* ed *omografie* basandosi sui lavori che ora citiamo, nei quali, sotto forma puramente *meccanico-geometrica* (libera da coordinate), immediatamente comprensibile, vengono studiati i moti dei *corpi rigidi*, della *trottola*, ecc.

R. Marcolongo, *Sul moto di un corpo pesante intorno a un punto fisso* [« Rend. Accad. Lincei », s. V, vol. 17, 2° sem. 1908, pp. 698-705]. — ***Momenti d'inerzia ed impulso nella dinamica dei sistemi rigidi*** [« Rend. Acc. Napoli », s. III, vol. 16, a. 1910, pp. 193-202].

O. Lazzarino, *Corso di fisica matematica* (Catania, 1922). In particolare i lavori seguenti:

Interpretazione cinematica e realizzazione meccanica del problema di Sofia Kowalewski relativo al moto di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso [« Rend. Acc. Napoli », s. III, vol. 17, a. 1911].

Sull'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti [« Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 28, 1° sem. 1919, pp. 325-341].

Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti [« Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 28, 2° sem. 1919].

Sul moto dei giroscopi asimmetrici pesanti nel caso in cui l'invariante principale S è costantemente nullo [« Rend. Acc. Lincei », 2° sem. 1919].

Digitized by Google

massa, si sostituisce il proiettile avente forma di conveniente solido di rotazione.

Lo *spazio fisico*, con tutti i suoi elementi, nel quale avviene il moto del punto-massa, si intende *immerso* nello *spazio geometrico assoluto fisso* (*).

Facciamo le seguenti ipotesi. Il moto del punto-massa avviene in *presenza della terra* in un *mezzo resistente*. La resistenza si suppone *parallela* (opposta) alla *velocità geometrica* del punto-massa in ogni istante. Del moto generale della terra nello spazio si tiene conto soltanto del *moto* (uniforme) *di rotazione* intorno al suo *asse*, asse che si intende *fisso* nello *spazio geometrico* sopra indicato (**).

In tutto ciò che segue indichiamo con:

O il *centro* e r il *raggio* della terra, supposta sferica;

u il *vettore unitario costante* parallelo all'asse *fisso* della terra [cfr. sopra] e diretto da *Nord* a *Sud*;

ω la *velocità angolare* (costante) di rotazione della terra, e quindi, ωu è il *vettore di rotazione* della terra, essendo tale rotazione diretta da *Ovest* ad *Est*;

P la *posizione assoluta*, nello *spazio geometrico fisso*, del proiettile nel tempo generico t;

(*) Non stiamo a ripetere quanto a proposito dello *spazio geometrico fisso* (concezione newtoniana), moti *assoluti* e *relativi*, si trova esposto nella Nota *Moti relativi e pendolo di Foucault* [" Rend. Ist. Lombardo „, Vol. LV, a. 1922, pp. 310-317] di C. Burali-Forti e T. Boggio, Nota che citeremo con l'abbreviazione P. F.

Avremo occasione di citare:

C. Burali-Forti e T. Boggio, *Meccanica razionale* (Collezione Lattes) con l'abbreviazione M. R.

C. Burali-Forti, *Geometria analitico-proiettiva*, 2ª ediz. (G. B. Petrini, Torino) con l'abbreviazione G. A. P.

C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analisi vettoriale generale*, 2ª ediz., Vol. I (N. Zanichelli, Bologna), con l'abbreviazione A. V. G. — *Elementi di calcolo vettoriale*, 2ª ediz. (N. Zanichelli, Bologna) con l'abbreviazione E. C. V. [Di questi E. C. V. ne è in corso di stampa la 3ª ediz.].

(**) Lo studio della *caduta di un grave*, tenuto conto della rotazione della terra, è compreso nello studio del moto del proiettile, dipendentemente dalle condizioni *iniziali*.

Digitized by Google

h la *minima distanza* di P dalla superficie della terra, di modo che si ha: $r + h = \mathrm{mod}(P - O)$; il vettore unitario $(P - O)' (r + h)$ ha la *direzione* della *verticale* in P e il *verso* dal *basso* all'*alto*;

m, μ, f, rispettivamente, la *massa del proiettile*, la *massa della terra*, la *costante di Gauss*;

$g = f\mu/(r + h)^2$, funzione di P, valore della *accelerazione di gravità* nel punto P;

$l = g/(r + h) = g/\mathrm{mod}(P - O)$, pure funzione di P; abbreviazione utile.

Le derivate rispetto al tempo, t, saranno indicate con gli apici.

2. Equazione differenziale generale del moto assoluto del proiettile.

Il proiettile può ritenersi *libero* ed in moto perchè soggetto alle forze seguenti.

1ª La *forza di gravità*, il cui vettore (*) nel punto generico P è [cfr. P. F.]

$$-\frac{mf\mu}{(r+h)^2}(P-O) = -\frac{mf\mu}{\{\mathrm{mod}(P-O)\}^2}(P-O) =$$

$$= -\frac{mg}{\mathrm{mod}(P-O)}(P-O) = -ml(P-O),$$

vettore che è diretto da P ad O, parallelamente alla *verticale* in P.

2ª La *forza resistente*, opposta, come si è detto, alla *velocità* P' e il cui *vettore* è $-m\varphi P'$, con φ *numero reale*, funzione di P, *positivo* o *nullo*. Ne segue che $m\varphi\,\mathrm{mod}\,P'$ è l'*intensità della resistenza*, cioè l'ordinaria *funzione resistente*.

(*) Molti confondono una *forza* con il *vettore della forza*, e dicono che *una forza può esser rappresentata da un vettore*. Ciò è falso perchè una *forza* è *funzione* di *due* elementi; il *vettore della forza* e il *punto di applicazione*.

Digitized by Google

3ª La *forza centripeta*, dovuta alla rotazione della terra, il cui vettore [cfr. P. F.] è

$$m\lambda\omega^2(\boldsymbol{u}\wedge)^2(P-O),$$

con λ numero reale relativo funzione di P, il cui valore assoluto non supera *uno*.

Ciò posto, e applicando il *principio di D'Alembert*, si ha l'*equazione generale differenziale* (2° ordine) *del moto assoluto del proiettile* [cfr. P. F.]

$$(1') \qquad P'' = -l(P-O) - \varphi P' + \lambda\omega^2(\boldsymbol{u}\wedge)^2(P-O),$$

ovvero, ricordando [cfr. A. V. G., o M. R.] che

$$(\boldsymbol{u}\wedge)^2 = \mathrm{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - 1,$$

$$(1) \quad P'' = -\varphi P' - (l+\lambda\omega^2)(P-O) + \lambda\omega^2.\,\boldsymbol{u}\times(P-O).\,\boldsymbol{u},$$

nelle quali forme, conviene ricordarlo, l, λ, φ sono funzioni di P e quindi anche di t.

A proposito della equazione (1'), od (1), e delle forze 1ª, 2ª, 3ª sopra considerate, giova osservare quanto segue. Se P è in moto in virtù della sola forza 1ª (gravità newtoniana, *indipendente* dalla *resistenza del mezzo* e dalla *rotazione della terra*) allora l'equazione (1') diviene $P'' = -l(P-O)$ e si ha la traiettoria nel *vuoto* con la *terra fissa*. Ma noi vogliamo tener conto, sia della *resistenza del mezzo* (o anche di altre azioni resistenti), che della *rotazione della terra*; quindi P sarà in moto in virtù, oltre che della forza 1ª, anche di un'altra forza. Questa possiamo scomporla in *due*; una parallela ed opposta alla velocità geometrica P' (la 2ª), e che è l'ORDINARIA *forza resistente*; un'altra (la 3ª) parallela alla *forza centripeta* che *agirebbe* su P *se* P *fosse invariabilmente collegato con la terra*, il cui vettore deve, necessariamente, essere il prodotto di $m\omega^2(\boldsymbol{u}\wedge)^2(P-O)$ per un coefficiente numerico λ, funzione di P e in valore assoluto minore di uno perchè P è trascinato solo parzialmente dall'atmosfera. Tale considerazione delle tre forze, atte a produrre il moto di P, è alquanto diversa dall'ordinaria, ma è fisicamente esatta.

Digitized by Google

Se P, funzione di t, descrive una *traiettoria fisica effettiva* di un proiettile punto-massa, P deve, nelle ipotesi fatte in principio, sodisfare alla (1) la quale determina, scalarmente, φ e λ. Basta moltiplicare scalarmente ($\times$) la (1'), equivalente alla (1), separatamente per due vettori $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ per ottenere

$$\varphi \,.\, P' \times \boldsymbol{b} - \lambda\omega^2 \,.\, (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \times \boldsymbol{b} = -\{ l(P - O) + P'' \{ \times \boldsymbol{b}$$

$$\varphi \,.\, P' \times \boldsymbol{c} - \lambda\omega^2 \,.\, (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \times \boldsymbol{c} = -\{ l(P - O) + P'' \{ \times \boldsymbol{c},$$

equazioni lineari in φ e $\lambda\omega^2$ che, posto $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$, dànno subito [cfr. E. C. V. per il prodotto interno di due prodotti vettoriali]

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi \,.\, P' \wedge \{ (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \{ \times \boldsymbol{a} = \\ = -\{ l(P - O) + P'' \{ \wedge \{ (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \{ \times \boldsymbol{a} \\ \lambda\omega^2 \,.\, P' \wedge \{ (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \{ \times \boldsymbol{a} = \\ = P' \wedge \{ l(P - O) + P'' \{ \times \boldsymbol{a}, \end{cases}$$

che determinano φ e $\lambda\omega^2$, *indipendentemente da* $\boldsymbol{a}$, purchè non sia nullo, per tutti i valori di t, il prodotto misto che comparisce nei primi membri delle (2). Ora affinchè si abbia

$$P' \wedge \{ (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \{ =$$
$$= P' \times \boldsymbol{u} \wedge (P - O) \,.\, \boldsymbol{u} - P' \times \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{u} \wedge (P - O) = 0$$

per ogni t, deve essere, per ogni t,

$$P' \times \boldsymbol{u} \wedge (P - O) = 0 \quad \text{e} \quad P' \times \boldsymbol{u} = 0,$$

da cui $$P'' \times \boldsymbol{u} \wedge (P - O) = 0 \quad \text{e} \quad P'' \times \boldsymbol{u} = 0,$$

poichè $\boldsymbol{u} \wedge (P - 0)$ e $\boldsymbol{u}$ sono vettori non paralleli (sono ortogonali); vale a dire P dovrebbe descrivere una *retta* parallela al piano dell'equatore. il che è impossibile a causa della forza 1ª che non è nulla. Il vettore $\boldsymbol{a}$ non perpendicolare a

$$P' \wedge \{ (\boldsymbol{u} \wedge)^2 (P - O) \{$$

può essere scelto in infiniti modi, con infinite terne di vettori

Digitized by Google

non complanari, poichè P deve descrivere, fisicamente, una linea. Dunque, eccettuato qualche caso limite che dia nullo il prodotto esterno di P' per $(u\wedge)^2(P-O)$, le (2) determinano φ e in un sol modo, φ e λ essendo a vettore arbitrario, ad es. costante, che non annulli (e ne esistono infiniti) i coefficienti di φ e $\lambda\omega^2$ delle (2) (*).

Visto che φ e λ sono *determinati* dal *moto fisico effettivo* del proiettile (come, del resto, è ovvio), deve esistere una equazione differenziale in P, *non contenente esplicitamente* φ, λ *ed equivalente alla* (1) che, una volta integrata, deve dare per P una funzione tale di t da sodisfare alla (1) con i valori (2) di φ e λ. Tale equazione si ottiene subito moltiplicando $(\times)$ la (1') per

$$P'\wedge(u\wedge)^2(P-O)$$

e si ha:

$$(3)\qquad \{l(P-O)+P''\}\times\{P'\wedge(u\wedge)^2(P-O)\}=0$$

che equivale alla (1'), e anche alla (1), poichè esprime che $l(P-O)+P''$ è vettore complanare con P' e $(u\wedge)^2(P-O)$. Vale a dire dalla (3) si ricava la (1') e una volta integrata la (3) si ottengono, per mezzo della (2), i numeri φ,λ (**).

Si noti che se non si considera il moto di rotazione della

(*) Si osservi ancora che, se in tutto il campo di variazione di t, si ha

$$(a)\qquad P'\times(P-O)\wedge u\neq 0$$

allora moltiplicando $(\times)$ la (1) per $(P-O)\wedge u$ si ha subito

$$(b)\qquad \varphi=-\frac{P'\times(P-O)\wedge u}{P'\times(P-O)\wedge u}=-\frac{d}{dt}\log[P'\times(P-O)\wedge u]$$

forma notevole di φ nella ipotesi (a).

(**) La (3) si può ottenere, con calcolo un po' lungo anche così. I valori φ, λ tratti dalle (2) si sostituiscano nella (1'); si liberi dal denominatore; si tenga conto delle due forme [cfr. E. C. V.] dello sviluppo del prodotto esterno di due prodotti esterni; si troverà che il prodotto del *numero* primo membro della (3) per a è nullo; quindi, poichè a non è nullo, ed è arbitrario, si ottiene la (3).

Digitized by Google

terra [cioè nella (1′) si pone $\omega = 0$] allora in luogo della (3) si trova la

$$(3') \qquad \{l(P - O) + P''\} \wedge P' = 0,$$

[e ciò moltiplicando esternamente ($\wedge$) la (1), con $\omega = 0$, per P']. Da (3′) si ricava φ con la prima delle (2). È chiaro che se, *come si fa sempre*, si dà *a priori* φ in funzione di mod P' allora, integrata la (1), si ottiene una *traiettoria*, *dipendente* da φ, che *può non essere una traiettoria fisica* (*).

Integrata la (3) e fissate ad arbitrio le costanti iniziali, *si hanno tutte le traiettorie fisicamente possibili* (si intende sotto le ipotesi fatte in principio), *restando determinata*, dalle (2), *per ogni tratettoria*, *la funzione resistente* φ e la funzione λ, resistenza parziale, dovuta alla rotazione della terra.

3. Alcune considerazioni sulla determinazione sperimentale della funzione resistente.

a). Si intuisce che φ deve dipendere da P' e P'', cioè dalla *velocità* e *accelerazione* di P; il che è confermato dalle (2). Ma dalle (2) si ha φ *sotto una forma che nulla ha a che fare con le forme ordinarie della funzione resistente*, forme nelle quali, tra altro, manca l'accelerazione P''. Si rende quindi, necessario l'uso di tabelle di correzione, tabelle che hanno un valore molto relativo non potendosi valutare i limiti entro i quali sono compresi gli errori.

In modo analogo per la funzione λ; ma in ciò che segue ci limitiamo a considerare l'ordinaria funzione resistente φ mod P'.

b). Supponiamo che, ad es. con metodi cinematografici, si riesca a determinare una *successione* di punti, con i *relativi*

(*) Mentre la *Balistica interna* ha fatto notevoli progressi, dall'esame dei più recenti trattati di *Balistica esterna*, si rileva facilmente che questa non ha progredito [altro che per piccole questioni di forma] rispetto a quanto è stato fatto da F. Siacci, vero e geniale fondatore della Balistica. Ciò è dovuto in parte alla insufficiente impostazione fisica del problema e in parte all'uso di mezzi di ricerca non geometrici.

Digitized by Google

valori del tempo t, di una *traiettoria fisica effettiva ottenuta con un tiro*. Si può allora, con gli ordinari metodi di *interpolazione* (a parte la lunghezza del calcolo), determinare un punto P funzione *razionale* di t, che, col variare di t, descrive una linea che passa per i punti della *successione*, nei *tempi corrispondenti*, determinati sperimentalmente. Tale linea dà una *traiettoria approssimata* della traiettoria effettiva con grado di approssimazione che è difficile, o forse impossibile, valutare. Il punto P così ottenuto, come funzione razionale di t, deve sodisfare, almeno approssimativamente, alla equazione generale (3); calcolati P' e P'' la 1ª (2) dà la φ, ancora approssimata e con incerto grado di approssimazione.

Ciò fatto (sempre supposto che sia possibile farlo) e per *ogni tiro* e per *ogni speciale condizione fisica degli elementi che producono la resistenza*, si può ottenere un diagramma della funzione resistente $\varphi \bmod P'$. Dai vari diagrammi ottenuti, classificati secondo gli elementi del tiro, si potrà, forse, ottenere un diagramma medio che dia, approssimativamente, la legge generale della resistenza, a parte il *fatto* che le condizioni atmosferiche variano continuamente e non sono valutabili nei vari punti della traiettoria effettiva (*).

c). Restano da considerare le *esperienze di gabinetto* (**). Possono queste dare la φ? Non si deve ipotecare la scienza; ma vi è da ritenere che ciò sia ancor meno possibile che con la esperienza *b)* e per le ragioni che seguono.

Comunque si faccia l'esperienza, gli elementi P', P'', dai quali dipende φ [cfr. (2)], sono ben lontani dall'essere quelli *effettivi* del tiro, nel quale P', P'' e la resistenza *variano continua-*

(*) Il calcolo delle *probabilità*, di solito largamente usato, non può dare risultati attendibili. Le *ipotesi* della *probabilità matematica* non sono verificate nei tiri, e, quindi, *non sono applicabili* i teoremi, matematicamente esatti, della teoria matematica della probabilità.

(**) Non ci occupiamo della prima esperienza fatta da Newton nella chiesa di S. Paolo in Londra, che, del resto, dà risultati non troppo diversi da quelli che si ottengono con le moderne espressioni per la funzione resistente.

Digitized by Google

mente e le leggi di variazione, *lo si noti bene*, sono determinate dalla (3) o, per $\omega = 0$, dalla (3').

Se il proiettile è fisso e l'aria è in moto, allora manca P''; nella parte inferiore del proiettile si forma una pseudo-scia, o forse un vortice, che deve influire sul valore di φ e tale influenza non sembra valutabile.

Se il proiettile ruota e l'aria ambiente è fissa, si ha una *scia* che, in stato di *regime*, sia pure temporaneo, determina una specie di *anello di aria rarefatta* nel quale avviene il moto del proiettile e quindi φ dipende da tale rarefazione che non sembra valutabile.

4. Proiezione ortogonale della traiettoria assoluta sul piano dell'equatore.

Se Q è la proiezione ortogonale di P sul piano (dell'equatore) uscente da O e normale ad u e ricordiamo [cfr. A. V. G.] che $(u \wedge)^2 = \mathrm{H}(u, u) - 1$ si ha subito

$$(4) \qquad Q = P - (P - O) \times u . u = O - (u \wedge)^2 (P - O),$$

da cui segue immediatamente

$$(5) \qquad Q' = -(u \wedge)^2 P', \qquad Q'' = -(u \wedge)^2 P''.$$

Se operiamo con $(u \wedge)^2$ nei due membri della (1) e ricordiamo [cfr. A. V. G.] che $(u \wedge)^4 = -(u \wedge)^2$ si ha

$$(u \wedge)^2 P'' = -\varphi . (u \wedge)^2 P' - l . (u \wedge)^2 (P - O) - \lambda \omega^2 . (u \wedge)^2 (P - O)$$

che per le (4), (5) dà subito

$$(6) \qquad Q'' = -\varphi Q' - (l + \lambda \omega^2)(Q - O) \text{ (*)}.$$

(*) Si può dedurre dalla (1) anche senza le (5); ma il calcolo è lungo ciò prova l'utilità delle *omografie*.

Digitized by Google

La (6) è l'equazione differenziale del moto di Q. Tale moto è *centrale* (centro O) con *resistenza del mezzo* [cfr. M. R.].

Se i è la *rotazione di un retto* per i vettori v normali ad u, cioè

$$\mathrm{i}v = v \wedge u,$$

allora dalla (6) si ha subito

$$Q' \times \mathrm{i}Q'' = -(l + \lambda\omega^2) Q' \times \mathrm{i}(Q - O)$$

da cui risulta

$$(7) \qquad (Q' \times \mathrm{i}Q'') / \{ Q' \times \mathrm{i}(O - Q) \} = l + \lambda\omega^2$$

la quale prova [cfr. G. A. P.] che: *la traiettoria di Q volge, in generale, la concavità verso il punto O, o in verso contrario, secondo che $l + \lambda\omega^2$ è positivo o negativo*; il che dà un'idea di come è disposta la traiettoria assoluta P (*).

5. Moto relativo.

Con i metodi ordinari delle coordinate cartesiane (*due* sistemi; uno *fisso*, l'altro *mobile* (**)) si ottiene soltanto il *moto relativo* del proiettile, cioè il moto quale apparisce ad un osser-

---

(*) Sia P_1 un punto nei dintorni di P. Riferendoci allo sviluppo della superficie cilindrica descritta dalla retta PQ, in un piano parallelo ad u, si ha che: *la linea P rivolge, in P, la concavità verso u quando i punti $P_1, P + u$ si trovano dalla stessa parte del piano che passa per P ed è parallelo ai due vettori P', $P' \wedge u$.* Da questo e con un calcolo (vettoriale) semplicissimo, si ricava che

$$(P' \wedge P'') \times (P' \wedge u) \begin{cases} > 0, & \text{concavità verso } u \\ < 0, & \text{,} \quad \text{,} \quad -u. \end{cases}$$

Da questo si può ricavare, sia in generale [tenuto conto della (3)] che nei casi particolari accennati nel n. 6, il modo di comportarsi della concavità in P rispetto ad u.

(**) Notando che anche coloro che *non ammettono* lo *spazio geometrico fisso* parlano di elementi *fissi*!

Digitized by Google

vatore che, partecipando del moto di rotazione della terra, non si accorge di tale moto.

Per ottenere *sotto forma assoluta* anche tale *moto relativo* (non vi è contradizione di termini!) basta introdurre il *rotore* α, funzione di t, mediante il quale si eprime il moto continuo di rotazione della terra da *Ovest* ad *Est* [cfr. M. R., p. 76 e P. F.]

$$(8) \qquad \alpha = \cos\omega t + (1 - \cos\omega t)\,\mathrm{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + \operatorname{sen}\omega t\,.\,\boldsymbol{u}\wedge$$

e porre

$$(9) \qquad P_1 = O + \alpha^{-1}(P - O), \text{ da cui } P = O + \alpha(P_1 - O)$$

perchè la traiettoria di P_1 sia appunto la *traiettoria relativa* di P, cioè la traiettoria che è la *rappresentazione del moto assoluto di* P [cfr. P. F.].

Ricordando [cfr. M. R.] che

$$d\alpha/dt = \omega\,.\,\boldsymbol{u}\wedge\alpha,$$

formula semplicissima che compendia le complesse formule di Poisson e rende quindi inutili, in generale, gli elementi euleriani, dalla 2ª forma delle (9) si ricava subito

$$(10) \qquad P' = \omega\,.\,\boldsymbol{u}\wedge\alpha(P_1 - O) + \alpha P_1',$$

$$P'' = \omega^2\,.\,(\boldsymbol{u}\wedge)^2\alpha(P_1 - O) + 2\omega\,.\,\boldsymbol{u}\wedge\alpha P_1' + \alpha P_1'';$$

sostituendo questi valori nella (1), riducendo ed operando con α^{-1} si ha una equazione differenziale in P_1 che è *più complessa* della (1) (*).

(*) Sostituendo nelle (2) si ottengono per φ e λ forme assai complesse.

Se, poi, operiamo con α^{-1} nella (3), e si tien conto delle (9) e delle (10) nelle quali si sia operato con α^{-1}, si ottiene, come equazione differenziale in P_1, non contenente esplicitamente φ, λ, e corrispondente alla (3), una equazione che lascia molto a desiderare in fatto di semplicità e chiarezza.

La traduzione in coordinate cartesiane delle formule ora accennate per P e per P_1 dà delle formule complicatissime assolutamente illeggibili.

Digitized by Google

Se è realizzabile l'esperienza *b)* del n. 3, allora si ottiene una successione di punti P_1 della traiettoria *relativa*. È utile passare, mediante le (9), alla successione di punti P della traiettoria assoluta, poichè si hanno formule più semplici, come avviene tutte le volte che si evitano (e possono *sempre* evitarsi) i moti relativi [cfr. M. R. e P. F.].

6. Osservazioni.

Nel punto P di *massima altezza* deve essere

$$\{\mathrm{mod}\,(P - O)\}' = 0,$$

vale a dire $(P - O) \times P' = 0$ e quindi: *nel punto di massima altezza della traiettoria la tangente è orizzontale.*

Nel punto P di *minima velocità* deve essere

$$(P'^2)' = 0, \text{ cioè } P' \times P'' = 0$$

e quindi: *nel punto di minima velocità l'accelerazione è parallela alla normale principale.*

Dalla (3), dal n. 4 e tenuto conto dei tempi cui corrispondono i due punti sopra considerati si possono ottenere, anche senza integrare la (3), alcune leggi del moto. Lasciamo al lettore la cura di fare tali studi.

Praticamente possono esser considerati alcuni casi particolari.

Se il tiro è tale che possa farsi astrazione dal moto di rotazione della terra, cioè possa porsi $\omega = 0$, allora la (3′) diviene

$$P' \wedge P'' + l\,P' \wedge (P - O) = 0;$$

moltiplicando $(\times)$ questa per $P - O$ si ha

$$P' \wedge P'' \times (P - O) = 0 \text{ per ogni } t,$$

la quale prova che la retta OP giace nel piano osculatore in P, cioè [cfr. G. A. P.] *la traiettoria P sta in un piano uscente da O.*

Se il proiettile non raggiunge grandi altezze, si può trascurare h/r; l'equazione (3) si semplifica e g è l'ordinaria *co-*

Digitized by Google

stante di gravità, ma, bene inteso, *indipendente dalla rotazione della terra.*

Se il tiro avviene in una regione limitata in modo tale da potersi ritenere *parallele* le *verticali* in due punti qualunque distinti, allora il vettore $(P - O)/(r + h)$ si può ritenere *costante*; è *unitario* ed ha la *direzione* della *verticale* e il *verso* dal *basso* all'alto. Anche in questo caso la (3) si semplifica. Ecc.

L'Accademico Segretario
EMILIO REPOSSI.

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIV, DISP. 9ª E 10ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

Digitized by Google

LETTURE

Misure pireliometriche eseguite sull'Aspromonte.

Nota di A. AMERIO, O. DE PASQUALE, V. RICCA
presentata dal Socio corrispondente A. Amerio.

PREMESSA. — Scopo della ricerca era la determinazione della costante solare, seguendo un metodo nuovo nella parte che concerne il calcolo dell'influenza che hanno il vapor d'acqua e l'anidride carbonica nell'assorbimento totale esercitato dall'atmosfera terrestre sulla radiazione che si vuole misurare.

L'importanza del metodo consiste nel fatto che l'assorbimento di questi due costituenti dell'atmosfera, che è la parte più importante dell'assorbimento totale, viene determinato in base alle osservazioni pireliometriche, alle determinazioni sperimentali di laboratorio e alle moderne conoscenze della distribuzione degli elementi costitutivi dell'atmosfera terrestre alle varie altezze.

Di questo metodo è stato fatto cenno nell'ultimo Congresso internazionale dei Fisici, tenuto a Como e a Pavia, nel 1927 (1).

Eccolo brevemente: Ammettiamo come nota la distribuzione dell'energia nello spettro solare fuori dell'atmosfera terrestre. Essa risulta dalle classiche ricerche del Langley (2) ricalcolate dal Rizzo (3), da quelle di Abbot (4) e da quelle di Amerio (5). È importante notare che fra esse c'è molto minore

(1) " Atti del Congresso internaz. di Fisica ", vol. II, 1927.
(2) " Report of the Mount Whitney expedition ".
(3) " Memorie Acc. di Torino ", 1898.
(4) ABBOT, " The Sun ".
(5) " Memorie Acc. Lincei ", 1914 e " Atti Acc. Lincei ", 1915.

Digitized by Google

disparità di quanta ne sia fra le numerose misure della costante solare eseguite nello stesso periodo.

Rappresentiamo detta distribuzione al modo consueto, cioè in assi cartesiani, prendendo per ascisse le lunghezze d'onda e per ordinate dei segmenti proporzionali alle rispettive energie, indi segnamo le regioni che corrispondono alle bande d'assorbimento dell'anidride carbonica e del vapor d'acqua, e limitiamole con tante parallele all'asse delle ordinate, comprese fra la curva e l'asse delle ascisse.

L'area totale compresa fra la curva e l'asse delle λ sia S; essa è proporzionale all'energia totale, cioè alla costante solare che indichiamo con A. Sia α l'area compresa nelle bande d'assorbimento segnate; essa è proporzionale all'energia sulla quale si esercita l'assorbimento selettivo e sia a l'area rimanente, sulla quale si esercita il solo assorbimento diffusivo. Sarà:

$$a + \alpha = S.$$

Ora vi sono varie ricerche di laboratorio, di Paschen, Fowle, Hessner ecc. che dànno i valori dei coefficienti di assorbimento del vapor acqueo e dell'anidride carbonica per le singole lunghezze d'onda, e per mezzo loro ci sarà possibile calcolare i valori dell'energia assorbita da questi costituenti dell'atmosfera, qualora si riesca a determinarne, come vedremo, le masse sovrastanti alle singole stazioni.

Tracciamo così per punti le curve che dànno la distribuzione dell'energia nell'interno delle bande per le singole stazioni. Se queste sono due, siano α_1 e α_2 le aree che, nell'insieme di dette bande, sono comprese fra le curve tracciate e l'asse delle ascisse; esse sono proporzionali alle energie delle zone di assorbimento, che oltrepassano il livello della stazione, si misurano sul diagramma e sono quindi dei dati che possiamo considerare come sperimentali.

Indichiamo con b il coefficiente d'assorbimento diffusivo corrispondente alle singole onde che sono comprese nell'area a, e c sia il coefficiente di proporzionalità tra l'area S e la costante A; siano A_1 e A_2 le intensità delle radiazioni che hanno attraver-

Digitized by Google

sati gli spessori ϵ_1 e ϵ_2; a_1 e a_2 le aree corrispondenti a dette energie, diminuite rispettivamente delle α_1 e α_2.

Sarà:

$$A = cS,$$

$$A_1 = c\,(a_1 + \alpha_1),$$

$$A_2 = c\,(a_2 + \alpha_2),$$

$$a_1 = \int E_\lambda\, e^{-b_\lambda \varepsilon_1}\, d\lambda,$$

$$a_2 = \int E_\lambda\, e^{-b_\lambda \varepsilon_2}\, d\lambda,$$

dove gli integrali si intendono estesi alle onde per le quali si esercita il solo assorbimento diffusivo ed E_λ è l'ordinata spettante all'onda λ.

In questo sistema si conoscono:

$$S,\ A_1,\ A_2,\quad \alpha_1, \alpha_2,\quad \epsilon_1, \epsilon_2 \quad \text{e le } E_\lambda;$$

e sono incognite:

$$A, c,\ a_1, a_2,\quad \text{e le } b_\lambda.$$

Se il sistema si semplifica introducendo per approssimazione un coefficiente medio d'assorbimento b, le due ultime equazioni diventano:

$$a_1 = a\, e^{-b\varepsilon_1},$$

$$a_2 = a\, e^{-b\varepsilon_2},$$

le quali, colle prime tre del sistema ci permettono di calcolare le quantità incognite e quindi la costante solare A.

In questi calcoli si trascura la perdita per diffusione che avviene entro alle bande di assorbimento, negli strati superiori a quelli nei quali si trovano il vapor d'acqua e l'anidride carbonica, vale a dire nell'altosfera. Questa correzione si potrà fare in un secondo tempo, ma la quantità che si trascura è piccola, perchè l'assorbimento selettivo si manifesta per onde superiori a 0,72 μ., per le quali è piccolo il coefficiente di assorbimento diffusivo che si trascura.

Digitized by Google

Le quantità di vapor acqueo e di anidride carbonica che prendono parte all'assorbimento si possono calcolare se si ammette di aver a che fare con una distribuzione normale.

Infatti si sa che l'anidride carbonica non giunge oltre alla troposfera e si conosce il valore della pressione che essa esercita alle varie quote. Per conseguenza è molto facile calcolare quale sia il suo spessore, ridotto alle condizioni normali, sovrastante alle varie quote. Si trova così che esso è di m. 2,45 sul livello del mare; 2,01 sui 1000 m. di altezza; 1,70 sui 2000; 1,45 sui 3000 e 1,12 sui 4559, cioè al disopra della Capanna Regina Margherita del Monte Rosa.

Per il vapor d'acqua, la cosa è alquanto più complicata per via della grande variabilità di questo costituente, e la distribuzione teorica non può darci che dei valori medi, applicabili solamente quando si abbia a disposizione un gran numero di osservazioni.

La distribuzione teorica, o media, si trova nel trattato dell'Humphrey (1) ed è stata pure studiata da Khanewsky (2); essa è espressa da una curva che dà le pressioni alle varie altezze, avendo preso per unità la pressione al livello del mare. Da essa si può quindi dedurre quale sia il valore della tensione a un'altezza data, purchè sia nota la tensione al livello del mare, e in conseguenza dedurre quali siano le masse di vapor d'acqua presenti nell'atmosfera.

Si trova così, ad esempio, che in una distribuzione normale, se al livello del mare lo stato igrometrico è 0,5 e la temperatura è di 30°, sul livello del mare vi sono 44,2 m. di spessore di vapor acqueo ridotto alle condizioni normali; 26,6 sui 1000 m.; 15,2 sui 2000; 9,0 sui 3000; 4,2 sulla Capanna Regina Margherita del M. Rosa.

Per far fronte all'inconveniente della grande variabilità del vapor acqueo, che non solo influisce sulla quantità totale del vapore, ma anche sulla sua distribuzione alle varie altezze,

---

(1) *Physic of the Air.*

(2) " Journ. de Phys. „ 1927.

Digitized by Google

mentre si richiedono molte determinazioni, sono utilissime le stazioni intermedie, le quali, di volta in volta permettono di determinare gli scostamenti dalla distribuzione normale.

Determinate così le masse assorbenti, si fanno i calcoli degli assorbimenti esercitati, necessari per calcolare le α_1 e α_2.

Dobbiamo però dire che il metodo accennato non è stato impiegato nella parte che pubblichiamo ora di questo lavoro, perchè in causa della poca entità dei dislivelli delle stazioni di osservazione, non si avevano sufficienti elementi a disposizione, e d'altra parte nuove esperienze sono state iniziate quest'anno in condizioni migliori sul Monte Rosa. Pertanto i calcoli finali sui dati ottenuti nelle ricerche che qui riferiamo, sono stati fatti coi soliti metodi.

Scelta dell'Aspromonte. — La scelta dell'Aspromonte come luogo adatto per l'impianto delle stazioni è stata fatta per la vicinanza all'Istituto di partenza (Istituto di Fisica della R. Università di Messina), l'accessibilità, il facile soggiorno in rapporto al clima, nonchè per la limpidezza del cielo che qualche volta ne ha consentito una precisione veramente notevole, come si può notare nelle serie più avanti stampate.

In progetto le misure avrebbero dovuto aver luogo in tre stazioni: Monte Calabro (400 m. ca), Polsi (900 m. ca), Montalto (1958 m.); eccetto però che nel primo anno [1], poterono funzionare solo le due stazioni più elevate. La stazione di Polsi era situata in una stanza del Santuario omonimo, la stazione di Montalto in una baracchetta appositamente costruita sulla vetta.

Necessità di una grande precisione nei risultati sperimentali. — È opinione diffusa che una grande esattezza nella misura della radiazione solare, nelle diverse stazioni, non sia indispen-

---

[1] La stazione di Monte Calabro, affidata al compianto dott. A. Occhiuto, diede risultati trascurabili, sia perchè gli apparecchi vi giunsero guasti, sia per le condizioni di salute già poco buone dell'osservatore, al quale mandiamo un mesto saluto affettuoso.

Digitized by Google

sabile per il fatto che tale precisione viene poi a mancare nel risultato finale, in causa dell'incertezza con la quale si determina l'assorbimento atmosferico. Si dimostra invece agevolmente quanto sia conveniente una grande precisione nei dati sperimentali, per diminuire l'errore che si commette nel calcolo dell'assorbimento.

Detto β il coefficiente medio di assorbimento atmosferico, si ha approssimativamente

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1 = A\, e^{-\beta \epsilon_1} \\ A_2 = A\, e^{-\beta \epsilon_2}, \end{cases}$$

da cui

$$(2) \qquad \frac{dA}{A} = \frac{dA_1}{A_1} + \epsilon_1\, d\beta = \frac{dA_2}{A_2} + \epsilon_2\, d\beta,$$

da cui:

$$(3) \qquad d\beta = \frac{\frac{dA_1}{A_1} - \frac{dA_2}{A_2}}{\epsilon_2 - \epsilon_1}$$

e quindi:

$$\frac{dA}{A} = \frac{\epsilon_2 \frac{dA_1}{A_1} - \epsilon_1 \frac{dA_2}{A_2}}{\epsilon_2 - \epsilon_1};$$

poichè nel calcolo dell'errore relativo massimo si ammette che gli errori si sommino e che siano uguali gli errori di osservazione, si potrà scrivere:

$$(4) \qquad \frac{dA}{A} = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \frac{dA_1}{A_1}.$$

Questa relazione, anche ammesso che sia solo approssimata, perchè tali sono le (1), ci dice che *l'errore che si commette nella misura di* A *dipende da quello che si commette nella misura di* A_1 (*o* A_2) *e dalla scelta delle stazioni.* Infatti considerando le stazioni di Montalto e di Polsi, per le quali si ha $\epsilon_1 = 608$, $\epsilon_2 = 691$ (in mm. di pressione), si ottiene:

$$\frac{dA}{A} = 15{,}7 \frac{dA_1}{A_1},$$

Digitized by Google

ossia: l'errore con cui si viene a determinare A è 16 volte circa quello che si commette nella misura di A_1 e di A_2.

Nel caso del Monte Rosa, per due stazioni poste l'una alla Capanna Regina Margherita, $\epsilon_1 = 430$, l'altra ad Alagna, $\epsilon_2 = 660$, si avrebbe:

$$\frac{dA}{A} = 4{,}7\,\frac{dA_1}{A_1};$$

si otterrebbe cioè un errore circa un terzo del precedente.

Con un errore sperimentale del 2 %, che è quello che in generale si commette con buoni pireliometri, si arriverebbe così ad un errore del 30 % a Montalto e del 10 % al Monte Rosa.

Dalla (2) si ricava che la parte prevalente di questo errore è dovuta all'incertezza con la quale si determina il coefficiente d'assorbimento β, e poichè questo coefficente viene dedotto in funzione di A_1 e di A_2, possiamo rilevare quale influenza l'errore commesso nella determinazione di esso importa nel calcolo di A. Il termine $\epsilon_1 d\beta$ della (2), tenuto conto della (3), si può scrivere:

$$\epsilon_1 d\beta = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}\,\frac{dA_1}{A_1}. \tag{5}$$

Da cui si vede che quest'errore è proporzionale all'errore sperimentale, allo spessore atmosferico corrispondente alla stazione più elevata e inversamente proporzionale allo spessore atmosferico compreso fra le due stazioni. Applicando la (5) ai due casi precedenti si ha:

Per Montalto - Polsi:

$$\epsilon_1 d\beta = 14{,}7\,\frac{dA_1}{A_1};$$

Per Cap. Regina Margherita - Alagna:

$$\epsilon_1 d\beta = 3{,}7\,\frac{dA_1}{A_1}.$$

Sebbene le formule dell'assorbimento totale dell'atmosfera siano più complicate di quella dianzi adoperata, le considerazioni fatte sono sufficienti per indicarci la necessità di ridurre gli errori sperimentali al minimo.

Digitized by Google

Misura della Radiazione.

Scelta degli apparecchi. — Fra i vari strumenti misuratori della radiazione quelli che dànno maggiore garanzia per la sicurezza dei risultati, sono indubbiamente i pireliometri di Ångström e di Amerio (1), basati in parte sullo stesso principio. Fra i due però abbiamo creduto di dare la preferenza al secondo, anzitutto perchè è integrale, cioè assorbe tutte le radiazioni, inoltre per il fatto che esso richiede, per ogni determinazione, un tempo molto più piccolo di quello che esige l'Ångström; infatti mentre per l'Amerio questo tempo si può ridurre a quello necessario perchè la laminetta annerita raggiunga il regime nella temperatura e il galvanometro la sua massima elongazione, cioè a pochi secondi, per l'Ångström occorre ancora il tempo necessario per regolare l'intensità della corrente nella seconda laminetta, fino ad annullare nel galvanometro ogni deviazione. Tanto più che con l'Ångström una determinazione può dirsi completa quando si sia ripetuta l'operazione invertendo le laminette. Con ciò, mentre la misura con l'Amerio si fa in pochi secondi, con l'altro occorrono almeno un paio di minuti.

La rapidità con cui vengono effettuate le misure ha una grande importanza, specialmente quando si vogliano eseguire delle serie per farne poi la media, perchè è evidente che questa non si possa fare tra misure fra le quali intercorrono lunghi intervalli di tempo.

Durante questa campagna si facevano normalmente delle serie di 12 letture in 8 minuti primi complessivamente.

Oltre all'accennata ragione l'Amerio ci sembrò preferibile perchè, essendo in esso la laminetta sensibile molto accuratamente protetta dalle folate di vento, ogni misura, oltre ad essere più rapida, risulta più esatta, e, poichè di queste misure se ne possono fare molte in poco tempo, e perciò se ne può fare la media, si aumenta di molto l'esattezza.

---

(1) A. Amerio, " Rend. Acc. Lincei „, 1918.

Digitized by Google

Essa infatti è già rilevante per ogni misura, come si vede dalle tabelle 11-14.

Da alcune risulta che le differenze tra le misure di una serie prossima al mezzodì sono di pochi millesimi, mentre quelle delle serie discoste dal culminare del Sole, fanno vedere la variazione graduale della radiazione che si manifesta già nella loro breve durata (8 minuti).

I galvanometri adoperati durante il primo anno risultarono poco adatti per tali specie di misure; negli anni successivi si usarono invece dei galvanometri Siemens a periodo molto corto, (con che si aveva una grande prontezza) e a grande sensibilità (circa 6.10^{-9} A. per mm. di deviazione alla distanza di un metro).

Disposizione sperimentale.

Il dispositivo adottato è quello della Fig. 1, dove i numeri 1 e 2 indicano i morsetti che fanno capo alla pinza termoelettrica saldata alla laminetta del pireliometro, i numeri 3 e 4 quelli che fanno capo ai conduttori saldati alla laminetta e che permettono di riscaldarla per effetto Joule.

P = Pireliometro.

G = Galvanometro.

R_1 = Resistenza critica, necessaria per rendere giustamente aperiodico il galvanometro.

I = Invertitore di corrente.

A = Amperometro di precisione.

R_2 = Reostato.

B = Batteria di pile.

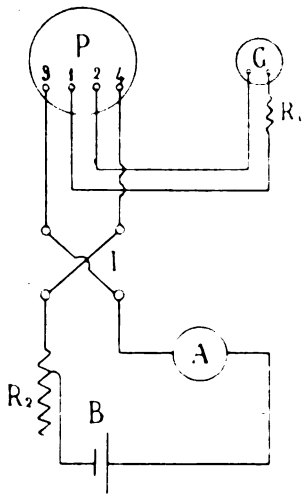


Fig. 1.

Per eseguire con questo dispositivo la misura della inten-

Digitized by Google

sità della radiazione si opera nel seguente modo: si orienta l'apparecchio in modo che la laminetta sensibile risulti normale ai raggi, ciò che si può fare servendoci dell'apposito mirino, indi si scopre la finestra del pireliometro e si legge la deviazione del galvanometro, si ricopre la finestra, e si prende così la posizione di riposo del galvanometro. Si ripete questo una dozzina di volte. Dopo si manda nella laminetta una corrente elettrica tale che la riscaldi al punto da produrre una deviazione uguale alla precedente; si inverte il senso della corrente e si ripete la misura. Se le due intensità di corrente non sono uguali, se ne prende la media. (Effettivamente tutta questa seconda parte può essere eliminata con la taratura). Pertanto detta Q la quantità di calore ricevuta dalla laminetta colpita dalla radiazione solare, Q sarà anche la quantità di calore prodotta in essa per effetto Joule, e si avrà:

$$Q = 0{,}239\, i^2 rt\,, \qquad t = 60 \text{ secondi}$$

e la quantità di calore A_1 irradiata sull'unità di superfice sarà quindi

$$A_1 = \frac{Q}{s} = \frac{0.239\, rt}{s}\, i^2,$$

essendo s la superficie della laminetta.

Il valore della frazione $\frac{0.239\, rt}{s}$ essendo costante, si può scrivere:

$$A_1 = \frac{Q}{s} = C \,.\, i^2.$$

C è la costante dell'apparecchio e viene calcolata una volta per tutte in base alla conoscenza di s ed r.

Confronto degli strumenti. — Gli errori commessi nella determinazione della costante strumentale C influiscono evidentemente sui valori ricavati per A. Pertanto abbiamo proceduto al confronto dei vari pireliometri, montando i circuiti secondo lo schema della Fig. 1, ed esponendo simultaneamente i pireliometri alla radiazione solare. Avendo così ottenuto valori assai poco differenti abbiamo modificato la costante di due di essi, ritenendo

Digitized by Google

esatta quella di uno dei pireliometri, che era più grande degli altri e costruito di recente con cura particolare. Evidentemente dopo tale riduzione i valori ottenuti coi diversi apparecchi risultavano uguali.

Analoga operazione di confronto e controllo venne eseguita sugli amperometri.

Qualche cenno intorno alle stazioni. — Come è stato detto in principio, le stazioni avrebbero dovuto essere tre: Monte Calabro, Polsi e Montalto; la prima che non potè funzionare negli anni successivi, sopratutto per mancanza di mezzi finanziari, nel primo anno era stata situata in una casetta di campagna in una stanza ben esposta al sole.

Quella di Polsi (900 m. ca. sul livello del mare) il 1° anno era situata in una vasta stanza, dello stesso Santuario, fornita di una finestra esposta a Sud; gli anni successivi in un'altra molto più adatta, pure fornita di una finestra a Sud, sul cui davanzale era stata fissata una mensola sporgente in fuori, per esporre il pireliometro al sole. Il galvanometro e gli altri apparecchi erano distribuiti in modo che una persona potesse essere in grado di eseguire le misure anche da sola. La stazione era inoltre fornita di barometro, igrometro e termometro (apparecchi che erano stati confrontati in laboratorio con quelli della stazione di Montalto prima della partenza).

Nella stazione di Montalto (1958 m. sul livello del mare) durante il primo anno le misure venivano eseguite all'aperto, montando il galvanometro e il cannocchiale su apposita panchetta, mentre il pireliometro veniva posto su un muro a secco laterale. Ogni giorno bisognava perciò portarsi da Polsi a Montalto (1100 m. di dislivello), salendo la mattina per scendere la sera a misure ultimate. Le osservazioni eseguite in queste condizioni non furono molto buone e perciò le abbiamo completamente abbandonate, avendo ottenuto nei successivi anni risultati molto migliori. Il secondo anno si potè costruire una baracchetta, costituita di una stanza di circa m. 3×4, posta immediatamente a ridosso della vetta sul versante Sud, in modo che risultasse riparata dai venti dominanti. Nella parete che

Digitized by Google

guardava verso S. E. era praticata una finestra munita di mensola sporgente in fuori, sulla quale si poneva il pireliometro; il resto degli apparecchi era situato nell'interno in modo definitivo. Questa baracchetta presentava l'inconveniente di essere sensibile sopratutto ai movimenti degli operatori che, provocando dei tremiti, turbavano la posizione del galvanometro. Questo fatto rendeva necessario di operare con molti riguardi e di ripetere di tanto in tanto la taratura, per assicurarsi che qualche causa non avesse provocato un lieve squilibrio nel galvanometro. Anche questa stazione era fornita di barometro, igrometro e termometro; nel terzo anno inoltre si aggiunsero un barografo, un igrografo e un termografo. In seguito alla costruzione della baracchetta, in essa stavano normalmente due di noi che vi pernottavano e così le misure divennero agevoli.

Esecuzione delle misure. — Le osservazioni venivano iniziate contemporaneamente nelle stazioni alle ore $8,56^m$ t. m. E. C. del mattino e continuate fino alle ore $15,4^m$ con una serie di 12 misure ogni mezz'ora.

Ogni serie durava circa 8 minuti, e veniva iniziata 4 minuti prima dell'ora fissata per essere terminata 4 minuti dopo, così che la media si poteva far corrispondere all'ora o alla mezz'ora esatta. Con le medie si venivano ad avere due valori della radiazione per la stessa ora alle due stazioni. Fra una misura e l'altra passavano alcuni secondi, durante i quali si registravano le letture e si ritoccava l'orientazione dell'apparecchio. Durante le misure fatte a Montalto, un operatore stava all'apparecchio e uno al galvanometro. Spesso negli intervalli fra una serie e l'altra (circa 20 minuti) si eseguiva la taratura, seguendo il metodo esposto nella nota citata a pag. 7, riducendo in tale maniera la determinazione della radiazione solare alla sola lettura galvanometrica.

Ecco i risultati ottenuti espressi in piccole calorie per $cm.^2$ e minuto primo, notando che sono state presentate le giornate migliori:

Digitized by Google

TABELLA I. 11 agosto 1921

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (Amerio - Valenti) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	608,2	70	—		691,3	63	1,30		—
9 30	—	—	—		—	58	1,32		—
10 00	—	—	1,45		—	—	1,33		0,083
10 30	—	—	1,45		—	—	1,33		0,083
11 00	—	—	1,45		—	—	1,33		0,083
11 30	—	—	1,45		—	—	1,31		0,097
12 00	—	—	1,46		690,0	56	1,30		0,110
12 30	—	—	1,45		—	—	1,27	nuvole intorno al sole	0,126
13 00	—	—	1,38		—	—	1,26	»	0,087
13 30	—	—	—	nuvole	—	—	1,23	»	—
14 00	—	—	—		—	—	1,17	»	—
14 30	—	—	—		—	—	1,16	»	—
15 00	—	—	—		689,3	60	1,13	»	—

	(De Pasquale)				12 agosto 1921			(Amerio - Valenti)	
9 00	604,6	63	1,57		687,0	50	1,35		0,140
9 30	—	—	1,46		—	—	1,42		0,027
10 00	—	—	1,46		—	—	1,45		—
10 30	—	—	1,45		—	—	1,43		—
11 00	—	—	1,45		—	—	1,41		—
11 30	—	—	1,46		—	—	1,44		—
12 00	—	—	1,46		—	43	1,43		0,21
12 30	—	—	1,49	poco sicura	—	—	1,42		0,47
13 00	—	—	1,51		—	—	1,39		0,080
13 30	—	—	1,50		689,0	—	1,38		0,080
14 00	—	—	1,50		—	35	1,39		0,074
14 30	—	—	1,47		—	—	1,32		0,102
15 00	—	—	1,44		688,0	—	1,32		0,83

Digitized by Google

TABELLA II. 28 luglio 1922

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie	L'igrometro non funziona	mm.	%	p. calorie		
9 00	605,2	68	1,465		688,0	58	1,217		0,169
9 30	—	—	1,438		—	—	1,221		0,151
10 00	—	—	1,440		—	—	1,187	Dalle 10 in poi nuvole	0,173
10 30	—	—	1,457		—	—	1,293	ma generalmente lontane dal sole	0,113
11 00	—	—	1,497		—	—	1,225		0,182
11 30	—	—	1,495		—	—	1,241		0,170
12 00	—	—	1,535		—	55	1,271		0,172
12 30	—	—	1,474		—	—	1,249		0,153
13 00	—	—	1,475		—	—	1,240		0,160
13 30	—	—	1,470		—	—	1,235		0,160
14 00	—	—	1,480		—	—	1,210		0,182
14 30	—	—	1,503		—	—	1,231		0,181
15 00	—	—	1,471		—	62	1,246		0,153
	(Amerio - Ricca)			31 luglio 1922	(De Pasquale - Borrello)				
9 00	610,0	62	1,520		693,0	54	1,258		0,172
9 30	—	—	1,525		—	—	1,262		0,175
10 00	—	—	1,530		—	—	1,264		0,175
10 30	—	—	1,540		—	—	1,264		0,180
11 00	—	—	1,536		—	—	1,285		0,177
11 30	—	—	1,525		—	—	1,264		0,158
12 00	—	—	1,546		—	52	1,245		0,182
12 30	—	—	1,540		—	—	1,235		0,192
13 00	—	—	? 1,685		—	—	1,270		0,267
13 30	—	—	1,530		—	—	1,245		0,170
14 00	—	—	1,520		—	—	1,232		0,181
14 30	—	—	1,490		—	—	1,250		0,173
15 00	—	—	1,500		693,0	42	1,217		0,167

Digitized by Google

TABELLA III. 1° agosto 1922

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	610,4	62?	1,564		693,0	50	1,217	Cielo generalmente sereno	0,221
9 30	—	—	1,560		—	—	1,230		0,211
10 00	—	—	1,580		—	—	1,260	„	0,202
10 30	—	—	1,585		—	—	1,265	„	0,201
11 00	—	—	1,600		—	—	1,266	„	0,209
11 30	—	—	1,560		—	—	1,285	„	0,176
12 00	—	—	1,595		—	51	1,305	„	0,182
12 30	—	—	1,570		—	—	1,300	„	0,172
13 00	—	—	1,550		—	—	1,325	„	0,145
13 30	—	—	1,525		—	—	1,288	„	0,155
14 00	—	—	1,520		—	—	1,255	„	0,174
14 30	—	—	1,530		—	—	1,222	„	0,201
15 00	—	—	1,500		—	51	1,247	„	0,169
	(Amerio - Ricca)		2 agosto 1922		(De Pasquale - Borrello)				
9 00	608,5	68	1,550		691,5	54	1,180		0,238
9 30	—	—	1,570		—	—	1,202		0,234
10 00	—	—	1,573		—	—	1,252		0,205
10 30	—	—	1,598		—	—	1,300		0,187
11 00	—	—	1,625		—	—	1,305		0,197
11 30	—	—	1,603		—	—	1,310		0,183
12 00	—	—	1,600		—	48	1,300		0,187
12 30	—	—	1,603		—	—	1,322		0,176
13 00	—	—	1,586		—	—	1,349		0,149
13 30	—	—	1,537		—	—	1,323		0,139
14 00	—	—	1,565		—	—	1,292		0,174
14 30	—	—	1,560		—	—	1,262		0,192
15 00	—	—	1,505		691,0	48	1,222		0,188

Digitized by Google

TABELLA IV. 3 agosto 1922

Ora t. m. E.e.	Stazione Montalto (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1-A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	608,5	56?	1,470		691,0	42	1,202		0,182
9 30	—	—	1,480		—	—	1,226		1,172
10 00	—	—	1,514		—	—	1,234		0,185
10 30	—	—	1,525		—	—	1,244		0,184
11 00	—	—	1,544		—	—	1,267		0,179
11 30	—	—	1,552		—	—	1,280		0,176
12 00	—	—	1,580		691,0	49	1,286		0,186
12 30	—	—	1,590		—	—	1,284		0,193
13 00	—	—	1,610		—	—	1,320		0,180
13 30	—	—	1,585		—	—	1,310		0,174
14 00	—	—	1,510		—	—	1,260		0,166
14 30	—	—	1,480		—	—	1,225		0,175
15 00	—	—	1,440		692,0	49	1,192		0,172
	(Amerio - Ricca)			4 agosto 1922	(De Pasquale - Borrello)				
9 00	609,8	58?	1,515		692,5	47	1,220		0,195
9 30	—	—	1,500		—	—	1,242		0,172
10 00	—	—	1,504		—	—	1,252		0,168
10 30	—	—	1,530		—	—	1,275		0,167
11 00	—	—	1,530		—	—	1,272		0,169
11 30	—	—	1,516		—	—	1,225		0,192
12 00	—	—	1,536		—	46	1,277		0,169
12 30	—	—	1,532		—	—	1,271		0,170
13 00	—	—	—	Cielo coperto	—	—	1,264		—
13 30	—	—	—	»	—	—	1,217		—
14 00	—	—	—	»	—	—	—	Il sole è coperto da nubi	—
14 30	—	—	—	»	—	—	—	»	—
15 00	—	—	1,530		—	—	—		—

Digitized by Google

TABELLA V. 5 agosto 1922

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1-A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	—	—	—		693,0	26	1,330		—
9 30	609,0	30	1,460		—	—	1,350		0,076
10 00	—	—	1,503		—	—	1,330		0,113
10 30	—	—	1,525		—	—	1,330		0,128
11 00	—	—	1,505		—	—	1,320		0,123
11 30	—	—	1,493		—	—	1,310		0,123
12 00	—	—	1,462		—	—	1,294		0,115
12 30	—	—	1,435		—	—	1,291		0,101
13 00	604,0	—	1,428		—	—	1,278		0,105
13 30	—	—	1,426		—	—	1,276		0,105
14 00	—	—	1,430		686,0	—	1,259		0,120
14 30	603,0	—	1,425		—	—	1,240		0,130
15 00	—	—	1,423		—	—	1,224		0,140

(De Pasquale - Borrello) 7 agosto 1922 (Amerio - Ricca)

9 00	—	52	—	Trovato il galvanometro spostato	692,5	47	1,256		—
9 30	—	—	—	»	—	—	1,276		—
10 00	—	—	—	L'igrometro non funziona	—	—	1,290		—
10 30	608,0	—	1,507		—	—	1,294		0,142
11 00	—	—	1,495		—	—	1,295		0,134
11 30	—	—	1,512		—	—	1,306		0,136
12 00	—	—	1,538		—	—	1,304		0,152
12 30	—	—	1,637		—	—	1,313		0,197
13 00	—	—	1,632		—	—	1,290		0,209
13 30	—	—	1,485		—	—	1,273		0,143
14 00	605,0	—	1,435		—	—	1,245		0,131
14 30	—	—	1,400		—	—	1,218		0,130
15 00	—	—	1,380		—	—	1,180		0,145

Digitized by Google

TABELLA VI. 8 agosto 1922

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (De Pasquale - Borrello)				Stazione Polsi (Amerio - Ricca)				$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
	Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	606,0	46	1,402	Cielo sereno, foschia in basso sul mare e nelle valli	695,0	38	1,150	Sereno	0,180
9 30	—	—	1,444		—	—	1,180		0,183
10 00	—	—	1,430		—	—	1,198		0,163
10 30	—	—	1,435		—	—	1,215		0,154
11 00	—	—	1,487		—	—	1,245		0,163
11 30	—	—	1,481		—	—	1,270		0,143
12 00	—	—	1,500		—	—	1,275		0,150
12 30	—	—	1,471		—	—	1,272		0,136
13 00	—	—	1,445		—	—	1,240		0,142
13 30	—	—	1,466		—	—	1,180		0,195
14 00	—	—	1,461		—	—	1,190		0,185
14 30	—	—	1,430		—	—	1,190		0,168
15 00	606,0	—	1,410		—	—	1,175		0,167
	(De Pasquale - Borrello)		9 agosto 1922				(Amerio - Ricca)		
9 00	606,0	40	1,478	Sereno	694,6	33	1,216	Sereno	0,177
9 30	—	—	1,485		—	—	1,241		0,154
10 00	—	—	1,405		—	—	1,250		0,106
10 30	—	—	1,435		—	—	1,251		0,129
11 00	—	—	1,445		—	—	1,260		0,128
11 30	—	—	1,418		—	—	1,260		0,112
12 00	—	—	1,405		—	—	1,289		0,083
12 30	—	—	1,410		—	—	1,277		0,094
13 00	—	—	1,420		—	—	1,266		0,108
13 30	—	—	1,390		—	—	1,227		0,110
14 00	—	—	1,302		—	—	1,134		0,129
14 30	—	—	1,300		—	—	1,146		0,119
15 00	606,0	—	1,480?		—	—	1,140		0,230

Digitized by Google

TABELLA VII. 10 agosto 1922

Ora t. m. E. e.	Stazione Montalto (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	606,0	39	1,394	Cielo sereno	694,0	32	1,171		0,160
9 30	—	—	1,397		—	—	1,201		0,140
10 00	—	—	1,393		—	—	1,220		0,124
10 30	—	—	1,409		—	—	1,235		0,124
11 00	—	—	1,440		—	—	1,250		0,132
11 30	—	—	1,425		—	—	1,260		0,116
12 00	—	—	1,465	Qualche nuvoletta verso Sud in aumento	—	—	1,275		0,130
12 30	—	—	1,425		—	—	1,280		0,102
13 00	—	—	1,424		—	—	1,265		0,112
13 30	—	—	1,435		—	—	1,246		0,132
14 00	—	—	1,424		—	—	1,208		0,152
14 30	—	—	1,360		—	—	1,149		0,155
15 00	—	—	1,327		—	—	1,085		0,182
	(De Pasquale - Borrello)		11 agosto 1922		(Amerio - Ricca)				
9 00	606.5	40	—		694,5	32	—	Cielo coperto	—
9 30	—	—	—	Fino a mezzogiorno il cielo è stato nuvoloso ed il sole coperto	—	—	—	»	—
10 00	—	—	—		—	—	—	»	—
10 30	—	—	—		—	—	—	»	—
11 00	—	—	—		—	—	—	»	—
11 30	—	—	—		—	—	—	»	—
12 00	—	—	1,390	Il sole è libero da nubi	—	—	1,140		0,180
12 30	—	—	1,388		—	—	1,148		0,178
13 00	—	—	1,365		—	—	1,153		0,155
13 30	—	—	1,350		—	—	1,136		0,158
14 00	—	—	1,327		—	—	1,100		0,171
14 30	—	—	1,305		—	—	1,076		0,175
15 00	606,5	—	1,292		—	—	1,040		0,195

Digitized by Google

TABELLA VIII. 12 agosto 1922

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (De Pasquale - Borrello) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1-A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	605,0	40	1,222		693,5	35	0,952		0,221
9 30	—	—	1,235		—	—	1,010		0,190
10 00	—	—	1,292		—	—	1,016		0,215
10 30	—	—	1.250		—	—	1,005		0.196
11 00	—	—	1,290		—	—	1,030		0,202
11 30	—	—	1,315		—	—	1,049		0.203
12 00	—	—	1,350		—	—	1,114		0,175
12 30	—	—	1,322		—	—	1,110		0,160
13 00	604.0	—	1,310	Nuvole intorno al sole	—	—	1,103		0,158
13 30	—	—	1,254	„	—	—	1,043		0.169
14 00	—	—	1,290	„	—	—	1,057		0,180
14 30	—	—	1,275	„	—	—	1.010		0,208
15 00	—	—	1,160	„	—	—	0,937		0,192

	(Amerio - Ricca)		11 agosto 1923		(De Pasquale)				
9 00	609,7	35	1,357		693,8	29	1,234		0,097
9 30	—	—	1,390		—	—	1,237		0,110
10 00	—	—	1,420		—	27	1,265		0,109
10 30	—	—	1,430		—	—	1,292		0,097
11 00	—	—	1,453		—	31	1,313		0,097
11 30	—	—	1,480		693,5	—	1,320		0,113
12 00	—	—	1,471		—	—	1,324		0,100
12 30	—	—	1,479		—	26	1,330		0,101
13 00	—	—	1,480		—	—	1,320		0,108
13 30	—	—	1,485		693,0	—	1,315		0,114
14 00	—	—	1,482		—	—	1,273		0,141
14 30	—	—	1,470		—	—	1,255		0,153
15 00	609,7	—	1,452		692,7	32	1,217		0,162

Digitized by Google

TABELLA IX. 13 agosto 1923

Ora t.m.E.e.	Stazione Montalto (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1 - A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	608.3	40	1,420		691,8	38	1,240		0,127
9 30	—	—	1,430		—	—	1,275		0,108
10 00	—	—	1,435		—	—	1,303		0,092
10 30	—	—	1,410		—	35	1,286		0,088
11 00	—	—	1,363		692,0	—	1,276		0,064
11 30	—	—	1,365		—	—	1,290		0,055
12 00	—	—	1,352		—	28	1,306		0,035
12 30	—	—	1,348		—	—	1,270		0,058
13 00	—	—	1,340		—	—	1,282	Nuvole intorno al sole	0,043
13 30	—	—	1,320		—	—	1,275		0,034
14 00	—	—	1,345		—	36	1,247		0,073
14 30	—	—	1,321		—	—	1,225		0,073
15 00	—	—	1,320		691,9	33	1,230		0,068

	(Amerio - Ricca)			15 agosto 1923				(De Pasquale)	
9 00	608,8	45	—		692,3	47	1,197	Cielo sereno	—
9 30	—	—	1,340		—	—	1,265		0,056
10 00	—	38	1,410		—	—	1,300		0,078
10 30	—	—	1,430		—	45	1,327		0,072
11 00	—	—	1,430		—	—	1,342	Comincia qualche nuvola	0,062
11 30	—	—	1,465		—	—	1,295		0,116
12 00	—	47	1,465		692,2	31	1,265		0,137
12 30	—	—	1,460		—	—	1,250		0,144
13 00	—	—	1,460		—	33	1,253		0,142
13 30	—	53	—	Le nuvole hanno coperto il sole	—	—	1,245		—
14 00	—	—	—		—	—	1,253		—
14 30	—	—	1,440		—	—	1,207		0,162
15 00	—	—	1,450		692,0	32	1,180		0,186

Digitized by Google

TABELLA X. 16 agosto 1923

Ora t. m. E. c.	Stazione Montalto (Amerio - Ricca) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_1)	Note	Stazione Polsi (De Pasquale) Pressione	Stato igr.	Radiazione (A_2)	Note	$\frac{A_1-A_2}{A_1}$
h. m.	mm.	%	p. calorie		mm.	%	p. calorie		
9 00	607,0	48	1,289		690,2	44	1,145		0,112
9 30	—	—	1,295		—	—	1,170		0,097
10 00	—	44	1,270		—	40	1,170		0,079
10 30	—	—	1,328		—	—	1,193		0,102
11 00	—	—	1,368		—	—	1,233		0,098
11 30	—	—	1,350		—	—	1,165	Nuvole	0,137
12 00	—	40	1,344		—	—	—	»	—
12 30	—	—	—	Nuvole	—	—	—	»	—
13 00	—	—	1,370		—	—	1,220		0,110
13 30	—	—	1,330		—	—	1,227		0,077
14 00	—	32	1,280		—	23	1,200		0,063
14 30	—	—	1,104		—	—	1,083		0,019
15 00	—	—	1,060		—	26	—	Nuvole	—
	(Amerio - Ricca)			17 agosto 1923				(De Pasquale)	
9 00	605,5	53	1,280		689,2	50	1,210		0,055
9 30	—	—	1,332		—	—	1,232		0,075
10 00	—	54	1,360		—	—	1,240		0,088
10 30	—	—	1,330		—	40	1,212		0,089
11 00	—	—	1,311		—	—	1,274		0,028
11 30	—	—	1,430		—	—	—	Nuvole	—
12 00	—	53	1,431		—	43	1,167		0,182
12 30	—	—	1,248		—	—	1,140		0,087
13 00	—	—	1,380		—	—	1,070		0,225
13 30	—	—	—	Nuvole	—	—	—	Nuvole	—
14 00	—	39	1,414		—	—	1,148		0,188
14 30	—	—	1,372		—	—	1,107		0,120
15 00	—	—	1,242		689,0	—	1,060		0,147

Digitized by Google

TABELLA XI.

ESEMPI DI MISURE COMPLETE

Montalto — 1° agosto 1922 — (Amerio - Ricca)

ORA t. m. E. c.	Temperatura	Stato igr. %	Pressione mm.	Deviazione galvan.	Deviazione media	Radiazione p. c.	OSSERVAZIONI
12,26	24°,0	64 ?	610,4	(281,6)	—	—	L'igrometro non funziona bene.
				281,8			
				282,4			
				282,0			
				283,2			
				282,7	282,5	1,570	Scartate le due deviazioni estreme, la divergenza massima tra le altre 10 che rimangono è inferiore al 5 ‰, e l'errore probabile della media è di circa ½ per mille.
				282,4			
				283,2			
				(283,8)			
				282,4			
				282,3			
				282,2			

Polsi — 10 agosto 1922 — (Amerio - Ricca)

13,26	32°,0	28	694,0	107,5			
				(107,3)			Scartando le due deviazioni estreme si ha fra le rimanenti una divergenza inferiore al 3 % e la media è determinata con un errore del 0,3 %.
				107,5			
				107,4			
				107,4			
				107,4	107,6	1,246	
				107,7			
				107,7			
				107,6			
				(107,8)			
				107,7			
				107,6			

Digitized by Google

TABELLA **XII.**

Segue: *Esempi di misure complete.*

Polsi — 13 agosto 1923 — (De Pasquale)

ORA t. m. E. c.	Temperatura	Stato igr. %	Pressione mm.	Deviazione galvan.	Deviazione media	Radiazione p. c.	OSSERVAZIONI
13,56	29°,0	36	691,8	123,4			
				123,2			Divergenza massima inferiore al 5 ‰; errore del valore medio inferiore a 0,5 %.
				123,2	123,3		
				123,4			
				123,3			
				123,4	123,3	1,247	Si osserva la leggera diminuzione nella media dei primi cinque valori con la media dei cinque successivi.
				122,8			
				123,2			
				123,4	123,2		
				123,3			
				123,4			

Montalto — 16 agosto 1923 — (Amerio - Ricca)

8,38	21°,0	45	607,0	(171,7)			
				171,8			
				171,8			Si osserva il graduale incremento della radiazione corrispondente al crescere dell'altezza del sole.
				171,8	171,9		
				171,9			
				172,0			
				172,4	172,2	1,230	
				(172,9)			In questa serie il pireliometro era nell'interno e riceveva la radiazione da un eliostata a specchio d'argento.
				172,9			
				172,5	172,5		
				172,5			
				172,2			

Digitized by Google

TABELLA **XIII.**

Segue: *Esempi di misure complete.*

Polsi — 11 agosto 1922 — (De Pasquale)

ORA t. m. E. e.	Temperatura	Stato igr. %	Pressione mm.	Deviazione galvan.	Deviazione media	Radiazione p. c.	OSSERVAZIONI
8,56	25°,4	29	693,8	120,9			
				120,8			Divergenza mass. 9° (6). Si vede che durante la serie (8 minuti) col crescere dell'altezza del Sole cresce la radiazione solare.
				120,6	120,9		
				121,1			
				121,1			
				121,7	121,2	1,234	
				121,6			
				121,1	121,5		
				121,7			
				121,5			

Polsi — 2 agosto 1922 — (De Pasquale)

14,26	26°,7	49	691,0	110,2			
				109,6			
				110,3			Durante la serie (8 minuti) col diminuire dell'altezza del Sole diminuisce la radiazione solare.
				(110,6)	110,1		
				110,3			
				110,0			
				109,4	109,6	1,262	
				109,5			
				109,1			
				109,1	109,0		
				108,1			
				(107,8)			

Digitized by Google

TABELLA XIV.

Segue: *Esempi di misure complete.*

Montalto — 16 agosto 1923 — (Amerio - Ricca)

ORA t. m. E. c.	Temperatura	Stato igr. ‰	Pressione mm.	Deviazione galvan.	Deviazione media	Radiazione p. c.	OSSERVAZIONI
11,10	21°	45	607,0	192,4			Si osservi la grande uniformità di questa serie. Essa è stata ottenuta come la precedente con l'eliostata all'esterno; la divergenza massima è di 2 ‰. Dello specchio d'argento era stato determinato il potere riflettente che risultò 0,943. Delle serie così determinate non si tenne conto per i calcoli della costante, mancando la serie contemporanea della stazione bassa.
				(191,8)			
				192,0			
				192,0			
				192,0			
				192.0			
				192,0	192,0	1,347	
				192,0			
				192.0			
				(192,4)			
				192,0			
				192,0			

TABELLA XV.

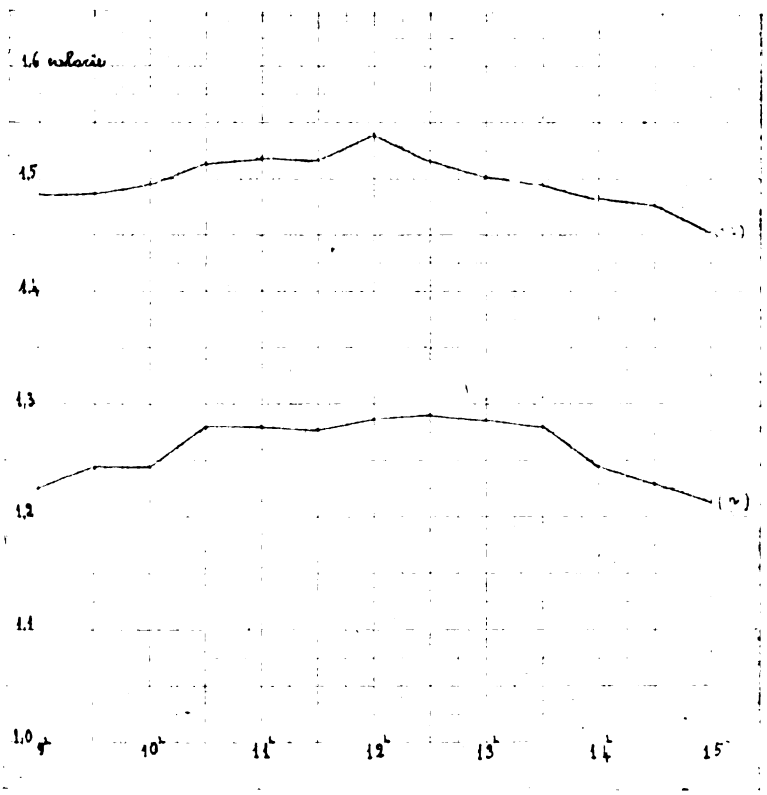
TABELLA DEGLI ELEMENTI
per il calcolo di A e valori di A ora per ora
(Confronto fra Montalto e Polsi).

ORA t. m. E. c.	A_1	A_2	ϵ_1	ϵ_2	A	ANNOTAZIONI
9	1,486	1,250	1,140	1,295	2,06	L'andamento delle misure non è simmetrico rispetto al mezzogiorno in causa dell'aumentare graduale del vapor d'acqua a partire dal mattino.
9 ½	1,487	1,245	1,040	1,181	2,10	
10	1,493	1,245	0,968	1,100	2,12	
10 ½	1,514	1,280	0,920	1,045	2,05	
11	1,519	1,280	0,888	1,008	2,08	
11 ½	1,517	1,277	0,864	0,982	2,07	
12	1,537	1,287	0,856	0,973	2,12	
12 ½	1,516	1,290	0,860	0,977	2,01	
13	1,502	1,282	0,872	0,991	1,98	
13 ½	1,495	1,280	0,904	1,027	1,95	
14	1,483	1,245	0,944	1,072	2,08	
14 ½	1,477	1,230	1,010	1,145	2,15	
15	1,454	1,213	1,122	1,248	2,12	
				Media	2,07	

Digitized by Google

TABELLA XVI.

Andamento diurno della radiazione solare dedotto dai valori medi orari, per MONTALTO (m) e POLSI (p).



Le tabelle da 1 a 10 ci dànno i valori già calcolati per le radiazioni solari a Montalto e a Polsi ora per ora.

Nella tabella 2 sono stati riportati i valori della costante solare (A) dedotti provvisoriamente con la semplice applicazione della nota formula approssimata

$$\log A = \frac{\epsilon_2 \log A_1 - \epsilon_1 \log A_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1},$$

Digitized by Google

dove ϵ_1 e ϵ_2 indicano gli spessori atmosferici attraversati dalla radiazione solare, calcolati per mezzo della formula

$$\epsilon = \epsilon_0 \sec z,$$

essendo ϵ_0 lo spessore verticale dell'atmosfera sovrastante la stazione, e z la distanza zenitale.

Non abbiamo creduto di applicare formule più complicate perchè le misure furono sempre fatte per valori non grandi delle distanze zenitali, e nemmeno il nuovo metodo accennato, per il quale era stata fatta questa campagna, per le ragioni che sono già state dette.

Questi dati serviranno quando si saranno ottenuti, in quantità sufficiente, quegli altri determinati con le maggiori differenze di altitudine che si hanno al Monte Rosa. L'attuale deduzione serve come saggio dei risultati, sopratutto se paragonata a quelli che si sono ottenuti da altri sperimentatori, applicando gli stessi metodi per dedurre la costante dalle misure fatte.

Nelle tabelle 12 e 13 sono riportate alcune serie complete di misure eseguite a Polsi e a Montalto, allo scopo di dimostrare l'andamento del lavoro sperimentale, e che l'accordo dei dati è tale da provare che in nessuna misura precedente si era ottenuta una così notevole esattezza.

Nella tavola 14 viene rappresentato l'andamento diurno della radiazione nelle due stazioni sopracitate, dedotto ora per ora dai valori medi.

L'esame di questa tavola ci indica la necessità di eseguire numerose serie di misure per poter applicare con vantaggio il metodo ideato, perchè le differenze nei due andamenti della radiazione a Polsi e a Montalto si devono attribuire in massima a una distribuzione istantanea di vapor d'acqua, fra le due stazioni, differente da quella che si dovrebbe considerare come normale, ed è soltanto il grande numero di osservazioni che potrà darci in ogni istante il rapporto medio fra le due intensità delle radiazioni.

Giunti al termine di questa breve esposizione che non può dare che un'idea approssimata del lavoro compiuto durante i

Digitized by Google

tre periodi estivi ricordati, in condizioni spesso molto disagevoli, rivolgiamo un vivo ringraziamento al Ministero della Pubblica Istruzione per la sovvenzione accordata a questa ricerca, al Prof. G. B. Rizzo, Direttore dell'Istituto di Fisica terrestre della R. Università di Messina, per averci cortesemente fornita una parte del materiale adoperato in questa campagna, alla Direzione del Santuario di Polsi sia per la gentile ospitalità concessa nei locali del Santuario, sia per avere dato modo agli operatori di Montalto di potere risiedere colà durante tutto il periodo destinato alle misure, ai Signori Attilio Valenti studente e Ing. Filippo Borrello per avere prestata volonterosamente la loro opera, rispettivamente negli anni 1921 e 1922.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Marzo 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Majorana, Pochettino, Garelli, Vallauri e il Segretario Repossi.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Segretario presenta le seguenti pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia dal Prof. E. Pistolesi:

Contributo allo studio dell'elica in un vento laterale;

Nuove considerazioni sul problema dell'elica in un vento laterale;

Calcolo della linea elastica dell'elica;

A proposito di una supposta eccezione al teorema di Kutta-Joukowski;

Luigi Bianchi;

Alcune considerazioni sul problema del biplano indefinito.

Il Socio Sacco presenta il volume degli *Atti e lavori del I° Congresso del Po, tenuto a Piacenza nel giugno 1927, a. V,* inviato in dono all'Accademia dal Podestà di Piacenza, e ne

Digitized by Google

mette in evidenza il notevole interesse. La Presidenza esprimerà al donatore il compiacimento dell'Accademia.

All'Accademia è pure giunto in omaggio, da parte del sig. Aderito Belli, un ritratto di Lazzaro Spallanzani, che entrerà a far parte della collezione dei ritratti degli Accademici più illustri, dall'Accademia stessa posseduta.

In seguito il Socio Panetti presenta per l'inserzione negli *Atti* una Nota di Carlo Ferrari, dal titolo: *Sull'analogia fra i campi elettrici e i campi aerodinamici,* ed estesamente la illustra.

E dopo il Socio Mattirolo presenta, pure per l'inserzione negli *Atti*, una Nota della dott.ssa A. M. Palazzo, dal titolo *Le lenticelle della radice del Morus,* e brevemente ne parla.

Da ultimo il Presidente, ricordando che la prossima adunanza della Classe cade nel medesimo giorno delle elezioni politiche, propone che l'adunanza stessa sia sospesa e domanda di essere autorizzato ad accettare le Note che in tale data fossero eventualmente presentate dai Soci per l'inserzione negli *Atti*. La proposta del Presidente incontra la incondizionata approvazione della Classe.

Digitized by Google

LETTURE

Sull'analogia fra i campi elettrici e i campi aerodinamici.

Nota dell'Ing. CARLO FERRARI
presentata dal Socio nazionale residente M. Panetti.

1. — L'integrazione delle equazioni differenziali del moto dei fluidi perfetti attorno ad un ostacolo è stata eseguita solo in casi particolari, se pure molto importanti, come quelli dei cilindri indefiniti col profilo Joukowski e dei corpi di rivoluzione [1]. Si comprende quindi di quale importanza sia il ricercare procedimenti che permettano di ottenere la configurazione del campo aerodinamico attorno a corpi di forma qualunque per via sperimentale. Tale problema ha già avuto una soluzione nel caso più semplice del moto piano, grazie alla analogia che per esso esiste fra i campi elettrostatici e i campi aerodinamici, nella quale si corrispondono la funzione potenziale φ del campo elettrostatico e la funzione Ψ di corrente del campo aerodinamico; le linee equipotenziali del campo elettrostatico corrispondono quindi alle linee di corrente del campo aerodinamico, il vettore intensità del campo corrisponde al vettore velocità, e il flusso del vettore intensità del campo attraverso alla superficie chiusa entro un circuito alla circuitazione lungo esso. La dimostrazione di tale analogia è immediata.

Infatti nel problema aerodinamico la funzione Ψ di una corrente piana di densità costante, all'infinito uniforme e parallela ad esempio all'asse x, in presenza di un ostacolo di forma data è definita dalle seguenti condizioni: in tutto il campo soddisfa all'equazione di Laplace $\Delta\Psi=0$; all'infinito $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_{x=\infty} = \text{costante} = U$; $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{x=\infty} = 0$;

[1] M. Panetti, *Costruzioni Aeronautiche*, Supplementi, Parte I e II.

Digitized by Google

sull'ostacolo $\frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0$ dovendo il profilo dell'ostacolo stesso essere linea di corrente; ed infine per un qualunque circuito S che si concateni coll'ostacolo

$$\int_S \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS = \Gamma = \text{costante}.$$

Il valore della circuitazione, e quindi la Ψ, è completamente determinata se il corpo, come ad es. un profilo alare di allungamento infinito, presenta a poppa una punta, dovendo in tal caso la linea di corrente staccarsi dal corpo in corrispondenza di essa.

Si consideri ora il campo elettrostatico creato in un dielettrico omogeneo da una distribuzione uniforme di cariche elettriche applicata ai limiti del campo nella direzione ad es. dell'asse x: la funzione potenziale φ soddisfa all'equazione $\Delta\varphi = 0$ in tutto lo spazio; ai limiti del campo si ha: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \text{costante} = u$, essendo u l'intensità del campo ai suoi limiti, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$; a contatto di un conduttore collocato nel campo $\varphi = \text{costante}$ e quindi $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ dovendo all'interno del conduttore annullarsi l'intensità del campo. Sulla superficie del corpo si manifestano cariche elettriche libere distribuite con densità ρ, e quindi, se il conduttore è isolato, si ha per un qualunque circuito s che con esso si concateni

$$\Upsilon = \int_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \iint_\sigma 4\pi\rho d\sigma = 0$$

(indicando con σ l'area racchiusa da s) essendo nulla la somma delle masse elettriche che compaiono sul conduttore. Se invece questo è collegato con un punto qualunque tenuto a potenziale costante, oppure, quando si faccia uso di forze elettromotrici alternate, tenuto ad un potenziale che presenti una differenza costante nel tempo rispetto al potenziale ai limiti del campo, si ha

$$\Upsilon = \int_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \iint_\sigma 4\pi\rho d\sigma = \text{costante};$$

Digitized by Google

il valore della costante dipende dal potenziale dato al conduttore e dal coefficiente di induzione di questo rispetto al campo, e può quindi variare entro limiti amplissimi.

È dunque sempre possibile ottenere un rapporto $\frac{\Upsilon}{u} = \frac{\Gamma}{U}$: basterà dare al conduttore un potenziale tale che una linea equipotenziale si stacchi da esso dal punto voluto, in particolare nei profili alari dalla punta. Si deduce quindi senz'altro che le due funzioni Ψ e φ, soddisfacendo alle stesse equazioni ed alle stesse condizioni ai limiti, debbono essere formalmente identiche.

La realizzazione sperimentale delle proprietà sopra esposte è stata fatta per la prima volta da Relf [1] colla cosidetta " vasca elettrica „. Il campo elettrostatico è creato nell'acqua contenuta entro una vasca rettangolare per mezzo di due elettrodi costituiti da due lastre parallele di alluminio; al centro della vasca è disposto il modello colle generatrici parallele alle lastre col profilo dato e colla data orientazione. Con una punta esploratrice di dimensioni abbastanza piccole, perchè la perturbazione da essa prodotta nel campo sia trascurabile, si ricercano tutti i punti del campo che sono allo stesso potenziale di un punto di riferimento e con un pantografo si trasportano tali punti sur un foglio di disegno. Tracciando in tal modo successive linee equipotenziali del campo elettrico corrispondenti a cadute di potenziali uguali, si hanno linee di corrente del campo aereo dinamico la cui distanza risulta inversamente proporzionale al valor medio della velocità nel tratto fra esso compreso e si potrà quindi facilmente determinare la velocità al contorno del profilo per un dato valore della velocità all'infinito.

2. — L'analogia sopra esposta viene a cadere quando si considerino campi a tre dimensioni; infatti nel caso di solidi di rivoluzione investiti da corrente di direzione asintotica parallela al loro asse la funzione di corrente Ψ soddisfa all'equa-

---

[1] E. F. Relf, *An electrical method of tracing stream-lines for the two-dimensional motion of a perfect fluid* (Report and Memoranda of the Aeronautical Research-Committee).

Digitized by Google

zione (in coordinate cilindriche, x coincidente coll'asse di figura ed y normale)

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0$$

mentre la funzione potenziale del campo elettrostatico è definita dall'equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Non mi sembra quindi privo d'interesse far vedere come in questo caso l'analogia sussista fra campi aerodinamici e campi di corrente elettrica in un mezzo conduttore omogeneo, corrispondendosi nella analogia le funzioni potenziali Φ e φ_1 dei due campi, e quindi il vettore velocità $\bar{v}$ e il vettore $\bar{i}$ densità di corrente.

La nuova analogia è basata, come la precedente, sull'identità delle equazioni e delle condizioni ai limiti cui le due funzioni Φ e φ_1 debbono soddisfare. È noto infatti che nell'interno di un mezzo conduttore omogeneo di conducibilità specifica c si ha, prescindendo dagli istanti iniziali, div. $\bar{i} = 0$, e poichè $-\text{grad}\,.\,\varphi_1 = c\,.\,\bar{i}$, si deduce div. grad. $\varphi_1 = 0$; come per un campo di corrente in un fluido incompressibile. A contatto poi di un ostacolo immerso nel campo elettrico, se l'ostacolo è costruito con materiale isolante, si ha la: componente di $\bar{i}$ normale alla superficie del corpo $\bar{i}_n = 0$ e quindi $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0$; se pertanto all'infinito le due correnti elettrica e fluida sono entrambe uniforme e parallele, le funzioni potenziali dei due campi dovranno essere formalmente identiche. Per la realizzazione sperimentale delle proprietà esposte è sufficiente la stessa vasca elettrica di Relf pur di sostituire al dielettrico (acqua pura) un conduttore (acqua acidulata) e di costruire il modello, invece che con materiale conduttore, con materiale isolante. È ancora opportuno notare che il circuito, che dalla punta esploratrice va al rivelatore, quando viene attraversato da corrente, altera il campo esterno ed in misura tanto maggiore quanto minore è la resistenza del circuito stesso rispetto a quella dell'acqua acidulata. Per ridurre al minimo la perturbazione si deve quindi avere

Digitized by Google

l'avvertenza di usare rivelatori a fortissima resistenza interna e sensibilissimi.

Il campo si potrà rappresentare per mezzo delle linee intersezione delle superficie equipotenziali con una serie di piani perpendicolari ad uno degli assi coordinati, ad es. all'asse z. Se la differenza di potenziale fra due linee equipotenziali consecutive si mantiene uguale per tutto il campo esplorato la componente V_x secondo l'asse delle x della velocità media nel tratto compreso fra le linee considerate sarà inversamente proporzionale al segmento dell'asse x compreso fra le linee stesse. Poichè, senza che ciò costituisca alcun limite alla generalità del metodo, si potrà supporre sempre la velocità all'infinito parallela all'asse x, e di intensità unitaria, risulterà senz'altro determinata la V_x. In modo analogo si determinano le due altre componenti.

Il procedimento si semplifica notevolmente se il modello su cui si sperimenta è di rivoluzione attorno all'asse x; in questo caso, con procedimento del tutto analogo a quello analitico, basterà limitare le ricerche al solo piano meridiano orizzontale e disporre il solido una prima volta coll'asse nella direzione asintotica della velocità, quindi in direzione ortogonale.

3. — Può ancora essere interessante vedere come il mezzo sperimentale descritto si presti a ricerche sui profili alari con allungamento finito, dirette a determinare la distribuzione della portanza lungo l'apertura dell'ala.

Assumo l'asse x nella direzione dell'apertura alare ed indico con Γ la circuitazione in corrispondenza del punto di ascissa x: è noto che in un'ala di apertura finita sfuggono dal vertice posteriore vortici di intensità $\frac{d\Gamma}{dx}$ che sono trasportati dal vento secondo linee di corrente del moto relativo all'ala stessa. Essi costituiscono una superficie di discontinuità tagliata in corrispondenza del punto per cui Γ è massimo $\left(\frac{d\Gamma}{dx} = 0\right)$, la quale rompe la connessione lineare dello spazio e rende quindi possibile l'esistenza di un potenziale ciclico nel campo esterno alla superficie stessa.

Digitized by Google

Il potenziale risulta quindi definito dalle seguenti condizioni (1):

a) soddisfa in tutto lo spazio esterno all'ala ed alle superficie vorticose all'espressione $\Delta\Phi = 0$;

b) a contatto dell'ala e dei vortici liberi essendo questi disposti secondo linee di corrente è $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$;

c) per un qualunque circuito S irreducibile, che si concateni cioè con tutta una semifalda vorticosa, è $\int_S \frac{\partial\Phi}{\partial S} dS = \Gamma_{max}$.

Nel campo elettrico il potenziale φ_1 soddisfa senz'altro alla condizione *a*); per imporre che esso soddisfi alla condizione *b*) è necessario interrompere la connessione del campo elettrico nello stesso modo col quale la connessione del campo aerodinamico è interrotta dalla falda vorticosa; si deve quindi prolungare all'infinito il profilo alare con una striscia sottilissima che si congiunge a questo in corrispondenza dell'orlo posteriore ed è fessurata in corrispondenza del piano di simmetria del modello. È opportuno notare che la forma della superficie di discontinuità del campo aerodinamico è a priori incognita in quanto essa dipende dalle velocità indotte dai vortici liberi; se però queste si suppongono piccole rispetto alla velocità all'infinito si potranno senz'altro trascurare e si potrà quindi ritenere la superficie di discontinuità piana e contenente la direzione asintotica della velocità stessa.

Per soddisfare infine alla condizione *c*) è necessario produrre una circuitazione τ in ogni circuito irriducibile s corrispondente ad S; ora per una nota legge dell'induzione elettromagnetica è $\tau = \int_s \frac{\partial\varphi_1}{\partial s} ds =$ variazione nell'unità di tempo del flusso del vettore induzione magnetica B attraverso ad una qualunque superficie f limitata da $s = \frac{\partial}{\partial t}\int_f B_n df$.

È necessario quindi formare colle due striscie corrispondenti alle semifalde vorticose e col modello alare un circuito magnetico di grande permeabilità rispetto all'acqua per evitare

---

(1) LAMB, *Hydrodynamics* (pag. 52 della vecchia ediz. di Cambridge).

Digitized by Google

dispersioni del flusso, ed applicare al circuito una forza magnetomotrice che produca un flusso magnetico della stessa frequenza del campo esterno. La grandezza della circuitazione potrà essere variata a piacere, operando sul numero di ampère spire che si concatenano col circuito magnetico. Sarà perciò sempre possibile ottenere che le linee di corrente si stacchino dal profilo, in corrispondenza del piano di simmetria nel modello, dal suo vertice.

Un impianto sperimentale del tipo descritto per determinare la configurazione del flusso attorno ad ostacoli di forma qualunque si sta costruendo sotto la direzione del prof. Panetti nel laboratorio di Aeronautica della R. Scuola di Ingegneria di Torino.

Digitized by Google

Le lenticelle della radice del Morus.

Nota della Dott.ssa A. M. PALAZZO
presentata dal Socio nazionale residente Oreste Mattirolo.

Scopo di questa pubblicazione è lo studio di particolari produzioni che si trovano sulle radici del gelso e che si debbono considerare come lenticelle, aventi però caratteri proprii tali da differire in alcuni punti dalla struttura delle comuni lenticelle.

Tale studio mi è stato suggerito come tesi di laurea dal ch.mo prof. Mattirolo ed ho compiuto le mie ricerche sotto la sua guida nel R. Istituto Botanico da lui diretto, valendomi dei mezzi cortesemente messi a mia disposizione: colgo ora l'occasione di ringraziarlo per l'aiuto ed i consigli preziosi di cui mi fu sempre largo.

Il primo che s'occupò di queste particolari produzioni fu il prof. Cesati, che fin dal 1844 accennava ad una nuova forma di *Coniomicete* da lui chiamata *Protomyces violaceus*, il quale avrebbe infestato le radici del gelso e che, secondo lui, sarebbe stato la causa della malattia conosciuta sotto il nome di *male del falchetto!*

In seguito il prof. Gibelli (1) in un lavoro sull'argomento pubblicato nel 1872, escluse l'entità fungina e disse trattarsi di una probabile alterazione del tessuto suberoso delle radici del gelso.

Credo necessario descrivere in qual modo si presenti all'os-

(1) « Atti della VI Riunione degli Scienziati italiani tenutasi in Milano », (1872).

Digitized by Google

servazione il creduto *Protomyces violaceus* Ces. prima di trattare la questione della sua vera essenza che formò oggetto delle mie ricerche.

Esso si genererebbe nel tessuto suberoso delle radici vecchie dei gelsi languenti, sotto forma di pustole alquanto sporgenti che, a guisa di anello, cingono più o meno completamente il contorno della radice, facilmente visibili pel loro colore violaceo, che risalta sulla tinta giallo-ocracea del tessuto suberoso. Le singole pustole constano di molte laminette di sughero alternanti con altrettanti straterelli di un minutissimo pulviscolo violetto. Al microscopio si nota che gli straterelli di sughero, formati da cellule tavolari poligonali, più allungate perpendicolarmente all'asse radicale, si separano l'uno dall'altro nell'area della macchia e nello spazio interposto si raccoglie uno straterello di pulviscolo, il quale rialza le laminette più superficiali, distendendole in modo che, alla fine, queste si rompono con una fessura irregolare e contornata di margini arrovesciati e laceri. Gli straterelli più profondi restano intatti e un po' convessi a guisa di pustole. Il pulviscolo violetto consta invece di innumerevoli cellule violacee a pareti inspessite non uniformemente.

Il prof. Gibelli venne alle seguenti conclusioni:

1° " Che il *Protomyces violaceus* Ces. non è un'entità micologica, ma una ipertrofia delle forme lenticellari, che si generano nel sughero delle radici e del tronco dei gelsi, *comune a tutti i Morus, tanto sani che ammalati e indipendentemente dalla loro età* „.

2° " Che diversi sono i modi di formazione delle lenticelle e tra questi si può avere anche la scissura degli straterelli di sughero in senso orizzontale, attraverso il lume delle loro cellule „.

3° " Che gli elementi costituenti il pulviscolo violetto rappresentano il contenuto delle cellule suberose, consolidato e fuori uscito per rottura delle pareti e possono quindi essere indicate col nome di *Endocisti* „.

4° Che in quanto alla loro funzione nell'economia della nutrizione della pianta, le lenticelle sono da riguardarsi come formazioni suberose destinate a proteggere i tessuti interni

Digitized by Google

contro l'azione nociva degli agenti atmosferici, opinione già sostenuta dal Trécul per qualsiasi forma lenticellare.

Al fine di ben chiarire la genesi ed il meccanismo di formazione di questi organi particolari, ho creduto opportuno seguire fin dalle prime fasi lo sviluppo di una giovanissima radichetta.

La radice del Morus, nell'orientazione primaria dei suoi elementi e dei suoi tessuti, si presenta costituita secondo il tipo normale delle piante dicotiledoni, vale a dire, non presenta alcuna particolarità che sia degna di speciale attenzione.

Nelle giovani radichette aventi un diametro di qualche millimetro, la successione dei tessuti dall'esterno verso l'interno, è data: 1° *dall'epidermide* che funziona per breve tempo e dalla quale traggono origine i peli radicali; 2° *dall'ipoderma* che consta di pochi strati parenchimatici, formati da elementi arrotondati a pareti sottili, poggianti verso l'interno su di un 3° *endoderma*, chè solo raramente è così evidente da lasciare ben distinguere i punti del Caspary, ma che in tutti i casi segna chiaramente il limite tra la corteccia e il cilindro centrale. Subito al disotto dell'endoderma, si presenta un anello più o meno regolare di sclerenchimi a pareti ispessite per quanto cellulosiche, i quali occupano la regione esterna del periciclo; 4° infine nel cilindro centrale il fascio vascolare di tipo radiale diarca, attorniato da pochi elementi procambiali, si presenta costituito da vasi spiralati ed areolati, mentre le due isole cribrose stanno ai lati delle poche trachee.

La struttura primaria della radice, quale ho sommariamente indicata, ha una durata assai breve. L'epidermide radicale esercita per poco tempo la sua funzione nel terreno ambiente per cessare definitivamente, quando ai tessuti primari succedono quelli secondarii e nuovi meristemi, entrando in azione, cambiano non solo l'orientamento dei tessuti, ma anche il loro funzionamento. Mentre per azione del cambio il fascio vascolare, nettamente radiale, assume a poco a poco l'aspetto collaterale, si stabilisce uno strato generatore subero-fellodermico all'esterno del libro primario (nella regione del periciclo) che riveste tutta la superficie della radice, producendo strati suberosi verso l'esterno e strati fellodermici verso l'interno.

Digitized by Google

I tessuti originatisi dal funzionamento di questo meristema determinano l'essiccamento di tutto il cilindro epidermico esterno che si distacca ben presto, cosicchè si assiste ad un fenomeno singolare, che la radice, per effetto immediato della formazione suberosa, diminuisce notevolmente di diametro, per aumentare nuovamente sovra tutto per azione del meristema cambiale che, originando elementi legnosi in abbondanza ed elementi cribrosi (fra i quali in questo caso sono notevoli pel loro grande sviluppo le fibre liberiane) provoca l'accrescimento diametrale della radice, il quale si continua sempre più col susseguirsi degli annuali periodi vegetativi.

Determinata dunque la posizione e l'orientazione dei vari tessuti della radice, si è in grado di poter riconoscere come si formino le aree lenticellari.

Prima di tutto occorre osservare che queste lenticelle nessun rapporto hanno cogli stomi, nè lo potrebbero avere, poichè esse si originano quando già la corteccia primitiva è sparita e quindi allorquando (supposto anche che ci fossero gli stomi nella radice) questi sono ormai scomparsi. Dalla attenta osservazione di numerose radici a questo stadio, ho potuto determinare che la formazione delle lenticelle del Morus è invece il prodotto della differenziazione delle cellule del fellogeno, le quali in certe posizioni (la cui ubicazione non ci è dato di poter individuare) dopo alcuni strati suberosi normali, dànno origine a strati di elementi a pareti cellulosiche, che diventeranno le *cellule di riempimento*: in seguito, dopo un certo numero di tali elementi a pareti dapprima sottili e cellulosiche, il fellogeno riprende la sua normale attività producendo nuovi strati suberosi.

Si ha così per opera del fellogeno una successiva alternanza di strati cellulosici e suberosi, disposti come le pagine di un libro.

Gli elementi a parete cellulosica, rinchiusi tra due strati di sughero, ingrossando i loro diametri e dividendosi, faranno poi pressione sugli strati suberosi dentro i quali sono compresi e riusciranno a romperli ristabilendo così le comunicazioni normali coll'atmosfera ambiente.

Col crescere poi del diametro del tronco nei periodi successivi

Digitized by Google

di vegetazione, gli strati cellulosici necessariamente si allargano ed allungano tangenzialmente, risultando il tronco come rivestito da grandi aree lenticellari dentro alle quali le cellule di riempimento, ispessendo e colorando la loro parete (nel modo che indicherò) — si dissociano e dànno infine origine, per la rottura degli strati suberosi esterni, a quella polvere violetta che il Cesati aveva descritto come un micete.

Evoluzione delle cellule di riempimento.

Le cellule di riempimento appaiono dapprima strette tra le lame suberose che le comprendono, sì che la loro presenza in un primo tempo è appena accennata da un leggerissimo divaricamento tra lo strato suberoso superiore e quelle inferiore. A causa di questa forte pressione, associata alla compressione reciproca, esse presentano una forma quasi rettangolare, che non è loro propria e costituiscono, le une accollate alle altre, uno strato apparentemente compatto. Rapidamente però, le singole cellule subiscono un notevole accrescimento diametrale, divengono turgescenti e per questo fatto esercitano alla loro volta una certa pressione sullo strato superiore di sughero, il quale passa alla forma convessa, assumendo l'aspetto cupuliforme caratteristico nelle produzioni lenticellari. In questo caso le cellule di riempimento appaiono molto simili a quelle del felloderma delle lenticelle: sono infatti anch'esse elementi arrotondati, a pareti cellulosiche e sottili, separate tra di loro da notevoli meati. Intanto il fellogeno prolifera attivamente, dando origine ad un nuovo strato di elementi cellulosici e successivamente ad un secondo strato di sughero; la pressione esercitata da questi elementi sommata a quelle del primo strato di cellule di riempimento che continuano frattanto ad accrescersi, provoca alfine la rottura della lama suberosa convessa, per il che le cellule di riempimento vengono a diretto contatto coll'aria ambiente e muoiono dopo aver subito, per le mutate condizioni, un rapido allungamento per estensione delle loro pareti radiali.

Da quanto ho detto appare che nel primo ciclo evolutivo della lenticella, le cellule di riempimento si limitano ad aumen-

Digitized by Google

tare progressivamente le loro dimensioni fino a rottura dello strato di sughero sovrastante, senza che per altro le loro pareti accennino a trasformazioni di alcuna sorta; non così però avviene quando la produzione lenticellare si è definitivamente stabilita e l'attività fellogenica genera con regolare alternanza elementi suberosi e cellulosici.

Infatti nel nuovo ciclo evolutivo le cellule di riempimento

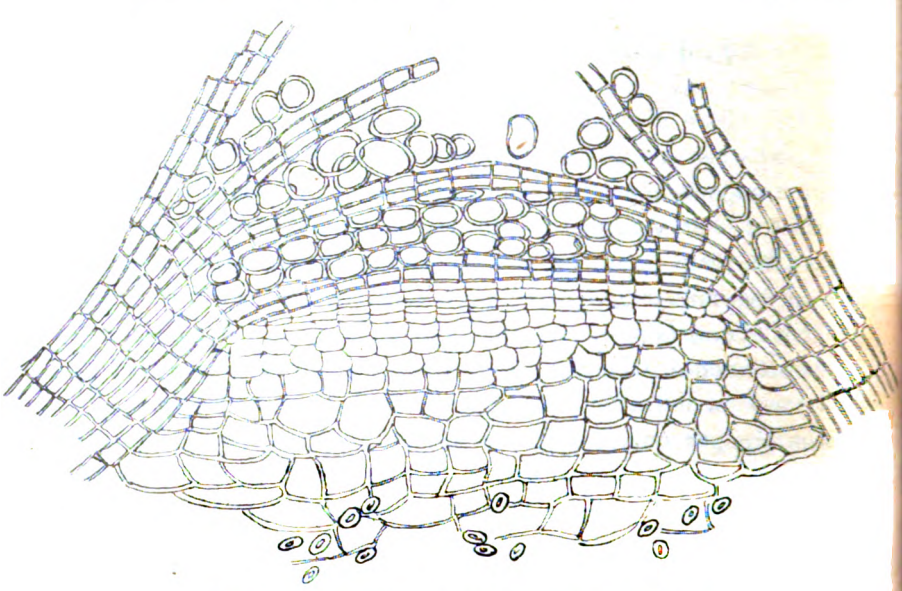


Fig. 1. — Giovane lenticella in via di sviluppo.

si dividono tangenzialmente, dando così origine ad un gran numero di nuovi elementi e mentre le dimensioni delle singole cellule vanno gradatamente aumentando e dalla forma relativamente appiattita passano a quella arrotondata, curiose trasformazioni avvengono nelle loro pareti: queste infatti vanno via via aumentando per sovrapposizione di nuovi strati di cellulosa sino a raggiungere un grado notevole di inspessimento.

Le cellule di riempimento presentano allora una cavità molto ridotta colle pareti solcate da canaletti porosi, le quali sono dotate di una particolare e forte rifrangenza. Questi elementi però, alla fine della loro evoluzione si presentano con le pareti

Digitized by Google

Fig. 2.
Lenticella sviluppatasi normalmente e lateralmente ad una radichetta.

Digitized by Google

meno ispessite ma più regolarmente compatte coi pori-canali obliterati; contemporaneamente la membrana va impregnandosi di una particolare sostanza violetta sì che alla fine essa appare intensamente colorata.

Sperimentando varie reazioni per stabilire la natura della membrana, ho potuto seguirne le modificazioni chimiche in relazione colle variazioni morfologiche e da queste appare che, mentre dapprima la sottile parete cellulare è schiettamente cellulosica, coll'iniziarsi e il progressivo aumentare dell'ispessimento, va man mano trasformandosi in un'altra varietà di cellulosa più condensata, che, se non reagisce più col cloruro di zinco iodato, dà ancora la tipica colorazione azzurra con un reattivo più energico quale quello di Russow (iodio e acido solforico) per prendere in fine, col rosso di rutenio, quando la cellula di riempimento ha raggiunto l'aspetto definitivo, la colorazione rosa intensa propria delle sostanze pectiche.

In conclusione le cellule di riempimento, prima di raggiungere la forma definitiva, devono passare per una serie di fasi, attraverso le quali la loro membrana subisce un processo di condensazione reso morfologicamente manifesto dai vari aspetti sopra ricordati assunti dalle pareti cellulari, per giungere in fine alla loro completa trasformazione in pectosa. Tale evoluzione richiede necessariamente un certo tempo ed è per questo che può svolgersi completamente solo quando la produzione lenticellare si è definitivamente stabilita e procede in relazione col normale e lento accrescimento della radice, mentre le prime cellule di riempimento, per rottura dello strato suberoso vengono a diretto contatto dell'aria ambiente quando appena si trovano nelle prime fasi.

La sostanza violetta stimo debba riguardarsi come appartenente a quel gruppo di pigmenti viola, rossi o bleu, compresi sotto il nome di *antocianine*, i quali pare abbiano rapporto coi fenomeni respiratori: il fatto di essere solubile nell'alcool, pochissimo nell'acqua e che la sua soluzione, se trattata cogli acidi, dà una colorazione rossa e verde-bluastra colle sostanze alcaline, confermerebbero questa opinione; tuttavia non ardisco spingermi più oltre in un argomento che è ancora causa di tanta incertezza.

Digitized by Google

Noterò ancora che sotto alle lenticelle largamente sviluppate che interessano una vasta regione della radice, si trovano dei gruppi di sclerenchimi particolarmente numerosi i quali, a differenza degli altri, dànno la reazione della floroglucina ed appaiono quindi lignificati.

Conclusione.

Le curiose produzioni che si riscontrano nelle radici di Morus si devono dunque considerare, come opinò il prof. Gibelli (1), quali formazioni lenticellari e sono da ascriversi, secondo la classificazione del Devaux, alle lenticelle secondarie che si originano, collo stabilirsi della struttura definitiva della radice, dai tessuti secondari. Esse appaiono di preferenza localizzate nel punto di uscita di una radichetta, anzi frequentemente si possono notare ai lati di questa due lenticelle simmetricamente disposte.

Tali lenticelle dapprima sotto forma di pustolette, col progredire dello sviluppo si accrescono maggiormente in direzione trasversale all'asse della radice, giungendo talvolta a cingerne tutto il contorno a guisa di anello.

Stabilita la natura di queste particolari formazioni, in accordo a quanto già aveva trovato il prof. Gibelli, mi credo autorizzato però dal risultato delle mie ricerche a stabilire un modo di sviluppo diverso da quello che egli aveva descritto: non si tratta cioè di una scissura in senso trasversale attraverso il lume delle cellule suberose, con conseguente fuoriuscita del contenuto consolidato sotto forma di endocisti, ciò che non può assolutamente essere ammesso, ma bensì di una iperattività del fellogeno peridermico che in determinate aree, dà alternativamente strati di elementi cellulosici e suberosi disposti come le pagine di un libro.

E contrariamente a quanto afferma il prof. Gibelli, la colorazione violetta delle lenticelle non è un fatto costante: ho potuto frequentemente osservare su radici di varie dimensioni delle macchie lenticellari ben sviluppate che presentavano una tinta giallo-aranciata simile al colore proprio del sughero di

(1) V. loc. cit.

Digitized by Google

Morus e simili a quanto si osserva nelle radici della Maclura; queste variazioni probabilmente dipendono da quel complesso di fattori, inerenti sia alle varie condizioni fisiologiche della pianta, sia all'ambiente, che determinano il formarsi dei pigmenti antocianici.

Così pure non è norma generale, come asserisce il prof. Gibelli, che lenticelle violette siano comuni a tutti i gelsi, tanto sani che ammalati e indipendentemente dall'età e dal luogo di provenienza: infatti, mentre le radici di alcuni gelsi appaiono completamente invase da queste formazioni, le quali portano ad una estesa esfogliazione degli strati suberosi, altre invece presentano l'involucro suberoso integro con rare lenticelle di dimensioni normali.

Questo fatto può essere interpretato come una conseguenza della particolare funzione che si attribuisce alla lenticella nel meccanismo vitale della pianta. Essa rappresenta non già, come pensava Trécul e come riconfermò Gibelli, una formazione destinata a proteggere i tessuti interni dall'azione nociva degli agenti atmosferici, ma un organo della traspirazione, che continuamente si adatta alle condizioni di umidità esterna ed interna e che partecipa in larga misura agli scambi gassosi generali. È dunque naturale che, se la radice si trova in terreni non adatti ai particolari bisogni del gelso, sia per eccessiva umidità sia per mancanza di ossigeno, essa reagisca col maggiore sviluppo dei suoi organi respiratori sotterranei.

Questa spiegazione verrebbe confermata da quanto riferisce il Sorauer, il quale parla di una " *Lohkrankheit* „ che si manifesta negli alberi costretti a vivere in terreni poco adatti, nelle radici dei quali si osservano anormali produzioni corticali legate specialmente allo sviluppo esagerato di cellule lenticellari, che appaiono sotto forma di rigonfiamenti e di nodosità. La radice reagisce come può alla mancanza di ossigeno ingrandendo i suoi organi respiratori (1).

---

(1) Questi stessi fatti si osservano anche nelle piante non solo sulla radice, ma sui fusti nei quali la respirazione è impedita dai muschi, epatiche, ecc. Groebner ha studiato nei pini questa malattia, alla quale Sorauer ha dato il nome di *Rindenmulm*.

Digitized by Google

BIBLIOGRAFIA

1. – H. Baillon, *Histoire des plantes*, 1877.
2. – Castelet, *Sur le Mûrier blanc.*
3. – De Candolle, *Premier Mémoire sur les lenticelles des arbres et le développement des racines qui en sortent.* " Annales Sc. Nat. „, 1ª serie, T. VIII, 1826.
4. – – – *L'origine des plantes cultivées*, 1886.
5. – M. H. Devaux, *Origine de la structure des lenticelles.* " C.-R. Acad. des Sciences „, 16 maggio 1898.
6. – – – *Recherches sur les lenticelles.* " Annales des Sciences Naturelles „, Tome XII, 1900.
7. – Cesati Vincenzo, Resoconto dell'adunanza del giorno 23 sett. 1845. " Atti della VI Riunione degli Scienziati italiani tenuta a Milano „ (1872).
8. – *Dictionnaire universel d'histoire naturelle*, 1861.
9. – Gibelli, *Sul* " Protomyces violaceus *Cesati* „ *e sulle lenticelle.* " Atti della VI Riunione degli Scienziati italiani „.
10. – Hugo Mohl, *Untersuchungen über die Lenticellen. Vermischte Schriften Bot.* " Ann. Sc. Nat. „, T. X, 1838.
11. – M. Molliard, *Nutrition de la Plante. Utilisation des substances ternaires.*
12. – – – *Formation des substances ternaires.* " Encyclop. Scientifique „.
13. – Noelli A., *Sull'origine delle lenticelle nel* " Sambucus *Nigra* „. " Bollettino della Soc. Botanica Ital. „, anno 1926, N. 1.
14. – Séringe, *Description et culture des Mûriers.*
15. – Sorauer, *Handbuch der Pflanzenkrankheiten*, Band I, 1924.
16. – Stahl, *Entwickelungsgeschichte und Anatomie der Lenticellen.* " Bull. Soc. Bot. de France „, t. XXI, 1874.
17. – Strasburger, *Trattato di Botanica.*
18. – Trécul, *Remarques sur l'origine des lenticelles.* " C.-R. Académie des Sciences „, t. LXXXIII, 1871.
19. – M. Wheldate, *The Anthocyanin pigments of Plante*, 1916.
20. – Wetmore (Ralpig H.), *Rapporti delle lenticelle e dei raggi midollari.* (" Bot. Gazette „, LXXXII, 1926).

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 14 Aprile 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono intervenuti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Panetti, Sacco, Pochettino, Garelli, Vallauri e il Segretario Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: De Sanctis, Vidari, Cian, Solari e il Segretario Faggi.

Scusano la loro assenza i Soci: Grassi, Somigliana, Majorana, Boggio, Ruffini e Brondi.

Aperta la seduta si legge il verbale dell'adunanza precedente, che è approvato senza osservazioni.

Il Presidente, ricordando che la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, nella sua ultima adunanza ha proposto per acclamazione la nomina a Socio nazionale residente di S. A. R. il Duca d'Aosta, si onora di presentare all'Accademia il seguente telegramma che S. A. R. ha voluto inviare alla Presidenza in risposta all'annuncio dell'avvenuta proposta:

Accolgo con fierezza designazione della Reale Accademia poichè alto ed illustre consesso ha premiato nell'opera mia la devozione degli innumeri oscuri eroi che hanno illuminato la mia inesausta passione italica. Con gratissimo animo ringrazio e saluto.

Emanuele Filiberto di Savoia.

Digitized by Google

Il Presidente invita quindi il Socio POCHETTINO a leggere la prima Relazione della Commissione per l'assegnazione del Premio Vallauri per il quadriennio 1923-26.

La lettura della Relazione non suscitando nessuna osservazione nè proposta da parte dei Soci, si rimette alla Classe Fisica la nomina di due altri Commissari a completamento della Commissione giudicatrice, giusta il disposto dello Statuto del Premio Vallauri.

Gli Accademici Segretari:
EMILIO REPOSSI
ADOLFO FAGGI

Digitized by Google

Relazione *della Commissione per il Premio Vallauri* (quadriennio 1923-26).

Illustri Colleghi,

Al concorso per il Premio Vallauri, rispondente al quadriennio 1923-1926, non si presentò alcun concorrente. La Commissione giudicatrice pertanto ritenne opportuno valersi della facoltà concessale dallo statuto della fondazione interpellando tutti i Soci Nazionali perchè designassero quegli studiosi che, a loro giudizio, sembrassero degni di conseguire il premio. Rispose soltanto il Socio prof. Panetti proponendo, in una erudita e convincente relazione, che il premio venisse assegnato al sig. Alessandro Marchetti, Direttore tecnico della S. I. A. I.: Società Idrovolanti Alta Italia, per i suoi progetti di velivoli di ogni specie che, costruiti nelle officine da lui stesso dirette, hanno assicurato all'Italia un invidiabile primato nel campo dell'Aviazione.

La Commissione unanimemente ritenne doversi prendere in favorevole considerazione la proposta del prof. Panetti, tanto più che fra coloro che possono conseguire il premio Vallauri, oltre ai cultori di Fisica pura, vanno compresi quelli che si dedicano alla Fisica applicata, della quale la Aerotecnica è certo una delle parti attualmente più importanti. Sembrò però alla Commissione opportuno, su proposta del Commissario prof. Somigliana, tener conto anche di un insigne cultore dell'Aerotecnica, la cui opera era già stata qui ricordata dallo stesso prof. Panetti in altra occasione, e cioè del prof. Enrico Pistolesi della R. Scuola di Ingegneria di Pisa, teorico questi dell'aerodinamica, ma cultore di quella Teorica-tecnica che, se non

Digitized by Google

brilla per l'eleganza e per il rigore assoluto della trattazione come le corrispondenti branche della Fisica matematica, ha il vantaggio di presentare formole pratiche di immediata applicazione ai casi reali e concreti. Insomma la Commissione ritenne doversi considerare non solo il progettista audace e geniale, ma anche il teorico che, con i suoi studi severi, rende possibile la via che il primo deve seguire.

Su l'opera dunque del sig. Marchetti e del prof. Pistolesi si fermò l'attenzione della Vostra Commissione, la quale, oltre che dal merito intrinseco dei loro studi che portano l'impronta genuina della genialità italiana, sempre pronta a congiungere nella più bella armonia le elevate idealità e le attitudini pratiche, fu mossa dalla sensazione di compiere atto di giustizia mettendo in rilievo l'opera di questi lavoratori dell'Aviazione che spesso quasi si dimenticano di fronte all'ammirazione che in tutti destano le gesta degli aviatori, i quali compiono sì miracoli di audacia, di abilità, di eroismo, ma grazie soprattutto agli strumenti perfetti che lo studioso, il progettista e il costruttore misero a disposizione delle loro meravigliose attitudini.

EccoVi, pertanto, Illustri Colleghi, il parere della Vostra Commissione:

È noto a tutti come, rispetto al velivolo attuale, il problema dell'elica sia forse il più importante in quanto dal conveniente adattamento del propulsore e del motore all'aeromobile dipende la possibilità di ottenere un apparecchio rispondente alle esigenze di economia, di velocità e di autonomia che oggi si richiedono, e come ancora tutti i quesiti pratici del volo, sia orizzontale che in salita o discesa, della quota di tangenza, delle manovre occasionali e delle acrobazie da combattimento siano risolubili soltanto se il comportamento dell'elica è noto. La teoria pertanto dell'elica ha recentemente progredito con grande rapidità e ci andiamo sempre più avvicinando alla completa conoscenza del fenomeno aerodinamico corrispondente; a questo progresso il prof. Pistolesi ha contribuito in modo indubbiamente notevole. Dotato di una solida coltura matematica

Digitized by Google

e tecnica, della quale fanno fede le sue numerose pubblicazioni, egli stabiliva le basi precise delle nuove teorie dell'elica nel suo lavoro: *Le equazioni differenziali del moto dei fluidi applicate al campo di velocità prodotto dall'elica*, e le svolgeva dettagliatamente poi in altri due lavori di notevole mole, l'uno dal titolo: *I propulsori elicoidali e i recenti progressi dell'aerodinamica*, l'altro dal titolo: *Nuovi indirizzi e sviluppi della teoria delle eliche*. In questi lavori è contenuta una trattazione completa dell'argomento, nella quale sono da rilevarsi l'introduzione e la elaborazione di concetti veramente geniali per determinare il modo con cui lavora ogni elemento delle pale di un'elica.

Successivamente il Pistolesi curò lo svolgimento delle sue teorie fino alle ultime conclusioni capaci di guidare direttamente il progettista. Si segnalano a questo riguardo: *La teoria semplificata dell'elica*, e la estensione di essa al *Problema fondamentale delle eliche a passo variabile*, trattato con una chiara volgarizzazione di perfetto rigore in una estesa e dettagliata monografia; intanto in pubblicazioni litografiche per gli studenti di Ingegneria aeronautica rielabora e perfeziona il ricco materiale, introducendo la polare dell'elica, strumento di calcolo divenuto ormai classico per il progettista, trattando il caso interessante delle eliche *in tandem* e dando nuovi procedimenti per la risoluzione del problema fondamentale in un'altra estesa monografia dal titolo: *Metodi grafici per il calcolo delle eliche*.

In seguito, nel 1924 e nel 1925, trattando in due note il problema dell'elica intubata e quello dei sistemi di palette rotanti in un fluido, il Pistolesi, su la base dei moderni metodi della dinamica dei fluidi, ha saputo dimostrare l'intimo legame che passa fra la teoria dell'elica di propulsione e quella delle motrici a turbina, e mettere in evidenza come da tale applicazione siano nate le turbine idrauliche veloci per piccole cadute, che costituiscono una delle più importanti novità nel campo delle macchine.

Finalmente con la nota: *Influsso di un vento laterale sul funzionamento delle eliche*, dell'ottobre 1925, e con quella comparsa un anno dopo: *Considerazioni sull'autogiro*, il Pistolesi pre-

Digitized by Google

lude alle nuove ricerche sull'elica funzionante come mezzo di sostentamento, su le quali in questi ultissimi anni si è nuovamente fermata l'attenzione di quanti si occupano di Aviazione. È da ricordare ancora che, con due studi inseriti negli *Atti* della nostra Accademia per il 1926, il Pistolesi ha saputo affermarsi nel campo della Meccanica applicata e precisamente trattando del fenomeno *Dello slittamento dei flessibili*.

Il complesso dei lavori di questo studioso, qui elencati, costituisce dunque un insieme di ricerche coordinate e dirette al progresso dell'Aerodinamica tecnica, al quale l'autore ha contribuito con rara efficacia, anche prima e dopo il periodo riferentesi al premio di cui ci occupiamo, con una serie numerosa di altre indagini importantissime. Ma l'elenco delle sue pubblicazioni nel periodo quadriennale interessante questo premio Vallauri, è prova della mole complessiva della sua opera scientifica e indice del suo valore come scienziato. Nè è da dimenticare che il Pistolesi è uno dei principali animatori degli studi italiani nel campo dell'Aeronautica, che egli promuove per mezzo del periodico tecnico: *Atti della Associazione italiana di Aerotecnica*, da lui creato e diretto.

Nel campo delle realizzazioni è sommamente degna di nota l'opera di Alessandro Marchetti, il geniale ideatore di tanti apparecchi, campioni insuperati per la *finezza* delle forme alla quale egli ha giustamente attribuito, in ogni sua creazione, la più grande importanza come quell'elemento da cui dipendono le caratteristiche più ricercate e più difficilmente raggiungibili e cioè: la pendenza minima del volo librato, la possibilità di raggiungere velocità e autonomia massime, e di elevarsi alle più alte quote di tangenza.

Tale *finezza* della forma si nota già nell'apparecchio metallico da combattimento *MVT*, che egli, come Direttore tecnico del reparto Aviazione della Wickers-Terni, ideò e costrusse nel 1917. Con esso, nei due anni successivi, furono conquistati i campionati di velocità per apparecchi terrestri; in questo apparecchio le cospicue doti del progettista apparvero in pieno nella sapiente e difficile conciliazione di una *finezza*, per quei

Digitized by Google

tempi eccezionale, con una soddisfacente robustezza di struttura, nonchè nella sua coraggiosa iniziativa di costruttore, che, fin da quel tempo, intuendo il grande avvenire della costruzione metallica, si decise ad attuarla fra difficoltà allora gravissime.

Ma l'opera del Marchetti appare veramente eccezionale per l'appunto nel quadriennio al quale si riferisce l'assegnazione dell'attuale premio Vallauri; assunta la carica di Direttore tecnico della S. I. A. I., egli seppe ideare e costruire una serie di apparecchi di svariata struttura e precisamente: in un primo tempo, l'idrovolante da corsa *S 51*, campione di velocità nel 1924, e l'aeroplano metallico da combattimento *S 52*, entrambi con un motore da 300 cavalli; in un secondo tempo, l'idrovolante *S 16 ter* con un motore di 450 cavalli e l'idroplano *S 55* con due galleggianti gemelli e due motori in tandem, ciascuno da 500 cavalli, che nel 1926 si affermò vincitore di ben 14 campionati mondiali. L'apparecchio *S 51* rappresenta una di quelle concezioni che, curate per una gara di velocità, hanno aperto, con i necessari ritocchi, la via al progresso degli apparecchi velocissimi da combattimento. La ricerca minuziosa della riduzione al minimo delle resistenze, il problema del volo su traiettorie curvilinee, che diventa formidabile nei regimi a velocità forzata, dànno a queste gare l'ufficio di scuola per continui perfezionamenti. Anche se oggi noi, nel celere pulsare del progresso continuo, guardiamo alle ideazioni di cinque anni or sono con il sentimento di chi è avvezzo a forme più evolute, non dobbiamo non riconoscere il merito di chi ha saputo in quel tempo concepirle e tradurle in atto, ed ha continuato e continua a farle progredire verso mete sempre più elevate; d'altronde non conviene dimenticare come incredibilmente semplice e naturale sembri ogni risultato quando è stato ottenuto, ma come difficile a raggiungersi esso ci appaia, finchè non è nota la via che conduce al suo conseguimento.

Ricorderemo inoltre come con l'idrovolante *S 16 ter* il generale De Pinedo abbia compiuto nel 1925 il famoso volo di 55.000 chilometri attraverso l'Oceano Indiano, l'Australia, e l'Estremo Oriente, e come con l'idroplano *S 55* lo stesso Generale abbia sorvolato due volte l'Atlantico e quasi tutto il Con-

Digitized by Google

tinente americano. Questo apparecchio, con le sue qualità nautiche che la mente geniale del Marchetti seppe conciliare con un'elevata *finezza*, con l'introduzione dell'uso di due motori in tandem, con la felice proporzione delle eliche propulsatrici che permette un ottimo equilibrio delle due unità motrici ed un alto rendimento dei due propulsori sebbene uno operi nella scia dell'altro, rappresenta una concezione che i rapidissimi progressi odierni non hanno sorpassato e stenteranno a sorpassare. Non possiamo infine dimenticare, esaminando la struttura e i pregi aeronautici di questo monoplano, che da esso, per semplice trasformazione in apparecchio terrestre e corrispondente diminuzione della potenza sistemata a bordo, il Marchetti trasse l'apparecchio *S 64*, di *finezza* superiore a tutte quelle finora raggiunte, con il quale i Comandanti Ferrarin e Del Prete poterono dare all'Italia il primato per la lunghezza di volo.

EccoVi esposte sommariamente le opere dei due proposti per il premio Vallauri. La Vostra Commissione, come Vi dissi in principio, ha unanimemente riconosciuto essere entrambi meritevoli di parere favorevole, ma, dovendosi poi decidere a quale dei due dovesse definitivamente assegnarsi il premio, si trovò in grande perplessità. Chè, se l'opera del prof. Pistolesi ha certamente carattere più scientifico che non quella del sig. Marchetti, non v'è dubbio che questa è caratterizzata da una maggiore genialità e da maggiore intuito creativo. Ambedue subiranno forse l'ingiuria del tempo, ma questa è la sorte comune di tutte le ricerche scientifico-tecniche; e poi il nome di coloro che fra i primi hanno portato ad un reale progresso, sia nella scienza che nella tecnica, non deve essere dimenticato in quanto che al giorno d'oggi, e specialmente in certi campi di attività, la ricerca è così febbrile, il progresso così rapido, il numero degli studiosi così grande, che coloro i quali riescono ad imprimere nel solco dell'umano progredire un'orma decisiva e personale, sono veramente degni della nostra ammirazione.

Tali ci sono sembrati tanto il prof. Enrico Pistolesi quanto il sig. Alessandro Marchetti e pertanto la Vostra Commissione

Digitized by Google

ha unimemente deciso che il premio Vallauri 1923-1926 venga diviso in parti uguali fra questi due valorosi.

Illustri Colleghi, noi speriamo che Voi vorrete accogliere la nostra proposta: il Vostro voto favorevole avrà, ne siamo sicuri, un'eco di plauso presso quanti sentono che il passato di gloria degli antichi navigatori italiani può oggi rivivere nel cielo, attraverso il quale vogliamo e sapremo portare nel mondo il nome d'Italia; presso quanti hanno a cuore le sorti della nostra Aviazione e attendono dalla scienza aviatoria, che è esperienza, ma è ancora in parte divinazione, nuove possibilità, nuovi mezzi per i commerci, per il lavoro fecondo, per la fortuna e la potenza del popolo italiano.

La Commissione:

C. F. Parona, *Presidente*

G. Grassi
C. Somigliana
G. Ponzio
M. Panetti
G. C. Vallauri
Membri

A. Pochettino, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Emilio Repossi.

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIV, DISP. 11ª, 12ª E 13ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Aprile 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Mattirolo, Panetti, Sacco, Pochettino, Vallauri e il Segretario Repossi.

Scusano la loro assenza i Soci: Grassi, Somigliana, Majorana, Boggio e Garelli.

Il Socio Sacco presenta in omaggio all'Accademia due suoi opuscoli: *Il glacialismo nelle Valli di Pinerolo* e *Il glacialismo nelle Valli di Lanzo*; e il Socio Panetti gli *Atti del Congresso annuale dell'Associazione Italiana di Aerotecnica*.

Il Socio Peano presenta in seguito, a nome del Socio Boggio assente, per l'inserzione negli *Atti*, una Nota di Antonio Colucci, dal titolo: *Trattazione in grande del problema dei valori iniziali per le equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti.*

Il Socio Panetti presenta, illustrandola brevemente, una Nota del Socio corrispondente Giuseppe Albenga, dal titolo:

Digitized by Google

A proposito di qualche formola approssimata per una trave inflessa e sollecitata assialmente.

Si passa poi alla votazione per la nomina dei due membri a integrazione della Commissione pel Premio Vallauri, e risultano eletti i Soci PANETTI e VALLAURI.

L'adunanza si chiude con l'invio, dietro proposta del Socio PANETTI, di un saluto e di un augurio al Socio SOMIGLIANA.

Digitized by Google

LETTURE

Trattazione in grande del problema dei valori iniziali per le equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti.

Nota del Dott. ANTONIO COLUCCI
presentata dal Socio nazionale residente T. Boggio.

Il prof. PICONE, in un suo recente lavoro (1), trattando, fra l'altro, delle equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine (a due e a tre variabili indipendenti), ha dato, per queste equazioni, dei teoremi assai interessanti ed affatto nuovi, qualcuno dei quali desta viva sorpresa pel suo singolare carattere.

Scriviamo l'equazione lineare alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti sotto la forma:

$$(1) \qquad b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)\,u = f(x,y),$$

ove $b_1(x,y)$, $b_2(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y)$ si suppongono assegnate funzioni continue nel rettangolo $\boldsymbol{R}$ (v. figura) definito dalle limitazioni:

$$x' \leq x \leq x'', \qquad y' \leq y \leq y'';$$

e prendiamo le mosse dal seguente teorema dovuto a PICONE:

Se, in $\boldsymbol{R}$, *le due funzioni* $b_1(x,y)$, $b_2(x,y)$ *non prendono mai*

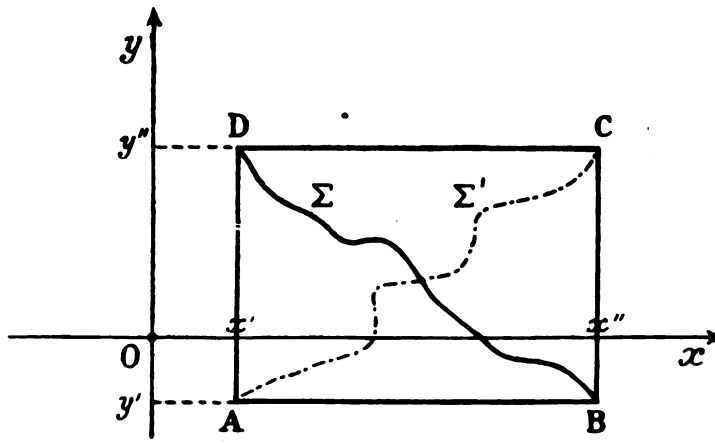
(1) *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del second'ordine*, di prossima pubblicazione negli "Annali di Matematica pura ed applicata". Questa Memoria è stata insignita del premio Tenore dell'Accademia Pontaniana di Napoli, nella seduta del 10 giugno 1928.

Digitized by Google

valori di segno opposto (dello stesso segno), ed una di esse è ivi sempre non nulla, una soluzione dell'equazione (1) *riesce completamente determinata in* R *dai valori che essa assume su di una curva semplice* Σ (Σ'), *tutta contenuta in* R *e terminata ai punti* $D(x', y'')$, $B(x'', y')$, $[A(x', y')$, $C(x'', y'')]$.

Questo teorema, per quanto a me consta, rappresenta un primo risultato nella trattazione, *in grande,* dell'integrazione delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

Se, per fissare le idee, consideriamo il caso delle due funzioni $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$ non di segno opposto in tutti i punti del rettangolo R, la curva Σ atta ad individuare una soluzione dell'equazione (1), quando si diano su di essa i valori della soluzione stessa, deve congiungere i vertici D e B del rettangolo. Ebbene, nel citato lavoro del Picone è dimostrato, con esempi, che se, invece, la curva Σ congiunge gli altri due vertici A e C, *vi sono in generale infinite soluzioni della* (1) *che assumono sulla curva valori prescritti, laddove tali valori non sempre si possono assegnare arbitrariamente, inquantochè i valori sopra un certo pezzo della curva possono talora determinare completamente quelli sul pezzo rimanente.*



Eppure, una tal curva Σ può non essere nè una *curva caratteristica* dell'equazione, nè avere alcun tratto in comune con una tale curva; ed inoltre può indifferentemente scriversene

Digitized by Google

l'equazione, risoluta tanto rispetto alla x come rispetto alla y. Pertanto, se si prendessero senz'altro i risultati classici della teoria generale delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine [1] — secondo i quali ad una soluzione di una tale equazione, risolubile rispetto ad una delle derivate in tutto il rettangolo R, si possono prescrivere arbitrariamente i valori sopra ogni curva che non sia una caratteristica — si sarebbe indotti a vedere nelle suddette conclusioni un paradosso.

Il paradosso non può rimuoversi se non considerando che la costruzione della soluzione dell'equazione, verificante le assegnate condizioni iniziali, è, nel teorema di PICONE, richiesta in *tutto* un assegnato rettangolo R, e non soltanto lungo un intorno della curva portante i dati, come risulta dalla precisa applicazione dei classici risultati. Lo studio in grande dell'integrazione delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine offre dunque un effettivo interesse per la presunzione — ben fondata dopo quanto si legge nel citato lavoro di PICONE — che debbano presentarsi in esso studio fatti nuovi e del tutto insospettati.

Il contenuto stesso del teorema riportato induce a porre, per le equazioni del tipo (1), un problema analogo a quelli classici detti dei valori al contorno, che si incontrano in celebri capitoli di Analisi e di Fisica-Matematica. Propriamente, si presenta qui il problema seguente, che chiameremo il *problema dei valori iniziali*:

Data una successione continua di valori su di una curva semplice $\Sigma(\Sigma')$ *di estremi* (x', y''), (x'', y'), $((x', y'), (x'', y''))$, *totalmente contenuta in* R, *costruire in tale rettangolo la soluzione* $u(x, y)$ *della* (1) *che su* $\Sigma(\Sigma')$ *prende i vatori dati* [2].

Di questo problema dò qui una prima soluzione traendo

---

[1] Cfr. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 374. Paris, 1925.

[2] Una recentissima trattazione, in grande, dell'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine e di tipo iperbolico, non ridotte a forma canonica, hanno compiuto FRIEDRICHS e LEWY nella interessante Nota: *Uber die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösung beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen* (" Math. Annalen „ 98 (1927), pp. 192-204).

Digitized by Google

profitto dalla preventiva integrazione dell'equazione delle curve caratteristiche:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_2(x, y)}{b_1(x, y)}.$$

Ritengo però desiderabile e possibile una trattazione esclusivamente *integro-lineare* del problema *lineare* in esame. Di ciò conto di occuparmi in un prossimo lavoro, nel quale, oltre ad allargare le condizioni di validità dei miei risultati, spero di potere anche passare allo studio degli analoghi problemi per le equazioni alle derivate parziali lineari in quante si vogliano variabili indipendenti, alle quali è pure fatto cenno nel citato lavoro del PICONE.

1. — Ammettiamo, provvisoriamente, che $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$ verifichino in $\boldsymbol{R}$ l'unica diseguaglianza:

$$b_1^2 + b_2^2 > 0. \tag{2}$$

Preso, ad arbitrio, un punto $P \equiv (x, y)$ nel rettangolo $\boldsymbol{R}$ consideriamo per esso l'asse p avente per coseni direttori:

$$\frac{b_1}{|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|}, \qquad \frac{b_2}{|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|},$$

rispettivamente. Ad ogni punto di $\boldsymbol{R}$ viene così ad associarsi un asse ben determinato, passante pel punto.

Posto:

$$\gamma = \frac{c}{|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|}, \qquad \varphi = \frac{f}{|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|},$$

l'equazione (1) può scriversi sotto la forma:

$$\frac{du}{dp} + \gamma u = \varphi, \tag{3}$$

dove, com'è ovvio, $\frac{du}{dp}$ indica la derivata di u in P, *nella direzione di p*.

Digitized by Google

Consideriamo ora l'equazione differenziale delle *curve caratteristiche* (nel piano xy):

$$b_2(x, y)\,dx - b_1(x, y)\,dy = 0. \tag{4}$$

È subito visto che per ogni punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ interno al rettangolo $\boldsymbol{R}$ passa sempre (almeno) un arco di curva caratteristica, dotato di un'equazione di tipo esplicito $y = y(x)$, oppure $x = x(y)$.

Invero, se $b_1(x_0, y_0) \neq 0$, in un certo intorno del punto P_0 la (4) si lascia scrivere sotto la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_2(x, y)}{b_1(x, y)}, \tag{4'}$$

e questa, per un noto teorema [1] della teoria delle equazioni differenziali ordinarie, ci assicura l'esistenza di (almeno) una funzione continua $y = y(x)$ verificante l'equazione (4') e tale che $y(x_0) = y_0$.

Se, invece, in P_0 risultasse $b_1 = 0$, in tal punto si avrebbe, in virtù della (2), $b_2(x_0, y_0) \neq 0$: si ragionerebbe allora sull'altra equazione:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b_1(x, y)}{b_2(x, y)}. \tag{4''}$$

Sia σ_0 una di queste curve. È chiaro che in ogni punto P di essa l'asse p risulta tangente alla curva.

Scegliamo su questa P_0 come origine degli archi; e per verso positivo dei medesimi prendiamo quello che, in ogni punto della curva, concorda con il verso di p. Detta s l'ascissa curvilinea di P su σ_0, le funzioni $u(x, y)$, $\Upsilon(x, y)$, $\varphi(x, y)$ divengono, su tale curva, delle funzioni di s. Indichiamole con $u(s)$, $\Upsilon(s)$, $\varphi(s)$.

Si ha:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{du}{dp},$$

---

[1] Cfr. ad es. G. Peano, *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine.* " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino „, 1886.

Digitized by Google

e la (3), considerata pei punti di σ_0, diviene

$$\frac{du}{ds} + \gamma(s)\, u(s) = \varphi(s).$$

Integrando si ricava:

$$(5) \qquad u(s) = e^{-\int_0^s \gamma(s)\,ds} \left[u_0 + \int_0^s \varphi(s)\, e^{\int_0^s \gamma(s)\,ds}\, ds \right],$$

dove $u_0 = u(0)$.

Concludiamo dunque che: *qualunque sia la posizione del punto P_0 nell'interno del rettangolo $\boldsymbol{R}$, conoscendo il valore u_0 di una soluzione della* (1) *in quel punto, si possono calcolare i valori di tale soluzione in tutti i punti di uno o più archi caratteristici passanti per P_0.*

2. — Mettendo in relazione quanto ora si è detto col ricordato teorema di PICONE, si è naturalmente condotti a porre, pel problema enunciato in principio, delle opportune limitazioni miranti ad assicurare, insieme, l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione (1). Queste limitazioni le faremo nel seguito gradatamente, a mano a mano che se ne presenta la necessità.

In questo numero faremo le seguenti ipotesi:

1) Le funzioni $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$ verificano, in tutto $\boldsymbol{R}$, le condizioni:

$$b_1(x, y) \neq 0\,, \qquad b_1(x, y)\,.\,b_2(x, y) \geq 0\,;$$

2) la funzione $\frac{b_2(x, y)}{b_1(x, y)}$ è, in $\boldsymbol{R}$, lipschitziana rispetto alla variabile y;

3) la curva Σ, di estremi (x', y''), (x'', y'), è l'imagine di una funzione $y = \lambda(x)$, continua e decrescente della variabile x nell'intervallo (x', x'') [1].

---

[1] Trattiamo qui soltanto il problema relativo alla curva Σ. L'altro si conduce in maniera perfettamente analoga; ma su ciò ritorneremo alla fine del lavoro.

Digitized by Google

La condizione (2), in virtù di un noto teorema di Analisi (1), ci permette di asserire che per ogni punto interno al rettangolo passa una ed una sola curva integrale dell'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_2(x,y)}{b_1(x,y)}. \tag{6}$$

Si tratta ora di far vedere che comunque si prenda il punto, la relativa caratteristica incontra in *un punto ben determinato la curva* Σ.

In tale intento, considero la funzione $\beta(x,y)$ definita nella striscia:

$$x' \leq x \leq x'', \qquad -\infty < y < +\infty,$$

al modo seguente:

$$\beta(x,y) = \frac{b_2(x,y)}{b_1(x,y)}, \text{ nei punti di } \boldsymbol{R} \text{ (frontiera inclusa)},$$

$$\beta(x,y) = \frac{b_2(x,y')}{b_1(x,y')}, \text{ per } x' \leq x \leq x'', \quad y < y',$$

$$\beta(x,y) = \frac{b_2(x,y'')}{b_1(x,y'')}, \text{ per } x' \leq x \leq x'', \quad y > y''.$$

La funzione $\beta(x,y)$ riesce, ovviamente, lipschitziana rispetto ad y in tutta la striscia, epperò per ogni punto di $\boldsymbol{R}$ passa *una* curva integrale dell'equazione (2)

$$\frac{dy}{dx} = \beta(x,y),$$

terminata alle rette di equazioni $x = x'$, $x = x''$.

Se si considera la parte di questa curva contenuta in $\boldsymbol{R}$, si ottiene una curva integrale dell'equazione (6), in *tutta la sua estensione*. E poichè, per l'ipotesi (1), la curva caratteristica relativa ad un qualunque punto di $\boldsymbol{R}$ risulta *non decrescente* in

---

(1) Goursat, *Cours d'Analyse*, vol. II, pp. 365-369. Paris 1911.

(2) Goursat, *Cours d'Analyse*, vol. II, p. 370. Paris, 1911.

Digitized by Google

tutto l'intervallo (x', x''), ne segue che essa deve incontrare la frontiera di $\boldsymbol{R}$ in due punti ben determinati, situati da parti opposte rispetto alla diagonale di estremi (x', y''), (x'', y').

Dopo ciò è ben chiaro che ogni curva caratteristica ha un punto ed un sol punto in comune con la curva Σ.

Per brevità di scrittura denoteremo con ψ, indifferentemente, la curva caratteristica uscente dal punto $P \equiv (x, y)$ di $\boldsymbol{R}$ e la corrispondente funzione, soluzione dell'equazione differenziale (6). Talvolta, per maggior chiarezza, porremo:

$$\psi = \psi(\xi\,;\ x, y) = \psi(\xi, P)$$

e conseguentemente:

$$\psi(x\,;\ x, y) = y.$$

Il punto d'incontro della ψ con la curva Σ, d'ora innanzi, lo indicheremo sempre con $P_0 \equiv (x_0, y_0)$; sicchè:

$$y_0 = \psi(x_0\,;\ x, y) = \lambda(x_0).$$

Consideriamo ora, come nel numero precedente, l'arco $\sigma_0 \equiv P_0 P$ di caratteristica, di origine P_0. Osservando che qui è:

$$ds = \frac{|\sqrt{b_1^2 + b_2^2}|}{b_1}\,dx,$$

la formola (5) dà:

$$(7)\quad u(x,y) = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\left[u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\, e^{\int_{x_0}^{\xi} \frac{c(\xi,\psi)}{b_1(\xi,\psi)}\,d\xi}\,d\xi\right].$$

Dunque: *se esiste nel rettangolo* $\boldsymbol{R}$ *una soluzione* $u(x, y)$ *dell'equazione* (1), *questa soluzione riesce completamente determinata, in* $\boldsymbol{R}$, *mediante la formola* (7), *dai valori che essa assume nei punti* (x_0, y_0) *della curva* Σ.

Vogliamo ora far vedere che *la formola* (7) *rappresenta una funzione continua di* x *e* y *in* $\boldsymbol{R}$. Basterà, evidentemente, limitarsi a dimostrare che sono funzioni continue, nel rettangolo,

Digitized by Google

gli integrali che compariscono nel secondo membro della formola in esame.

Diciamo μ un numero maggiorante, in $\boldsymbol{R}$, il valore assoluto di $\frac{c(x,y)}{b_1(x,y)}$, e $Q \equiv (x^{(1)}, y^{(1)})$ un punto prossimo a P. Per la continuità di questa funzione si ha che ad ogni numero positivo ϵ se ne può fare corrispondere un altro h, tale da aversi:

$$(\alpha) \qquad \left| \frac{c(M)}{b_1(M)} - \frac{c(N)}{b_1(N)} \right| < \epsilon$$

per tutte le coppie (M, N) di punti di $\boldsymbol{R}$, pei quali

$$\overline{MN} < h.$$

Ricordando che $\psi(\xi, P)$ è funzione continua [1] di P in $\boldsymbol{R}$, siamo in grado di affermare che al precedente numero h si può associare un numero positivo k, tale da risultare, per un fissato punto P, e qualunque sia ξ:

$$(\beta) \qquad | \psi(\xi, Q) - (\xi, P) | < h,$$

purchè

$$\overline{QP} < k.$$

Ciò premesso, osserviamo che

$$\left| \int_{x_0}^{x^{(1)}} \frac{c[\xi, \psi(\xi, Q)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, Q)]} d\xi - \int_{x_0}^{x} \frac{c[\xi, \psi(\xi, P)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, P)]} d\xi \right| \leq$$

$$\int_{I(x_0, x^{(1)})} \left| \frac{c[\xi, \psi(\xi, Q)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, Q)]} \right| d\xi + \int_{I(x_0, x)} \left| \frac{c[\xi, \psi(\xi, Q)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, Q)]} - \frac{c[\xi, \psi(\xi, P)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, P)]} \right| d\xi +$$

$$+ \int_{I(x^{(1)}, x)} \left| \frac{c[\xi, \psi(\xi, Q)]}{b_1[\xi, \psi(\xi, Q)]} \right| d\xi \quad [2].$$

È facile ora convincersi che, al tendere di Q a P, tutti e tre

---

[1] GOURSAT, loc. cit., vol. III.

[2] Per le notazioni cfr. M. PICONE, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, "Circolo Matematico di Catania", 1923, p. 507.

Digitized by Google

gli integrali del secondo membro di questa diseguaglianza tendono a zero.

Invero, cominciando dal primo integrale, abbiamo:

$$\int_{I(x_0^{(1)}, x_0)} \left| \frac{c[\Xi, \psi(\Xi, Q)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, Q)]} \right| d\Xi \leq \mu \mid x_0 - x_0^{(1)} \mid .$$

Al tendere di Q a P, a causa della continuità della funzione $y_0 = \lambda(x_0)$, $x_0^{(1)}$ tende a x_0; e ne segue senz'altro l'asserto [1].

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che se $\overline{QP} < k$, in forza della (β) e della (α) abbiamo:

$$\int_{I(x_0, x)} \left| \frac{c[\Xi, \psi(\Xi, Q)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, Q)]} - \frac{c[\Xi, \psi(\Xi, P)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, P)]} \right| d\Xi \leq \epsilon \mid x - x_0 \mid .$$

Ma ϵ può prendersi piccolo a piacere; dunque l'integrale testè scritto tende a zero col tendere di Q a P. Resta così provata la continuità dell'integrale:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{c[\Xi, \psi(\Xi, P)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, P)]} d\Xi$$

su $\boldsymbol{R}$.

Con considerazioni perfettamente analoghe si dimostra la continuità, su $\boldsymbol{R}$, dell'altro integrale:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f[\Xi, \psi(\Xi, P)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, P)]} e^{\int_{x_0}^{\xi} \frac{c[\Xi, \psi(\Xi, P)]}{b_1[\Xi, \psi(\Xi, P)]} d\Xi} d\Xi .$$

3. — Per potere andare innanzi nell'analisi della formola fondamentale (7), ci è oramai indispensabile sostituire alcune delle ipotesi fatte in precedenza con altre più restrittive, ed aggiungere altre ipotesi al riguardo delle funzioni che figurano sotto i segni di integrale nel secondo membro della formola stessa.

---

[1] Lo stesso può ripetersi, evidentemente, pel terzo degli integrali scritti sopra.

Digitized by Google

Propriamente, manterremo qui immutata l'ipotesi (1), e supporremo che le funzioni $\frac{b_2(x,y)}{b_1(x,y)}$, $\frac{c(x,y)}{b_1(x,y)}$, $\frac{f(x,y)}{b_1(x,y)}$ siano dotate di derivate parziali continue e limitate in $\boldsymbol{R}$. Inoltre, ammetteremo che le due funzioni:

$$\omega(x_0) = u[x_0, \lambda(x_0)], \quad y_0 = \lambda(x_0),$$

siano dotate di derivate continue rispetto ad x_0 nell'intervallo (x', x''), e la seconda di queste derivate verifichi la diseguaglianza:

$$\lambda'(x_0) < 0.$$

È chiaro che tutte le ipotesi del numero precedente sono comprese in quelle testè fatte. Perciò sarà, anche qui, soddisfatta la seguente condizione, per noi essenziale: *le caratteristiche dell'equazione* (1) *determinano una corrispondenza univoca e continua tra i punti del rettangolo* $\boldsymbol{R}$ *e quelli della curva* Σ. *Tale corrispondenza è priva di punti eccezionali.*

Inoltre, le ipotesi testè ammesse ci permettono di derivare sotto il segno gli integrali che compariscono nella formola (7).

Infatti, è noto [1] che la funzione $\psi(\xi; x, y)$ possiede, in $\boldsymbol{R}$, derivate parziali prime rispetto ad x e ad y. Dippiù queste derivate sono continue e verificano l'equazione:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{b_2(x,y)}{b_1(x,y)} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Derivando primo e secondo membro della formola (7) rapporto ad y e ad x, abbiamo:

---

[1] Goursat, loc. cit., vol. III, pp. 7-10. Paris, 1915.

Digitized by Google

$$(9)\quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi}\left\{-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{c(\Xi,\psi)}{b_1(\Xi,\psi)}\right]d\Xi + \frac{\partial x_0}{\partial y}\cdot\frac{c(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0}\right\}\cdot u(x,y) +$$

$$+ e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi}\left\{\omega'(x_0)\frac{\partial x_0}{\partial y} + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f(\Xi,\psi)}{b_1(\Xi,\psi)}\right]e^{\int_{x_0}^{\Xi}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi} +\right.$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{f(\Xi,\psi)}{b_1(\Xi,\psi)}e^{\int_{x_0}^{\Xi}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi}d\Xi\left(\int_{x_0}^{\Xi}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{c(\Xi,\psi)}{b_1(\Xi,\psi)}\right]d\Xi - \frac{\partial x_0}{\partial y}\frac{c(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right) -$$

$$\left. - \frac{\partial x_0}{\partial y}\frac{f(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right\},$$

$$(10)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi}\left\{-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{c(\Xi,\psi)}{b_1(\Xi,\psi)}\right]d\Xi - \frac{c(x,y)}{b_1(x,y)} + \frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{c(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right\}\cdot u(x,y)$$

$$+ e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi}\left\{\omega'(x_0)\frac{\partial x_0}{\partial x} + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(\Xi,\psi)}{b_1(\Xi,\psi)}\right]e^{\int_{x_0}^{\Xi}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi}d\Xi +\right.$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{f(\Xi,\psi)}{b_1(\Xi,\psi)}e^{\int_{x_0}^{\Xi}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi}d\Xi\left(\int_{x_0}^{\Xi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{c(\Xi,\psi)}{b_1(\Xi,\psi)}\right]d\Xi - \frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{c(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right) -$$

$$\left. - \frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{f(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)} + \frac{f(x,y)}{b_1(x,y)}e^{\int_{x_0}^{x}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi}\right\}.$$

Osservando che:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}\quad,\qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

dalle formole (9) e (10) si trae facilmente:

$$(11)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_2}{b_1}\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{b_2}{b_1}\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)\left[\frac{c(x_0,y_0)\cdot u(x,y)}{b_1(x_0,y_0)}e^{\int_{x_0}^{x}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi\,\Psi)}d\Xi} + \omega'(x_0) -\right.$$

$$\left. - \frac{c(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\int_{x_0}^{x}\frac{f(\Xi,\psi)}{b_1(\Xi,\psi)}e^{\int_{x_0}^{\Xi}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi}d\Xi - \frac{f(x_0,y_0)}{b_1(x_0,y_0)}\right]e^{-\int_{x}^{x}\frac{c(\Xi,\Psi)}{b_1(\Xi,\Psi)}d\Xi} +$$

$$+\frac{f(x,y)}{b_1(x,y)} - \frac{c(x,y)\cdot u(x,y)}{b_1(x,y)}.$$

Digitized by Google

Ponendo mente che

$$\frac{\partial y_0}{\partial x} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{\xi = x_0}, \qquad \frac{\partial y_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{\xi = x_0},$$

dalla (8) segue senz'altro che

$$\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{b_2}{b_1}\frac{\partial y_0}{\partial y} = 0.$$

Ma, d'altra parte:

$$\frac{\partial y_0}{\partial x} = \lambda'(x_0) \cdot \frac{\partial x_0}{\partial x}, \qquad \frac{\partial y_0}{\partial y} = \lambda'(x_0) \cdot \frac{\partial x_0}{\partial y};$$

dunque è anche:

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{b_2}{b_1}\frac{\partial x_0}{\partial y} = 0.$$

Conseguentemente la (11) riducesi a

$$b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c\,u = f.$$

Si conclude:

Nelle ipotesi fatte in questo paragrafo, la formola (7) *rappresenta l'unica soluzione dell'equazione* (1), *obbligata a prendere su* Σ *i valori* $\omega(x_0)$.

4. — Nei numeri 2 e 3 del presente scritto abbiamo supposto, in tutto R:

$$(12) \qquad b_1(x, y) \neq 0, \qquad b_1(x, y) \cdot b_2(x, y) \geq 0.$$

Ma è evidente che quanto si è detto in quei paragrafi si adatta, parola per parola, al caso in cui, in R, si ha:

$$b_2(x, y) \neq 0, \qquad b_1(x, y) \cdot b_2(x, y) \geq 0.$$

Infatti, basta sostituire l'equazione (4'') all'equazione (4'), e scambiare, anche in tutto il resto, l'ufficio della variabile x con quello della variabile y.

Digitized by Google

Se, invece, in $\boldsymbol{R}$, sono verificate le due condizioni:

$$(13) \qquad b_1(x, y) \neq 0\,, \qquad b_1(x, y)\,.\,b_2(x, y) \leq 0\,,$$

non si possono più dare sulla Σ, *arbitrariamente,* i valori iniziali della soluzione della (1). Ma, se alla curva Σ si sostituisce la curva *analoga* (1) Σ' di punti terminali (x', y'), (x'', y'') il problema che ci ha occupato, a parità delle altre condizioni, ammette, anche in questo caso, *una soluzione ben determinata, data dalla stessa formola* (7), *ove però in luogo di* $u(x_0, y_0)$ *bisogna porre* $u(x_0', y_0')$.

Da quanto si è detto scaturisce che la necessità di sostituire la curva Σ con la curva Σ', nel passaggio dal caso (12) al caso (13), è di *natura essenzialmente topologica.*

Concludiamo con l'osservare che l'ossatura di questo lavoro resterebbe inalterata se alla curva Σ (Σ') si sostituisse una curva non sempre decrescente (crescente), definita nell'intervallo (x', x''), con gli stessi punti terminali, tutta contenuta in $\boldsymbol{R}$, a condizione però che essa incontri *in un punto ed in uno solo ciascuna curva caratteristica.* Ma riteniamo, che ciò facendo, quello che si guadagna in maggiore generalità si perde in *concretezza.*

5. — Vogliamo, prima di finire, considerare alcuni casi particolari della equazione (1).

Ferme restando le ipotesi fatte nel paragrafo 3, supponiamo, in primo luogo, che si abbia, in $\boldsymbol{R}$:

$$f(x, y) \equiv 0\,.$$

---

(1) Vogliamo con ciò intendere che sulla curva Σ', di equazione $y'_0 = \lambda_1(x'_0)$, si fanno le stesse ipotesi che sulla curva Σ, *salvo una sola eccezione*:

$$\frac{d\lambda_1}{dx_0'} > 0\,,$$

ipotesi che qui vien fatta in luogo dell'altra: $\lambda'(x_0) < 0$.

Digitized by Google

La formola (7) porge immediatamente:

$$u(x, y) = \omega(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{c(\xi, \psi)}{b_1(\xi, \psi)} d\xi}.$$

Dunque: *se, nell'intervallo* (x', x''), *è:*

$$\omega(x_0) \equiv 0,$$

la $u(x, y)$ *è identicamente nulla in* $\boldsymbol{R}$, *tanto nel caso* (12) *come nel caso* (13); d'accordo con un teorema segnalato da PICONE.

Facendo, invece, in $\boldsymbol{R}$:

$$c(x, y) \equiv 0,$$

la (7) diviene:

$$u(x, y) = \omega(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi, \psi)}{b_1(\xi, \psi)} d\xi.$$

In particolare: *l'integrale dell'equazione:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

determinato dalle solite condizioni iniziali, è dato da:

$$u(x, y) = \omega(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \xi + y - x)\, d\xi.$$

Se il rettangolo $\boldsymbol{R}$ riducesi al quadrato di punti estremi (o, o), (a, a), e per curva Σ si prende la diagonale di punti terminali (o, a), (a, o), la formola precedente assume l'aspetto più concreto:

$$u(x, y) = \omega\left(\frac{a + x - y}{2}\right) - \int_{x}^{\frac{a+x-y}{2}} f(\xi, \xi + y - x)\, d\xi,$$

Facendo analoghe ipotesi al riguardo dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

Digitized by Google

si ottiene la soluzione:

$$u(x, y) = \omega\left(\frac{x+y}{2}\right) - \int_x^{\frac{x+y}{2}} f(\xi, x+y-\xi)\, d\xi .$$

Se, infine, supponiamo ad un tempo:

$$f(x, y) \equiv 0 , \qquad c(x, y) \equiv 0 ,$$

la formola (7) ci dà:

$$u(x, y) = \omega(x_0).$$

In parole: *la soluzione dell'equazione*

$$b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ,$$

edterminata dalle solite condizioni iniziali, prende su ogni caratteristica un valore costante: quello assegnato a tale soluzione nel punto comune alla detta caratteristica ed alla curva Σ (Σ').

Napoli, 28 febbraio 1929 (VII).

Digitized by Google

A proposito di qualche formola approssimata per la trave inflessa e sollecitata assialmente.

Nota del Socio corrisp. GIUSEPPE ALBENGA
presentata dal Socio naz. resid. Modesto Panetti.

La trave inflessa e sollecitata assialmente ha, come è noto, numerose applicazioni in alcuni elementi essenziali dell'ossatura dei ponti metallici e dei velivoli. Si sono perciò ideati parecchi metodi di calcolo rapido di tali strutture, sacrificando alquanto la precisione per evitare le lungaggini, a dir vero non eccessive, dello studio di tali elementi con le teorie razionali della scienza delle costruzioni. L'*Air Service Information Circular No. 493* dell'Aeronautica Nordamericana riporta un certo numero di formole approssimate per la trave inflessa e ne discute i risultati applicandole ad un esempio numerico: il calcolo di una campata del longarone di un aeroplano; altre formole raccolgono R. W. Hawken (1), J. Case (2) ed altri autori di lingua inglese.

Una analisi critica di queste formole, che meglio permette di rilevarne la relazione con quelle che si ottengono dalle cosidette teorie esatte, può farsi ricorrendo agli sviluppi in serie trigonometriche da me proposti fin dal 1913 (3) per studiare, fra l'altro, la trave articolata agli estremi, di sezione costante, inflessa da un carico uniforme di intensità p per unità di lunghezza e compressa dal carico assiale P. A questo caso si limi-

(1) R. W. Hawken, *Column Analysis and Design*, Brisbane, 1918.

(2) John Case, *The Strength of Materials*, London, 1925.

(3) G. Albenga, *Su di alcune applicazioni di serie trigonometriche alla determinazione di linee elastiche* in "Atti del R. Istituto Veneto", 1912-13.

Digitized by Google

tano, o cercano di ridursi con vari accorgimenti, gli Autori delle formole di cui qui voglio trattare.

Facevo vedere nella Nota citata come, scritto il carico ripartito uniforme p sotto la forma:

$$(1) \qquad p = \frac{4}{\pi} p \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x$$

(dove n rappresenta il generico numero dispari), si otteneva, per il caso della flessione pura, per la trave lunga l e con gli ordinari simboli della scienza delle costruzioni, la equazione della linea elastica:

$$(2) \qquad EJy_1 = \frac{4pl^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x.$$

Ne segue subito che il momento flettente nella sezione corrente si può scrivere:

$$(3) \qquad \mathfrak{M}_x = \frac{4}{\pi^3} p l^2 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x.$$

Quando invece agiva contemporaneamente il carico di compressione P, l'equazione (2) doveva sostituirsi con la

$$(4) \qquad y_2 = \frac{4pl^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left(\frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 EJ - Pl^2} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x,$$

od anche

$$y_2 = \frac{4}{\pi^3} pl^2 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{n^2\pi^2 \frac{EJ}{l^2} - P} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x,$$

ed osservando che $\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ è il primo carico di Eulero per la trave considerata e indicandolo con P_E,

$$(5) \qquad y_2 = \frac{4}{\pi^3} pl^2 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{n^2 P_E - P} \operatorname{en} \frac{n\pi}{l} x.$$

Digitized by Google

Per i valori che interessano nei calcoli pratici di resistenza delle strutture le serie (2) e (3) godono di una rapidissima convergenza. In mezzeria della trave, avremo, considerando il solo primo termine dello sviluppo (2):

$$y_1 = f_1 = \frac{4pl^4}{\pi^5 EJ}, \tag{6}$$

valore alquanto più grande di quello esatto $\frac{5}{384}pl^4$.

Il momento flettente in mezzeria $\mathfrak{M}_{\frac{l}{2}}$ sarà dato per la (3) dalla

$$\mathfrak{M}_{\frac{l}{2}} = \frac{4}{\pi^3}pl^2 \tag{7}$$

quando anche ora si limiti lo sviluppo al primo termine. Avremo quindi, detto $(\mathfrak{M})$ il momento esatto $\frac{1}{8}pl^2$:

$$\mathfrak{M}_{\frac{l}{2}} = 1{,}03\,(\mathfrak{M}). \tag{8}$$

Rapidamente converge anche la serie (5) per i punti in vicinanza di quello medio della trave.

Quando agisca anche il carico assiale avremo come momento flettente nella sezione generica:

$$M_x = \mathfrak{M}_x + Py_2$$

e quindi per la (3) e la (5):

$$M_x = \frac{4}{\pi^3}pl^2 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(1 + \frac{P}{n^2P_E - P}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x = \tag{9}$$

$$= \frac{4}{\pi^3}pl^2 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n}\,\frac{P_E}{n^2P_E - P} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x.$$

Per la sezione di mezzo avremo, arrestando lo sviluppo al primo termine:

$$M_{\frac{l}{2}} = \frac{4}{\pi^3}pl^2\,\frac{P_E}{P_E - P} \tag{10}$$

Digitized by Google

e per la (8):

$$M_{\frac{l}{2}} = 1{,}03\,(\mathfrak{M})\,\frac{P_E}{P_E - P}. \tag{11}$$

È una formola semplice, la quale ricorda da vicino quella ottenuta per altra via dal Case [1]:

$$M_{\frac{l}{2}} = 1{,}02\,(\mathfrak{M})\,\frac{P_E}{P_E - P}, \tag{12}$$

ed è sempre approssimata per eccesso: l'errore della (11), che è del 3 % per $P=0$, si riduce al 4 per mille per $P = 0{,}985\,P_E$.

Dato il grado di approssimazione dei calcoli statici si può sostituire il valore 1 a quello 1,03 e porre:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M})\,\frac{P_E}{P_E - P}. \tag{13}$$

È questa la nota formola di Perry [2] che gli Inglesi e i Nordamericani impiegano di solito e che è consigliata dai loro regolamenti. Arthur Berry indicò come sia possibile, complicandola alquanto, renderla più approssimata per carichi assiali vicini a quello di Eulero [3].

Se scriviamo la (13) sotto la forma:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M})\,\frac{\frac{P_E}{P}}{\frac{P_E}{P} - 1}$$

ed indichiamo con $\nu = \frac{P_E}{P}$ la *sicurezza contro il carico di punta*, possiamo porre anche:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M})\,\frac{\nu}{\nu - 1} \tag{14}$$

---

(1) John Case, op. cit., pag. 345.

(2) John Perry, *Struts and Tie-Rods with lateral Loads*, in "Philosophical Magazine", I, 1892, pag. 269.

(3) *Handbook for Strength Calculation. Appendix n. 4.*

Digitized by Google

ed otteniamo così la formola di Vianello (1), identica in fondo alla precedente e preferita dagli autori tedeschi.

Se invece trasformiamo la (13) nella

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}}$$

e sostituiamo a P_E il suo valore, avremo la formola di Fidler (2):

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1}{1 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EJ}} . \tag{15}$$

La (13), la (14) e la (15) non differiscono fra di loro che per la scrittura; abbastanza approssimate per i bisogni della pratica, dànno valori più vicini al vero che non la formola (11) fino a che $\frac{P}{P_E}$ è inferiore a 0,5; poi con l'avvicinarsi del carico assiale P a quello di Eulero si allontanano alquanto dal valore esatto, ciò che di regola non importa molto, perchè di rado si hanno carichi con tanto scarsa sicurezza contro l'inflessione laterale e perchè l'errore è sempre assai piccolo. Esse sono approssimate per difetto; ma esagerano quelli che per sicurezza ritengono (3) di dover fare:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1.2}{1 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EJ}} , \tag{15'}$$

o, come Andrews (4), il quale fonda la sua formola su analogie poco chiare col comportamento di una trave soggetta a momento flettente costante, pongono:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1}{1 - \frac{Pl^2}{8EJ}} . \tag{16}$$

---

(1) Vianello, *Der Eisenbau*, 2ª ediz., pag. 102.

(2) Fidler, *A practical Treatise on Bridge Construction*, pag. 163.

(3) Cfr. la citata nota di R. W. Hawken.

(4) E. Andrews, *Further Problems in the Theory and Design of Structures*, pag. 217.

Digitized by Google

Valori accettabili, per quanto leggermente scarsi, dà invece la formola di Johnson [1]:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1}{1 - \frac{Pl^2}{10EJ}}. \tag{17}$$

La sua grande semplicità l'ha resa di uso corrente nella tecnica americana.

Di segno opposto è l'errore commesso applicando la

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) \frac{1}{1 - \frac{5}{48}\frac{Pl^2}{EJ}}, \tag{18}$$

che si usa talora per ottenere osservando che è:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M}) + P\eta_2;$$

dalla quale ponendo per η_2 la espressione:

$$\eta_2 = \frac{5}{48} M_{\frac{l}{2}} \frac{l^2}{EJ},$$

valida quando al momento M_x si attribuisce un andamento parabolico, e risolvendo rispetto ad $M_{\frac{l}{2}}$, si ricava la (18).

Quando $\frac{5}{48}\frac{P}{EJ}$ sia abbastanza piccola perchè sia lecito trascurarne il quadrato, la (18) dà:

$$M_{\frac{l}{2}} = (\mathfrak{M})\left(1 + \frac{5}{48}\frac{Pl^2}{EJ}\right) = (\mathfrak{M}) + Pf_1, \tag{19}$$

se con f_1 indichiamo la freccia di inflessione dovuta al carico trasversale; otteniamo cioè la espressione del momento che si avrebbe applicando semplicemente la sovrapposizione degli effetti e trascurando le deformazioni dovute al carico assiale.

---

[1] J. B. Johnson, C. W. Bryan, F. E. Turneaure, *Modern framed structures*, II, pag. 520. New-York, Wiley, 1926.

Digitized by Google

Le formole riportate più sopra offrono, di fronte alla soluzione esatta:

$$(20) \qquad M_{\frac{l}{2}} = \frac{EJp}{P}\left(\sec\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,\frac{l}{2} - 1\right) = p\,\frac{l^2}{\pi^2}\,\frac{P_E}{P}\left(\sec\sqrt{\frac{P}{P_E}}\cdot\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

il vantaggio di essere relazioni algebriche di facile calcolo, che lasciano agevolmente intravedere l'andamento della funzione che esse simbolizzano. Non hanno invece ragione di essere le formole che, senz'essere esatte, contengono le stesse funzioni trascendenti della soluzione rigorosa o quelle inutilmente complicate qualche volta ancor meno approssimate di quelle che si ricordarono, che sono contenute nelle opere citate in principio di questo studio.

Torino, aprile 1929.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 5 Maggio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci: PEANO, GUIDI, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, PANETTI, PONZIO, POCHETTINO, BOGGIO, GARELLI, VALLAURI e il Segretario REPOSSI;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: BRONDI, VIDARI, CIAN, LUZIO, SOLARI e il Segretario FAGGI.

Scusano l'assenza il Vice-Presidente DE SANCTIS ed i Soci: D'OVIDIO, SACCO, EINAUDI e PATETTA.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente si compiace di veder presente il Socio SOMIGLIANA e si congratula per la sua guarigione. Il Socio SOMIGLIAAA ringrazia.

Il Presidente invita quindi il Socio POCHETTINO a leggere la sua Relazione per la proposta del conferimento del Premio VALLAURI per le Scienze fisiche nel quadriennio 1923-26. Il Socio POCHETTINO dà lettura della Relazione, che conclude con la proposta di assegnare il premio, diviso in parti eguali, all'ingegnere Alessandro MARCHETTI ed al prof. Enrico PISTOLESI.

Digitized by Google

Non essendosi mossa nessuna osservazione a questa Relazione, si passa, secondo il disposto dello Statuto del Premio, alla votazione. Prendono parte alla votazione tutti i Soci presenti e le proposte della Commissione risultano accettate alla unanimità.

Il risultato viene accolto con applausi.

Il Presidente infine, rispondendo ad una proposta del Socio Cian, assicura che alla notizia dell'assegnazione del Premio Vallauri verrà data la maggior possibile diffusione per mezzo della stampa.

Gli Accademici Segretarii:
Emilio Repossi.
Adolfo Faggi.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 5 Maggio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, GUIDI, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, PANETTI, PONZIO, POCHETTINO, BOGGIO, GARELLI, VALLAURI e il Segretario REPOSSI.

Scusano la loro assenza i Soci: D'OVIDIO e SACCO.

Il verbale della adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente dà lettura di una lettera dell'augusto consocio S. A. R. il Duca degli Abruzzi, nella quale questi ringrazia l'Accademia per l'omaggio resogli in occasione della scoperta delle sorgenti dell'Uebi Scebeli.

Il Socio GUIDI presenta in omaggio all'Accademia gli estratti di due suoi lavori, dal titolo: *Dighe ad arco sperimentali* e *Prove di travi da ponte,* e ne espone brevemente il contenuto.

Il Socio MATTIROLO presenta in omaggio due sue Note estratte dagli "Annali della R. Accademia d'Agricoltura di Torino „, dai titoli: *A proposito della " Circolare ministeriale 10 novembre 1928 „ diretta ai comandi di legione della Milizia forestale sui danni ai boschi di conifere per il commercio degli Alberi di*

Digitized by Google

Natale, e *Le " Scuole ambulanti „ nella propaganda parassiticida e agricola.*

La prima contempla i danni che, annualmente, vengono portati ai boschi non vincolati dai tagli fraudolenti delle conifere per fabbricarne " Alberi di Natale „. Proporrebbe di vietare la pratica di questi " Alberi „ e di tornare invece a quella prettamente italiana e più artistica del " Presepio „.

Nella seconda si prospetta la necessità di adoperare un mezzo moderno di locomozione per la propaganda dell'uso dei parassiticidi, preparando automobili convenientemente attrezzati con cui si potrebbe, con celerità, procedere alle pratiche di disinfezione.

Il Presidente Parona presenta all'Accademia l'omaggio ricevuto dal Ministro della Guerra dei tre volumi delle opere del compianto Socio prof. Francesco Siacci.

A proposito di questo omaggio il Socio Boggio (anche a nome del Socio Somigliana) fa rilevare l'importanza delle opere stesse: " il prof. Siacci „, egli dice, " suo predecessore nella cattedra di Meccanica superiore nell'Ateneo torinese, dotato di larga e profonda cultura matematica, specialmente nelle questioni più elevate della Meccanica, compiè studi assai pregevoli sopra questo ramo delle discipline matematiche, ottenendo risultati che s'impongono alla nostra ammirazione per la loro eleganza e semplicità.

" Essi costituirono il punto di partenza di pregevoli ricerche di altri autori.

" Ma il più alto titolo di gloria di F. Siacci, quello per il quale è ancora oggidì universalmente noto ed apprezzato dagli artiglieri di tutto il mondo, è costituito dalle sue originali e fondamentali ricerche nel campo della Balistica esterna. Egli, dotato, come si disse, di solida cultura matematica, potè comporre, in un corpo organico di dottrina, teorie che prima erano molto imperfette e frammentarie, arricchendole di numerosi ed

Digitized by Google

importantissimi contributi originali, dando loro inoltre un assetto pienamente rigoroso e accessibile ai bisogni della pratica, che gli faceva esclamare con giustificata soddisfazione: ' questa volta la Balistica e la pratica si dànno la mano ' (*).

" Ancora oggidì, molti dei risultati stabiliti dallo Siacci fanno testo negli odierni studi di Balistica ".

Il Socio GRASSI presenta, per l'inserzione negli *Atti*, una sua Nota dal titolo: *Sulla resistività dell'alluminio*, e comunica all'Accademia che a risultati perfettamente concordanti con quelli da lui conseguiti sin da diversi anni or sono, sono giunte a questo proposito la Commissione Internazionale riunitasi lo scorso anno a Parigi ed esperienze eseguite in Germania ed in America.

Il Presidente si congratula col Socio GRASSI ed al suo plauso si unisce anche il Socio VALLAURI, il quale comunica all'Accademia che l'alluminio è stato sostituito al rame per la linea ad alto potenziale che sta costruendosi in Val dell'Isarco e che il Governo Nazionale sta prendendo provvedimenti per favorire in generale questa sostituzione, altamente utile per l'Italia, nelle linee di trasmissione della forza elettrica.

Il Socio PEANO presenta una Nota del sig. Vincenzo MARSEGUERRA, intitolata: *Sulle funzioni tayloriane*, per la pubblicazione negli *Atti*.

Vengono infine presentati alla Classe i seguenti volumi giunti in dono all'Accademia:

José Isaac CORRAL: *Cantidades complejas* (Memorias cientificas de la Direccion de Montes y Minas);

San Luis Catalogue of 15333 stars for the epoch 1910, prepared at the Dudley Observatory (Altany-New York);

(*) Queste ricerche provano, fra altro, di quanta importanza sia la profonda conoscenza della Matematica per gli artiglieri, mentre taluno parla invece di ridurre loro l'insegnamento matematico!

Digitized by Google

HARVEY M. IFALE: *The Genus haplopappus,* ed altri opuscoli pubblicati sotto gli auspici della " Carnegie Institution „ di Washington.

Prima di togliere la seduta il Socio GUIDI prega la Presidenza di sostituirlo quale membro del Consiglio d'Amministrazione, dato il suo trasferimento da Torino a Roma. Il Presidente ringrazia il Socio GUIDI dell'opera da lui prestata fin qui, ed annuncia che la votazione del nuovo membro del Consiglio sarà fatta nella prossima adunanza.

Digitized by Google

LETTURE

Sulla resistività dell'Alluminio.

Nota del Socio nazionale residente GUIDO GRASSI

Negli impianti elettrici da parecchi anni si va estendendo l'uso dell'Alluminio come conduttore, anche per lunghe linee, in luogo del rame. Perciò si è reso necessario di stabilire i valori da adottarsi in pratica dei coefficienti caratteristici che si riferiscono alle proprietà elettriche e meccaniche dell'Alluminio.

La Commissione Elettrotecnica internazionale, interessandosi di ciò, ha incaricato un Comitato speciale di studiare la questione e indicare le norme da seguire in proposito.

L'Accademia sa che io, in seguito a invito del Comitato Elettrotecnico Italiano, mi sono occupato specialmente di determinare la resistività dell'Alluminio e il relativo coefficiente di temperatura. Fu precisamente nel gennaio 1923 che io presentai una Nota a questa Accademia dal titolo: *Resistività dell'Alluminio a diverse temperature.*

Il Comitato di studio della C. E. I. composto di delegati della Francia, della Gran Brettagna, della Germania e degli Stati Uniti, nella sua riunione a Parigi del novembre 1928, stabiliva che la resistività può raggiungere al massimo il valore 2,873 *microhm-centimetro* a 20° C, e questo s'intende per fili non cordati, cioè non presi da un cavo o da una treccia, dove i diversi fili che la compongono sono avvolti ad elica, cioè cordati.

Se invece le misure son fatte su fili presi da cavi o trecce si può ammettere un aumento di 1 %, cioè il valor massimo può arrivare a 2,902.

Ora mi piace mettere in evidenza il notevole accordo fra questo valore — 2,873 — stabilito dal Comitato internazionale e quello risultato dalle mie esperienze, che è compreso

tra 2,871 e 2,868

alla temperatura 20° C e che si riferisce ad alluminio al 99,7 %.

Digitized by Google

Dove sembra apparire una certa discordanza fra i miei risultati e quelli del Comitato internazionale, è nel valore del coefficiente di temperatura, che il Comitato pone eguale a 0,0040, mentre io trovo valori notevolmente più grandi.

A questo riguardo però bisogna osservare che il Comitato considera come temperatura di regime quella di 20° C e a quella si riferisce il valore della resistività. È quindi da ritenere che anche il valore 0,004 del coefficiente di temperatura si riferisca alla medesima temperatura di 20° C. Allora la differenza dal valore da me trovato è molto piccola, perchè io trovai 0,003934 come coefficiente di temperatura per l'Alluminio a 99,7%.

Nello stesso tempo io trovai che per Alluminio meno puro il coefficiente di temperatura a 20° C diminuisce; per esempio fino a 0,00386 per Alluminio al 98,3%. Viceversa si deve ritenere che per Al. molto puro, oltre il 99,7% il coefficiente di temperatura deve salire oltre 0,003934; cosicchè questo valore risultante dalle mie misure si deve ritenere in perfètto accordo con quello stabilito dal Comitato.

Si può anche osservare che questa piccola differenza in pratica non ha importanza notevole e può essere comodo adottare la cifra semplice 4, in luogo di 3,93...

In epoca posteriore alla riunione del detto Comitato furono eseguite numerose misure di resistività dell'Alluminio, negli Stati Uniti e in Germania.

Negli Stati Uniti il *Bureau of Standards* di Washington ha raccolto i risultati delle misure fatte dalla *Aluminium Company* sui prodotti di un mese, cioè su fili di Alluminio crudo, di dimensioni varie, da 1,68 a 4,78 mm. di diametro. Il numero totale di misure fu 3927; il risultato:

Resistività a 20° C; valor medio = 2,818
„ minimo = 2,794
„ massimo = 2,845.

È noto che la Aluminium Company d'America produce un metallo molto puro, dove la proporzione dell'Al. supera il 99,7%, mentre l'Alluminio da me sperimentato, fornitomi dal *Bureau of Standards* circa 7 anni fa, aveva il titolo 99,66% e bastano piccolissime differenze, di qualche millesimo soltanto, per dar

Digitized by Google

luogo a sensibili differenze nella resistività, e precisamente nel senso che aumentando la purezza diminuisce la resistività. Resta così spiegata e giustificata la piccola differenza fra i risultati delle mie misure e di quelle americane.

Non bisogna dimenticare che quando si parla di resistività dell'Al. si dovrebbe intendere di Al. puro, ma in realtà si tratta sempre di Al. che contiene qualche impurità. Nel caso attuale le impurità possono giungere al 3 per mille, ma devono ritenersi in generale un po' minori.

Le stesse considerazioni si possono estendere al confronto fra le mie misure e quelle del *Reichsanstalt* di Berlino, che appunto nello scorso marzo 1929 eseguì numerose prove su fili di Al. crudo di diametro da 2,5 a 3 mm. I risultati si posson riassumere così:

Resistività a 20° C; valor medio = 2,843
„ minimo = 2,815
„ massimo = 2,880.

Posso adunque concludere affermando che tanto le deliberazioni del Comitato internazionale di studio dell'Alluminio, quanto le numerose misure eseguite negli Stati Uniti d'America e dal Reichsanstalt di Berlino hanno confermato i risultati delle mie esperienze delle quali diedi comunicazione a questa Accademia fin dal gennaio 1923.

S'intende che certe differenze osservate nei valori della resistività saranno probabilmente da attribuire, non soltanto al vario tenore di Alluminio puro, ma anche al processo di preparazione; poichè l'azione meccanica, a cui viene assoggettato il metallo per ridurlo in fili, di diametri diversi, influisce non soltanto sulla resistenza meccanica, ma anche sulla resistività. Mancano per ora i dati sperimentali che sarebbero necessari per riconoscere e scindere gli effetti dovuti alle diverse cause.

Digitized by Google

Sulle funzioni tayloriane.

Nota di VINCENZO MARSEGUERRA (Reggio di Calabria)
presentata dal Socio nazionale residente Giuseppe Peano.

1. — Data una funzione $f(x)$ in un intervallo (a, b), che ammette in (a, b) derivate di qualsivoglia ordine, il CIPOLLA [1] chiama la *funzione $f(x)$ tayloriana in (a, b)* se essa non ha, in questo intervallo, alcun zero comune con tutte le sue derivate.

In questa Nota mi propongo di dare qualche proprietà delle funzioni tayloriane, di estendere qualche teorema del CIPOLLA e di dimostrare che le serie di potenze e le funzioni sviluppabili in serie di TAYLOR sono funzioni tayloriane.

2. — **Teorema.** *Se una funzione $f(x)$, che ammette in un intervallo (a, b) derivate di qualsivoglia ordine, ha infiniti zeri nell'intorno di un punto λ di (a, b), le sue derivate hanno pure infiniti zeri in quest'intorno e la funzione e le sue derivate hanno uno zero comune in questo punto.*

Sia X l'insieme degli zeri di $f(x)$ in un intorno J di λ. Siccome *l'insieme degli zeri di una funzione continua è un insieme chiuso* e λ è un punto limite di X si ha intanto $f(\lambda) = 0$.

Osserviamo che in uno degli intorni a destra o a sinistra di λ o in tutti e due cadono infiniti punti di X. Supponiamo ad es. che nell'intorno J' a sinistra di λ cadano infiniti punti di X e che sia x_1 uno di questi punti. Abbiamo, per la formula di TAYLOR:

$$f(x_1) - f(\lambda) = (x_1 - \lambda) f'(\xi_1) ; \quad x_1 < \xi_1 < \lambda.$$

[1] M. CIPOLLA, *Analisi algebrica*, 2ª edizione, pag. 356, art. 233 (Capozzi, Palermo).

Digitized by Google

E siccome $f(x_1) = f(\lambda) = 0$ risulta: $f'(\xi_1) = 0$.

Prendiamo ora un punto x_2 di X tale che $\xi_1 \leq x_2 < \lambda$; abbiamo:

$$f(x_2) - f(\lambda) = (x_2 - \lambda) f'(\xi_2) \; ; \quad x_2 < \xi_2 < \lambda.$$

e quindi:

$$f'(\xi_2) = 0.$$

Procedendo in modo analogo si dimostra che esistono infiniti punti di J': $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m, \ldots$ in cui si ha:

$$f'(\xi_m) = 0.$$

Questi punti hanno evidentemente per punto limite λ e siccome l'insieme degli zeri di $f'(x)$ è chiuso, segue che:

$$f'(\lambda) = 0.$$

Dunque, *se una funzione $f(x)$ ha infiniti zeri nell'intorno di un punto λ, la derivata prima ha pure infiniti zeri in quest'intorno e, inoltre, la funzione e la sua derivata hanno uno zero comune in questo punto.*

Applicando questo teorema ripetutamente alla derivata prima di $f(x)$, alla derivata seconda, ecc., si perviene alla dimostrazione del teorema enunciato.

3. — Segue l'importante teorema di CIPOLLA [1]:

Teorema. *Una funzione tayloriana in un intervallo non può avere in questo intervallo quanti si vogliano zeri.*

E infatti se una funzione in un intervallo ha infiniti zeri, detto λ un punto limite di questi zeri, per il teorema dimostrato, λ sarebbe uno zero comune alla funzione e alle sue derivate e perciò la funzione non sarebbe tayloriana.

4. Segue anche il

Teorema. *Se una funzione $f(x)$, che ammette in un inter-*

---

[1] M. CIPOLLA, *Op. cit.*

Digitized by Google

vallo (a, b) derivate di qualsivoglia ordine, ha in un punto λ di (a, b) uno zero multiplo di ordine r, le sue derivate $f'(x), f''(x), \ldots f^{(r)}(x)$ hanno nell'intorno di λ un numero finito di zeri.

Infatti nel punto λ si ha:

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \ldots = f^{(r-1)}(\lambda) = 0\,, \quad f^{(r)}(\lambda) \neq 0\,,$$

e se, ad es., la funzione $f^{(s)}(x)$, con $s \leq r$ avesse nell'intorno di λ un numero infinito di zeri le derivate $f^{(s+1)}(x)$, $f^{(s+2)}(x), \ldots f^{(r)}(x) \ldots$ avrebbero pure nell'intorno di λ un numero infinito di zeri e risulterebbe $f^{(s)}(\lambda) = f^{(s+1)}(\lambda) = \ldots = f^{(r)}(\lambda) = 0$ contro il supposto; dunque la funzione $f^{(s)}(x)$ ha, nell'intorno di λ, un numero finito di zeri.

5. — Per il teorema di CIPOLLA (art. 3) le funzioni tayloriane sono funzioni che hanno, in qualunque intervallo finito, un numero finito di zeri. Non tutte queste funzioni sono tayloriane, ciò dipende dal modo di comportarsi delle funzioni nell'intorno degli zeri. Può essere utile il criterio seguente:

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x)$, che ammetta in un intervallo (a, b) derivate di qualsivoglia ordine e che abbia in (a, b) un numero finito di zeri, sia tayloriana in questo intervallo, è che, nell'intorno di ogni zero λ, diventi infinitesima di un certo ordine r-esimo (con r numero naturale) rispetto ad $(x - \lambda)$.*

La condizione è necessaria. Infatti se $f(x)$ è tayloriana in (a, b) e se λ è uno zero di $f(x)$ di ordine r, si ha:

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \ldots = f^{(r-1)}(\lambda) = 0\,, \quad f^{(r)}(\lambda) \neq 0$$

e risulta, per il teorema di L'HOSPITAL:

$$\text{per } s < r \quad \lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^s} = \lim_{x,\lambda} \frac{f^{(s)}(x)}{s!} = \frac{f^{(s)}(\lambda)}{s!} = 0\,;$$

$$\text{per } s = r \quad \lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^r} = \lim_{x,\lambda} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} = \frac{f^{(r)}(\lambda)}{r!} \neq 0\,;$$

e quindi $f(x)$ è infinitesima di ordine r rispetto ad $(x - \lambda)$.

Digitized by Google

La condizione è anche sufficiente. Infatti se per ogni zero λ esiste un numero naturale r tale che:

$$\lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^r} = k \quad \text{con} \quad k \neq 0 ,$$

risulta:

$$per \quad s < r \quad \lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^s} = \lim_{x,\lambda} \left\{ \frac{f(x)}{(x-\lambda)^r} (x-\lambda)^{r-s} \right\} = 0 ;$$

e siccome

$$per \quad s \leq r \qquad \lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^s} = \frac{f^{(s)}(\lambda)}{s!}$$

abbiamo:

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \ldots = f^{(r-1)}(\lambda) = 0 , \quad f^{(r)}(\lambda) = k \,.\, r\,! \neq 0 .$$

La funzione $f(x)$ è dunque tayloriana in (a, b).

6. — Come applicazione di questo teorema osserviamo che la funzione $f(x)$, considerata da CAUCHY, che si può definire, in un intervallo che comprende il punto zero, ponendo:

$$per \; x = 0 \qquad f(0) = 0 ;$$

$$per \; x \neq 0 \qquad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

non è tayloriana nell'intervallo considerato.

Infatti si ha, per la regola di L'HOSPITAL [1]:

$$\lim_{x,0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \lim_{x,0} \frac{x^{-n}}{e^{x^2}} = \lim_{x,0} \frac{n x^{-n-2}}{2 \,.\, e^{x^2}} .$$

---

[1] DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Vol. I, Parte I, pag. 128, art. 93 (Nistri, Pisa).

Digitized by Google

Segue:

$$\textit{per } n \textit{ dispari} \quad \lim_{x,0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \lim_{x,0} \frac{n\,(n-2)\,(n-4)\ldots 1\,.\,x}{2^{\frac{n-1}{2}}\, e^{\frac{1}{x^2}}} = 0;$$

$$\textit{per } n \textit{ pari} \quad \lim_{x,0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \lim_{x,0} \frac{n\,(n-2)\,(n-4)\ldots 2}{2^{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{1}{x^2}}} = 0;$$

e quindi in ogni caso:

$$\lim_{x,0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0\,.$$

La funzione di CAUCHY per $x = 0$ diventa infinitesima di ordine superiore ad n, qualunque sia n, e quindi non è funzione tayloriana in qualunque intervallo (a, b) che comprenda il punto *zero*.

Come è noto e come si può ricavare dalle considerazioni precedenti per la funzione di CAUCHY si ha per $x = 0$:

$$f(0) = f'(0) \ldots\ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 0.$$

7. — Passiamo ora a ricercare una classe importante di funzioni tayloriane. Abbiamo il

Teorema. *Una serie di potenze, non identicamente nulla, è una funzione tayloriana in ogni intervallo finito interno all'intervallo di convergenza.*

Sia data la serie di potenze:

$$\sum_0^\infty a_k\,(x - x_0)^k$$

e sia $(x_0 - \rho\,,\ x_0 + \rho)$ l'intervallo di convergenza. Indichiamo con $f(x)$ la somma della serie in un intervallo finito (a, b), interno a $(x_0 + \rho,\ x_0 - \rho)$. Possiamo scrivere, per $a \leq x \leq b$:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_k\, a_k\,(x - x_0)^k\,;$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,\sum_0^\infty{}_k\, a_{n+k}\,(x - x_0)^k \quad (n = 1, 2, \ldots\ldots).$$

Digitized by Google

Ammettiamo che la funzione $f(x)$ non sia tayloriana in (a, b), cioè ammettiamo che esista qualche punto λ di (a, b) tale che:

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = f''(\lambda) = \ldots = f^{(n)}(\lambda) = \ldots = 0.$$

Per le proprietà delle serie di potenze si ricava subito che si ha anche:

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = \ldots = 0.$$

Inoltre:

$$f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots\ldots);$$

quindi:

$$a_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots\ldots).$$

Resta così dimostrato che la serie data, nell'ipotesi che $f(x)$ non sia tayloriana in (a, b), è identicamente nulla. Dunque se la serie non è identicamente nulla in (a, b) la somma della serie $f(x)$ è tayloriana in (a, b) (1).

8. — Dal teorema dimostrato segue l'altro:

Teorema. *Una funzione, non nulla, sviluppabile in serie di* Taylor *in un dato intervallo, è una funzione tayloriana (nel senso di* Cipolla).

Questo teorema si può enunciare nel modo seguente:

Condizione necessaria che una funzione non nulla sia sviluppabile in serie di Taylor, *in un dato intervallo, è che la funzione sia tayloriana in questo intervallo.*

Osserviamo che *la condizione non è sufficiente.* Infatti, ad es., se $f(x)$ è la somma di una serie di potenze convergente in un certo intervallo, la funzione

$$\varphi(x) = f(x) + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

(1) Osserviamo che resta anche dimostrato il

Teorema. *Se due serie di potenze hanno per somme due funzioni tali che in un punto, dell'intervallo comune di convergenza, esse e tutte le loro derivate sono ordinatamente uguali, le somme delle serie sono uguali in tutto l'intervallo comune.*

Digitized by Google

ove $e^{-\frac{1}{x^2}}$ per $x = 0$ abbia il valore 0, è una funzione tayloriana in qualunque intervallo interno all'intervallo di convergenza della serie, non sviluppabile in serie di TAYLOR in intervalli che comprendono il punto zero.

9. — Dal teorema precedente segue l'altro:

Teorema. *La somma, la differenza, il prodotto di funzioni sviluppabili in serie di* TAYLOR *in un dato intervallo sono funzioni tayloriane in questo intervallo.*

Il quoziente di due funzioni sviluppabili in serie di TAYLOR *in un dato intervallo, in cui la funzione divisore non ha zeri, è funzione tayloriana nell'intervallo comune agli intervalli in cui sono sviluppabili la funzione dividendo e la reciproca della funzione divisore.*

Ad es., la funzione $\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ è funzione tayloriana in qualunque intervallo interno all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

10. — Il CIPOLLA [1] dimostra il teorema seguente:

Teorema. *Se $f(x)$ è una funzione tayloriana in (a, b) ed ha nel punto λ di (a, b) uno zero r-uplo, esiste una ed una sola funzione $\varphi(x)$, tayloriana in (a, b), tale che sia*

$$f(x) = (x - \lambda)^r \varphi(x)$$

e tale che ogni zero di $f(x)$, diverso da λ, sia zero di $\varphi(x)$ di uguale multiplicità e viceversa.

Modifichiamo la dimostrazione che diede il CIPOLLA nel modo che segue:

Definiamo la funzione $\varphi(x)$ ponendo in (a, b):

$$\text{per} \quad x \neq \lambda \qquad \varphi(x) = \frac{f(x)}{(x - \lambda)^r};$$

$$\text{per} \quad x = \lambda \qquad \varphi(\lambda) = \frac{f^{(r)}(\lambda)}{r!}.$$

---

[1] M. CIPOLLA, *Op. cit.*, pag. 357, art. 233; 2.

Digitized by Google

Dimostriamo che la funzione $\varphi(x)$ è continua anche per $x = \lambda$. Infatti, per il teorema di L'Hospital, si ottiene:

$$\lim_{x,\lambda} \frac{f(x)}{(x-\lambda)^r} = \lim_{x,\lambda} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} = \frac{f^{(r)}(\lambda)}{r!}.$$

Dimostriamo ora che la funzione $\varphi(x)$ è tayloriana in (a, b) e facciamo prima vedere che $\varphi(x)$ ha in (a, b) derivate di qualunque ordine n.

Si ha intanto, per $x \neq \lambda$:

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_0^n{}_k \binom{n}{k} D^k \left[\frac{1}{(x-\lambda)^r}\right] f^{(n-k)}(x) =$$

$$= \sum_0^n{}_k (-1)^k k! \binom{n}{k} \binom{r+k-1}{k} \frac{f^{(n-k)}(x)}{(x-\lambda)^{r+k}} =$$

$$= \frac{\sum_0^n{}_k (-1)^k k! \binom{n}{k} \binom{r+k-1}{k} f^{(n-k)}(x) (x-\lambda)^{n-k}}{(x-\lambda)^{r+n}}.$$

E ponendo:

$$f_n(x) = \sum_0^n{}_k (-1)^k k! \binom{n}{k} \binom{r+k-1}{k} f^{(n-k)}(x) (x-\lambda)^{n-k},$$

si ottiene, sempre per $x \neq \lambda$:

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{f_n(x)}{(x-\lambda)^{r+n}}.$$

Per dimostrare che $\varphi^{(n)}(x)$ ammette la derivata anche per $x = \lambda$ consideriamo la derivata di $f_n(x)$ di ordine t; abbiamo:

$$f_n^{(t)}(x) = \sum_0^n{}_k (-1)^k k! \binom{n}{k} \binom{r+k-1}{k} D^t [f^{(n-k)}(x) (x-\lambda)^{n-k}] =$$

$$= \sum_0^n{}_k (-1)^k k! \binom{n}{k} \binom{r+k-1}{k} \cdot$$

$$\sum_0^t{}_p \binom{t}{p} f^{(n-k+t-p)}(x) \left\{ p! \binom{n-k}{p} (x-\lambda)^{n-k-p} \right\},$$

Digitized by Google

con la convenzione che sia:

$$\left\{ p!\binom{n-k}{p}(x-\lambda)^{n-k-p} \right\} = 0 \qquad \text{per} \quad n-k-p<0\,.$$

Se poniamo ora $x=\lambda$, il fattore $p!\binom{n-k}{p}(x-\lambda)^{n-k-p}$ è nullo per i valori di p, tali che $n-k-p \neq 0$ ed è uguale a $(n-k)!$ per $n-k-p=0$; quindi risulta:

$$f_n^{(t)}(\lambda) = n!\sum_0^n{}_k (-1)^k \binom{r+k-1}{k}\binom{t}{n-k} f^{(t)}(\lambda)\,.$$

Ma si ha [1]:

$$\sum_0^n{}_k (-1)^k \binom{r+k-1}{k}\binom{t}{n-k} = \binom{t-r}{n};$$

quindi:

$$f_n^{(t)}(\lambda) = n!\binom{t-r}{n} f^{(t)}(\lambda)\,.$$

È facile ora vedere che $f_n(x)$ ha nel punto λ uno zero almeno di ordine $r+n$. Infatti si ha:

$$\text{per} \quad t<n+r \qquad f_n^{(t)}(\lambda)=0\,,$$

$$\text{per} \quad t=n+r \qquad f_n^{(t)}(\lambda) = n!\,f^{(r+n)}(\lambda)\,.$$

Ciò posto, per il teorema di L'Hospital, si ottiene:

$$\lim_{x,\lambda}\varphi^{(n)}(x) = \lim_{x,\lambda}\frac{f_n(x)}{(x-\lambda)^{r+n}} = \lim_{x,\lambda}\frac{f_n^{(n+r)}(x)}{(r+n)!} = \frac{n!\,f^{(r+n)}(\lambda)}{(r+n)!}\,,$$

e quindi $\varphi(x)$ ammette anche nel punto λ derivate di qualunque ordine.

Si dimostra, infine, facilmente che ogni zero di $f(x)$, diverso

---

[1] V. Marseguerra, "Giornale di Matem. e Fis. della Scuola Media", a. II, n. 7-8.

Digitized by Google

da λ, è zero di $\varphi(x)$ di uguale multiplicità e viceversa. La funzione $\varphi(x)$ è dunque tayloriana in (a, b) come $f(x)$.

11. — A conferma, naturalmente non necessaria, di questo teorema facciamo l'osservazione seguente:

Se $f(x)$ è sviluppabile in serie di potenze, siccome si ha:

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \ldots\ldots = f^{(r-1)}(\lambda) = 0\,; \quad f^{(r)}(\lambda) \neq 0\,,$$

risulta, per tutti i punti di un intorno conveniente di λ:

$$f(x) = (x-\lambda)^r \sum_0^\infty{}_k \frac{f^{(r+k)}(\lambda)}{(r+k)!}(x-\lambda)^k$$

e quindi:

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty{}_k \frac{f^{(r+k)}(\lambda)}{(r+k)!}(x-\lambda)^k\,.$$

Risulta inoltre:

$$\varphi^{(n)}(x) = n! \sum_0^\infty{}_k \binom{n+k}{n} \frac{f^{(r+n+k)}(\lambda)}{(r+n+k)!}(x-\lambda)^k$$

e quindi:

$$\varphi^{(n)}(\lambda) = \frac{n!\, f^{(r+n)}(\lambda)}{(r+n)!}\,.$$

12. — Il Cipolla [1] inoltre dimostra il

Teorema. — *Se $f(x)$ e $f'(x)$ sono tayloriane in (a, b) ed $f(x)$ ha uno zero nel punto λ di (a, b), allora esiste in (a, b) un intorno a destra di λ (se $\lambda < b$) in ogni punto del quale $f(x)$. $f'(x)$ hanno lo stesso segno, ed esiste un intorno a sinistra di λ (se $a > \lambda$) in ogni punto del quale $f(x)$, $f'(x)$ hanno segno contrario.*

Osserviamo che *questo teorema sussiste anche quando si toglie la condizione che anche $f'(x)$ sia tayloriana.* Infatti per il teorema dell'art. 4 la funzione $f'(x)$ in un intorno di λ ammette un nu-

---

[1] M. Cipolla, *Op. cit*, pag. 360, art. 235.

Digitized by Google

mero limitato di zeri e quindi si può determinare un intorno J di λ in cui $f(x)$ e $f'(x)$ non hanno zeri distinti da λ. Ciò posto, per dimostrare il teorema basta ripetere la dimostrazione del CIPOLLA.

13. — Più in generale sussiste il

Teorema. *Se $f(x)$ è una funzione tayloriana in (a, b) ed $f(x)$ ha uno zero nel punto λ di (a, b) r-uplo, esiste un intorno a destra di λ (se $\lambda < b$) in ogni punto del quale $f(x)$ ha il segno di $f^{(s)}(x)$ con $s \leq r$ ed un intorno a sinistra di λ (se $\lambda > a$) in ogni punto del quale $f(x)$ ha il segno di $f^{(s)}(x)$ o l'opposto, secondo che s è pari o dispari.*

Intanto, per il teorema ora ricordato dell'art. 4, la funzione $f^{(s)}(x)$ in un intorno di λ ammette un numero limitato di zeri e quindi si può determinare un intorno J di λ in cui $f(x)$ e $f^{(s)}(x)$ non hanno zeri distinti da λ.

Se x è un punto di J, diverso da λ, si ha:

$$f(x) = \frac{(x-\lambda)^s}{s!} f^{(s)}(\xi)$$

con ξ compreso fra x e λ e quindi:

se $x > \lambda$ risulta:

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f^{(s)}(\xi) = \operatorname{sign} f^{(s)}(x);$$

se $x < \lambda$ risulta:

$$\operatorname{sign} f(x) = (-1)^s \operatorname{sign} f^{(s)}(\xi) = (-1)^s \operatorname{sign} f^{(s)}(x).$$

14. — Il teorema di ROLLE può allora essere enunciato nel modo seguente:

Teorema. *Due zeri consecutivi di una funzione tayloriana in (a, b) ne comprendono un numero dispari della funzione derivata $(2s+1)$-esima, se gli zeri della funzione sono almeno di ordine $(2s+1)$ e se questa derivata è pure tayloriana nell'intervallo degli zeri.*

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Maggio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, SACCO, POCHETTINO e il Segretario REPOSSI.

Scusa la sua assenza il Socio D'OVIDIO.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio SOMIGLIANA, a nome dell'onor. Gr. Uff. Francesco SOMAINI, presenta in omaggio all'Accademia un esemplare della medaglia coniata a Como in occasione dell'inaugurazione del Tempio voltiano donato dal Somaini stesso alla città natale del Grande Fisico. Egli presenta inoltre in omaggio all'Accademia una copia del *IX Bollettino del Comitato Glaciologico italiano,* di cui è Presidente, e ne illustra brevemente il contenuto, riassumendo in particolar modo i risultati dello studio sintetico del Dott. U. MONTERIN sullo stato attuale dei ghiacciai italiani, tutti in fase di ritiro.

Il Presidente ringrazia vivamente il Socio SOMIGLIANA, riservandosi di inviare direttamente i ringraziamenti dell'Accademia all'onor. SOMAINI.

Digitized by Google

Il Socio Sacco offre all'Accademia una copia delle sue *Note biografiche* del compianto Prof. Alessandro Roccati.

Il Presidente presenta in seguito i seguenti omaggi giunti all'Accademia:

Saggio bio-bibliografico degli Scienziati della Lunigiana, pubblicato dal Comune della Spezia per la I Esposizione Nazionale di Storia della Scienza in Firenze ed inviato dall'ill.mo Podestà della Spezia Conte Generale Saverio Nasalli-Rocca;

Il Museo di Storia naturale e la Facoltà di Scienze fisiche e naturali, opera postuma di Ugo Schiff, pubblicata a cura del Prof. Mario Betti;

Dichiarazione circa le formole naturali per la densità e pressione negli astri, di Enrico De Chaurand.

Il Presidente in seguito si dice lieto di presentare, come dono e omaggio alla R. Accademia per parte del sig. Senatore Conte Eugenio Rebaudengo e perchè sia conservata nell'Archivio dei documenti manoscritti, la corrispondenza epistolare che l'insigne geologo, Sen. Prof. Angelo Sismonda, Suo Nonno venerato, ebbe con illustri geologi e con altre personalità. " Della ricca e preziosa raccolta di lettere, per citare qualche nome, ricorda la corrispondenza, da Berna, con Studer dal 1838 al 1870, da Lione con Fournet (1838-68), le lettere con De-la-Béche, Charpentier, Blainville, Di Saluzzo, Bobbage, Lyell, Macedonio Melloni, le numerose lettere di Matteucci (1842-1868), di Élie de Beaumont (1834-1874), Paolo Savi (1838-1872), di Giacinto Collegno (1837-1851) e qualcuna di Giovanni Plana, congiunto dei Sismonda.

" Basta ricordare questi nomi per segnalare l'importanza del dono e quale fosse la meritata fama di Angelo Sismonda, che appartenne all'Accademia dal 1835 al 1878, e che ne fu Tesoriere e Direttore di Classe. Egli fu Socio contemporaneamente al fratello Eugenio (dal 1843 al 1870), che tenne la carica di Segretario Perpetuo e che illustrò pure il suo nome con lavori

Digitized by Google

classici, fondamentali per la Paleontologia piemontese: degni fratelli, valenti scienziati, che giustamente Torino onorò dedicando al loro nome una Via della Città. Il prof. Angelo Sismonda fu veramente benemerito della Geologia piemontese poichè il suo nome è legato alla pubblicazione avvenuta nel 1862, della *Carta Geologica degli Stati Sardi*, una delle prime Carte regionali comparse, e che ha ancora valore scientifico, anche come espressione grafica di certe concezioni del Sismonda sull'età delle diverse formazioni principali delle Alpi occidentali, che studi più recenti hanno vagliato nella loro importanza e rimessi in parte in valore. Ma il nome del Sismonda è ben noto anche fuori del campo strettamente geologico, per la parte di primaria importanza, ch'Egli ebbe negli studi preparatori alla grande impresa della Galleria del Fréjus, concretati in un profilo geologico del tracciato della Galleria, che i lavori dimostrarono corrispondente al vero. Nel 1922 il compianto Prof. Roccati, a commemorare le nozze d'argento di due pronipoti di Angelo Sismonda, pubblicò un volumetto, per iniziativa della N. D. Emilia Fornaris-Rebaudengo, e con prefazione del nostro Consocio Sen. Vittorio Cian, diretto a far conoscere e illustrare in buona parte l'epistolario, che ora viene ad arricchire il nostro Archivio; ma ho motivo per credere, dice il Presidente, che l'epistolario stesso può offrire altro interessante materiale di ricerche agli studiosi del tempo, che A. Sismonda e i suoi illustri corrispondenti onorarono con la loro attività scientifica. Uno dei più apprezzati ornamenti del nostro Museo Geologico è un espressivo busto marmoreo di Angelo Sismonda, dono generoso del nipote affezionatissimo Sen. Conte Rebaudengo. Ora egli rende un nuovo omaggio alla venerata memoria del suo Avo illustre donando alla R. Accademia una ricca serie di lettere, nella quale sta la più convincente prova dell'alta considerazione che godeva A. Sismonda nel mondo degli scienziati e dei dotti.

" Sono sicuro di interpretare il desiderio dei Colleghi rinno-

Digitized by Google

vando ora anche a nome loro, i più vivi ringraziamenti al Sen. Conte Rebaudengo per il prezioso e generoso dono, che sarà gelosamente conservato nell'Archivio nostro, come lo era dai nipoti, a memoria dell'illustre nostro Socio ed a vantaggio degli studiosi „.

Il Presidente presenta inoltre la fotografia di una pregevole stampa col ritratto del fondatore della R. Accademia, Re Vittorio Amedeo III, ottenuta per cortese interessamento del Socio Mattirolo.

Passando in seduta privata, presenti tutti i Soci sunnominati, si procede alla votazione per la nomina di un delegato di Classe nel Consiglio d'Amministrazione, in sostituzione del Socio Guidi trasferito a Roma. Risulta eletto il Socio Pochettino, con voti 8 su nove votanti.

Digitized by Google

PREMIO DI FONDAZIONE GAUTIERI

Storia (1925-1927)

Onorevoli Colleghi,

La Commissione incaricata di riferire intorno al Premio Gautieri (triennio 1925-27) ha preso atto che si erano presentati al Concorso, con le opere che saranno in seguito esaminate, i signori professori Gennaro Maria Monti, Luigi Pareti, Nello Rosselli, Pietro Silva.

La Commissione, esaminando poi la produzione scientifica del triennio ha creduto, come era in sua facoltà, di prendere in considerazione, in aggiunta a quelli presentati al Concorso dagli autori, due opere pubblicate dal prof. A. C. Jemolo durante il triennio.

In Gennaro Maria Monti (*Due grandi riformatori del '700, A. Genovese e G. M. Galanti*, 1926; *Dal Duecento al Settecento*, 1925; *Le Confraternite medievali dell'alta e media Italia*, 1927; *Istituzioni ed associazioni romane in Italia ed in Francia durante l'alto medio evo*, 1927; *Sparano da Bari*, 1927; *La marina mercantile ed il commercio marittimo napoletano nel secondo periodo borbonico*, 1927; *Il monastero benedettino di Santa Maria ad Agnone in Napoli*, 1925; ecc.) è notevole e anche lodevole una instancabile attività, che lo ha spinto ad indagare tutti gli aspetti della cultura italiana, non solo nel campo della giurisprudenza ma anche in quello delle lettere. La sua produzione scientifica, può forse perfino considerarsi come esuberante. Poichè, se i suoi lavori

Digitized by Google

sono inappuntabili per la larga informazione, per la conoscenza diretta delle fonti, e per la copia dei risultati, lasciano però ancora alquanto a desiderare per la fermezza della costruzione. Il che si rileva sopratutto nei lavori, nei quali egli ha affrontata la storia, non solo più della letteratura giuridica o della giurisprudenza, ma di alcuni particolari istituti. Il più importante de' suoi libri, quello relativo alle *Confraternite medioevali italiane,* ch'è certo un prezioso contributo espositivo delle origini e dello sviluppo di tali singolari forme della vita religiosa e anche civile italiana, non ci dà però una discriminazione così netta dei varî tipi di Confraternite e una determinazione così completa ed esatta dei loro rapporti con le altre istituzioni ecclesiastiche e civili, come forse si sarebbe potuto desiderare. Ad ogni modo, il giovine autore è meritevole di sincero encomio e d'ogni migliore incoraggiamento.

Il prof. Luigi Pareti, stabile di Storia antica nella R. Università di Firenze, già noto per altri lavori pregevoli per acume critico e dimostranti larga cultura nel campo della Antichità classica, ha entro questo triennio pubblicato un volume dal titolo: *Le origini etrusche*: 1° Le leggende e i dati della scienza (Pubblicazioni della R. Università di Firenze, Sez. di Filologia e Filosofia, N. S., vol. IX), Firenze, Bemporad, 1926. Il volume è diviso in due parti; la prima concernente le leggende sulle origini etrusche; la seconda le origini etrusche in relazione coi dati della archeologia, della filologia e della storia. La prima parte è un vero modello di esame critico di un complesso di tradizioni. L'autore non studia queste tradizioni isolatamente, ma le mette in relazione per saggiarne il valore con le altre pervenuteci nelle stesse condizioni e per mezzo delle stesse fonti. Gli riesce così assai facile il dimostrare che le narrazioni di Erodoto e d'Ellanico e dei loro successori, al pari d'altre tradizioni tramandateci dalle stesse fonti con la stessa sicurezza e con varianti più o meno analoghe, non sono tradizioni vere, ma congetture più o meno arbitrarie di scrittori greci, i quali dànno per sicuro ciò che è induzione loro o dei loro coetanei, su dati assai incerti di toponomastica, su somiglianze più o

Digitized by Google

meno bene osservate di costumi, su genealogie più o meno arbitrarie e fantastiche. Ad esse si contrappone nettamente la tradizione indigena che può con sufficiente certezza ricostruirsi pure attraverso le alterazioni degli eruditi greci e latini che ce l'hanno trasmessa. Questa tradizione muove dalla autoctonia del popolo etrusco nella Toscana. Essa certamente non ha per sè maggior valore delle tradizioni che consideravano come autoctoni i Greci in Arcadia o nell'Attica, ma ci dimostra ad ogni modo, che gli Etruschi non conservavano alcun preciso ricordo della loro pretesa migrazione per mare dall'Oriente e si concilia assai bene con la ipotesi della loro migrazione antichissima nella regione alpina e della formazione progressiva della loro civiltà in Italia. Studia poi il Pareti accuratamente gli argomenti linguistici, storici, archeologici e culturali, che sono stati addotti a conferma della provenienza orientale degli Etruschi. La sua analisi non convincerà certamente tutti, ma tutti dovranno riconoscerne l'acutezza e il rigore metodico, seppure qualche riserva è giusto forse fare per la parte linguistica. Segue nella seconda parte del volume, un tentativo di dimostrazione della tesi che gli Etruschi giunsero nella Toscana dall'Italia settentrionale, e che essi vi pervennero portando con sè la civiltà cosiddetta Villanoviana. La tesi non è nuova ma è precisata in vari punti di notevole rilievo ed è avvalorata mediante una disamina accuratissima di tutti i dati e in particolare di quelli forniti dalle nuove scoperte archeologiche. Se anche non tutti converranno che il problema etrusco sia qui risoluto, tutti apprezzeranno lo studio sagace delle civiltà preistoriche che si svolsero nell'Italia settentrionale e centrale. In ciò, come nella analisi fatta con mirabile sagacia dei dati tradizionali, sta il guadagno positivo che il libro del Pareti reca alla scienza, guadagno del quale dovranno tener conto anche quelli che non accettino la sua tesi fondamentale.

Nello Rosselli esordisce negli studi storici con un bel volume su *Mazzini e Bakounine* (Torino, Bocca, 1927), attorno al cui drammatico duello, fatalmente concluso con la sconfitta delle idealità più elevate religiose-morali e col trionfo delle più torbide

Digitized by Google

eccitazioni sociali, ha raggruppato la storia di 12 anni (1860-1872) gravidi di destino pel movimento operaio in Italia.

Al tema felicemente scelto s'è accinto l'A. con solida preparazione, con vaste indagini in Italia e all'estero: n'è uscita una monografia ben disegnata, ben scritta con grande freschezza di lingua, che a parte inevitabili divergenze di apprezzamenti politico-religiosi ha reale valore storico. Merita dunque il più largo favore — considerando la scarsezza di studi scientificamente condotti sul movimento italiano operaio dell'Ottocento — e costituisce una splendida promessa pe' futuri lavori, co' quali l'A. si prefigge di " riprendere il filo della narrazione per condurla almeno fino alle soglie del secolo ventesimo „.

Pietro Silva s'è presentato al concorso con tre pubblicazioni: un profilo, della collezione Formiggini, su Napoleone I; uno studio, comparso nella " N. Rivista storica „, *sulla politica di Napoleone III in Italia;* un volume (Mondadori) sul *Mediterraneo dall'unità di Roma all'unità d'Italia.*

La figura di Napoleone I, tratteggiata con vigore, attesta le qualità eccellenti, espositive e sintetiche, dell'A.; ma condotto com'è sulla scorta delle maggiori opere della letteratura napoleonica, specialmente del Vandal e del Sorel, il lavoro nulla può recare d'originale, e rientra nel numero delle buone lezioni universitarie, o se vuolsi delle brillanti conferenze divulgative.

Lo studio sulla politica italiana di Napoleone III, se a ragione reagisce contro apologetiche esagerazioni, incorre d'altra parte a sua volta in apriorismi, non tenendo conto abbastanza che l'azione personale del Sovrano era sempre vincolata ai doveri e alle necessità imperiose di conservazione della dinastia, alle costanti direttive della politica francese.

Al volume su *Il Mediterraneo dall'unità di Roma all'unità d'Italia* (1927) fa d'uopo tributare lode per la scelta dell'argomento, la larghezza critica delle ricerche, la quale ha consentito all'autore di illuminare vivamente e rigorosamente l'importanza del grande mare interno attraverso a due millenni di storia, per la eloquente sobrietà, che gli ha consentito di sintetizzare un così ampio seguito di avvenimenti memorandi attorno al perno cen-

Digitized by Google

trale da lui scelto. L'A. non vuole discutere, ad imitazione del Mahan, il problema se ed in che misura il dominio del mare abbia dato la vittoria agli Stati che si affacciano sul Mediterraneo; od almeno questo problema è visto subordinatamente all'altro: quale fu l'influenza che il desiderio di dominare il Mediterraneo o di partecipare al dominio su di esso ebbe nel determinare guerre, alleanze, lotte tra le potenze mediterranee; e perchè quel desiderio di dominio sul Mediterraneo crebbe, si illanguidì e tornò a farsi vivo nelle successive epoche storiche?

Come in tutti i libri somiglianti per l'impostazione del problema, anche in questo non sempre riesce all'autore di limitare la narrazione o la discussione ai problemi attinenti ed agli avvenimenti in effetto collegati causalmente col mare Mediterraneo. Quando, come succede per il libro del Silva, le diversioni non necessarie sono tuttavia ridotte al minimo, all'opera non si può muovere il rimprovero di unilateralità; anzi bisogna riconoscere il merito di attirare l'attenzione, con voluto silenzio sugli altri fattori, su quel fattore importantissimo di storia che è stato ed è senza dubbio il mare.

Negli *Elementi di diritto ecclesiastico* di Arturo Carlo Jemolo (Firenze, Vallecchi, 1927) è contenuta una trattazione, la quale, notevole di già per alcuni suoi pregi di sistematica e di dogmatica giuridica, si raccomanda agli studiosi della storia del nostro paese, perchè, primo fra i libri di tal genere, ha stimato di far luogo ad una abbastanza ampia esposizione storica, che traccia i " Lineamenti delle relazioni fra lo Stato e la Chiesa in Italia dalla fine del Settecento ai giorni nostri „ (pp. 209-255). Esposizione che, opportuna sempre, presenta ora — come ognuno intende — un carattere di tutta speciale utilità di fronte alla nuovissima regolamentazione di tali rapporti nel nostro paese.

A scrivere il libro intitolato *Il Giansenismo in Italia prima della Rivoluzione* (Bari, Laterza, data interna, 1927), lo Jemolo si era preparato di lunga mano saggiando per ogni verso il terreno, pressochè inesplorato ed eccezionalmente scabroso, con una serie di studi particolari, a cominciare dal suo libro giovanile *Stato e Chiesa negli scrittori politici italiani del Seicento e del Settecento.*

Digitized by Google

L'opera presente è quindi il risultato di lunghe indagini pazienti, di una assidua, intensa meditazione, e — questo merita di essere fin d'ora segnalato — di un intimo travaglio d'anima, di fronte a un contrasto, che lo Jemolo definisce a buon diritto " eterno „, perchè rivive, sia pure mutato di aspetti e di nomi, ad ogni crisi della spiritualità cristiana.

Tant'è vero che uno dei pregi principali di quest'opera è di avere dimostrato che il Giansenismo italiano non consistette semplicemente in un rapido dilagare della corrente transalpina, rimasta da noi alla superfice, perchè mancante di una qualunque polla alimentatrice nel sottosuolo, se così possiamo dire, del sentimento religioso nazionale, ma ebbe nell'Agostinianismo rigido un precursore e quasi preparatore. Poichè, come giustamente rileva lo Jemolo, " l'Agostinianismo rigido non diede poi manifestazioni notevoli di vita fuori d'Italia: si può dire che fu movimento tutto localizzato presso la curia generalizia dell'Ordine, nel convento di via della Scrofa „.

La nota più saliente e davvero caratteristica del lavoro dello Jemolo è questa. La polemica in favore o in odio del Giansenismo, una delle più fiere che la storia ecclesiastica ricordi, si può dire spenta. Da ultimo, almeno presso gli studiosi laici, era venuto prevalendo quello, che possiamo designare, tanto per intenderci, quale il punto di vista o l'indirizzo del Sainte-Beuve. E cioè un guardare il grande moto dal di fuori, con un interessamento essenzialmente intellettuale se anche soffuso di quella simpatia, che ogni animo non opaco o non ostruito da preconcetti o pregiudizi non può non provare di fronte a qualunque fede sincera, disinteressata od eroica. Un passo innanzi per questa via lo è venuto segnando da ultimo il Laporte, integrando quel capolavoro di superiore dilettantismo, se la parola non è troppo forte, quel portento di intuizione e di penetrazione dal di fuori, che è l'opera famosa del Sainte-Beuve su Port-Royal, con una indagine internatasi in tutti i meandri della teologia giansenistica. Lo Jemolo va ancora più in là. Egli ha scrutato, sì, il grandioso fenomeno con occhio sgombro da ogni prevenzione confessionistica; lo ha approfondito, senza esclusivismi, con l'aiuto di tutti quei mezzi di ricerca che la scienza gli po-

Digitized by Google

teva fornire. Ma la sua qualità di credente, la sua fede profonda, fermissima e sensibilissima gli hanno consentito di sentire ciò, che ai semplici spettatori poteva sfuggire, e cioè l'eco, la vibrazione di quei dolorosi laceramenti interni (com'egli li dice nel suo maschio stile concettoso), che tante anime pie hanno provato nell'eterno contrasto. Questo costituisce non solo il carattere differenziale, ma il pregio particolare e anche il fascino di questo libro.

E ne ha determinato anche la forma. Lo Jemolo ha evitato ogni eccesso di apparato dottrinario o anche semplicemente bibliografico, tanto facile in un argomento, ove la letteratura è così abbondante e quasi ingombrante. Egli va diritto ai concetti, alle loro derivazioni e concatenazioni. Ciò fa che l'opera dello Jemolo si possa designare, a nostro avviso, come il contributo più notevole, che da parte laica si sia dato a quella storia, più spiccatamente nazionale e più a noi prossima, del sentimento religioso, che è nei voti di tutti gli studiosi e che colmerebbe un po' la distanza fra la nostra letteratura e il più delle straniere, ricche a questo riguardo di opere eccellenti ed imponenti.

Tale è del resto il giudizio che la critica ha dato ormai di quest'opera, la quale (dice uno studioso competentissimo) « è indubbiamente la prima organica e quadrata storia del giansenismo italiano. Lo Jemolo, per copia di informazioni, per sicurezza di giudizi, per preparazione metodologica, per abilità di espositore, si lascia di gran lunga indietro quanti, da presso o da lontano, si sono occupati di argomenti consanguinei al suo..... Alcune sue pitture personali, quella del Concina, ad esempio, e quella del malcapitato de' Ricci, hanno il sapore di vere opere d'arte ».

L'esame analitico compiuto dalla Commissione la persuase che tra le opere per varii rispetti pregevoli e degne di lode, sulle quali l'attenzione sua è stata richiamata, spiccassero per la larga, paziente, accuratissima indagine, per il rigore del metodo, per l'importanza dei risultati acquisiti alla scienza storica gli scritti dello Jemolo e del Pareti. Parve difficile alla Commissione lo stabilire tra i lavori attinenti ad epoche ed a pro-

Digitized by Google

blemi così profondamente lontani e diversi una graduatoria di merito. Cosicchè, non potendo dare la palma ad un'opera sola, la Commissione è venuta unanime nel divisamento di proporre all'Accademia la divisione del premio Gautieri di storia per il triennio 1925-927 in parti uguali fra i professori Arturo Carlo Jemolo e Luigi Pareti.

Torino, 18 maggio 1929.

La Commissione:

Gaetano De Sanctis, *Presidente.*
Alessandro Luzio.
Federico Patetta.
Francesco Ruffini.
Luigi Einaudi, *Segretario e Relatore.*

Digitized by Google

PREMIO DI FONDAZIONE GAUTIERI

Filosofia (1924-1926)

Illustri Colleghi,

Al Premio Gautieri, da assegnarsi alla migliore opera di Filosofia, compresa la storia della filosofia, pubblicata in Italia nel triennio 1924-1925-1926, dichiararono formalmente di concorrere, inviando loro pubblicazioni, i signori:

Vittorio Marchi, con uno studio su *Le prove dell'esistenza di Dio,* Prolusione al Corso pareggiato di Filosofia (Roma, 1926, pagg. 48).

G. M. De Cabia, con uno studio dal titolo: *Identità o contraddizione?* (Palermo, 1925, pagg. 99).

G. Galli, con un volume dal titolo: *Spirito e realtà, Studio di filosofia come positivismo spiritualistico assoluto.* Parte prima (Albrighi e Segati, 1926, pagg. 247).

Di un altro studioso italiano, che inviò pure all'Accademia una propria pubblicazione, ma che, invitato a dichiarare se intendeva con essa di aspirare al premio, non rispose, la Commissione crede di non poter considerarlo fra i concorrenti.

Si limita quindi a pronunciare giudizio esplicito sui tre lavori citati.

Il lavoro inviato dal sig. V. Marchi è un opuscolo seriamente pensato e scritto. L'Autore conosce e ha studiato con cura e diligenza tutta la discussione fatta dal Kant intorno alle prove dell'esistenza di Dio. Le sue osservazioni sono spesso fini

Digitized by Google

e penetranti. Ma, data la gravità e vastità dell'argomento, l'opuscolo del Marchi è troppo tenue per il conseguimento del premio Gautieri.

Più degno di considerazione per ampiezza di svolgimento è il lavoro del De Caria. Il quale, d'altra parte (prescindendo dai molti, non tutti lievi, errori di stampa), ha notevoli pregi intrinseci di concezione. Movendo dalla posizione idealistica, per la quale il principio di contraddizione ha valore bensì nella logica analitica, non nella logica concreta o del reale, l'Autore si sforza, con vigoria e sottigliezza dialettica, di dimostrare la validità universale di quel principio. E a tale scopo compie un'acuta analisi del pensiero e del giudizio riconducendolo all'unica realtà dell'atto di coscienza, inteso come essenziale relazione dei due termini, il soggetto e l'oggetto, ciascuno dei quali è reale e concreto appunto, e soltanto, in quella relazione. Il principio d'identità esprimerebbe la realtà colta nell'atto che unifica i contrarii, cioè risponderebbe alla essenziale unità del reale. Si può non essere persuasi della solidità della conclusione, e si può anche dubitare della bontà della impostazione del problema e del processo seguìto: ma non si può negare che il Saggio del De Caria sia una bella dimostrazione di coscienza filosofica e di vigoria d'argomentazione, un utile contributo alla discussione gnoseologica.

Buon lavoro è anche l'ampio studio di Gallo Galli: *Spirito e realtà*. Qui è una più larga indagine ricostruttiva di tutta la realtà e vita spirituale, dal grado della conoscenza sensibile a quello della conoscenza razionale, nell'attività teoretica, nella volitiva e nella sentimentale; e il concetto complessivo a cui l'Autore, dotato di bell'ingegno speculativo, giunge attraverso a una varia discussione, forse talora un po' prolissa, tal altra troppo stringata, ma sempre consapevole delle difficoltà, è quello di una realtà essenzialmente spirituale, che è però sistema del molteplice, e che si costituisce attraverso un dinamismo dialettico, in cui le diverse attività si presuppongono sempre. In una così vasta tessitura è naturale che parecchi problemi rimangano un po' avvolti nell'oscurità (per esempio quello dei

Digitized by Google

rapporti fra l'attività teoretica e la pratica, fra il sentimento e la volontà, fra attività appetitiva e attività finalistica, fra attività finalistica e attività morale, ecc.), e che su altri (come sul problema del male) troppo rapidamente l'Autore sorvoli. Inoltre è da rilevare come un difetto proprio di tutto il lavoro l'assoluta mancanza di ogni riferimento storico, che, pur essendo implicito, meriterebbe in parecchi punti di essere chiaramente illustrato.

Siamo, a ogni modo, in presenza di un buon lavoro. Ma quando si è trattato dell'aggiudicazione del premio, la Commissione ha dovuto chiedersi se il lavoro del Galli veramente si segnali come la migliore pubblicazione del triennio. E allora, nel campo della pura speculazione, si sono presentati alla attenzione nostra alcune altre pubblicazioni, che nella indagine dei problemi fondamentali circa la natura e la vita dello spirito nell'arte, nella scienza, nella morale, nell'educazione hanno portato da diversi punti di vista contributi più o meno importanti alla discussione filosofica.

Nella incertezza della comparazione e della scelta, la Commissione ha quindi creduto di dover allargare le sue indagini nel campo degli studii storici della filosofia. E qui essa, dopo alcune discussioni di confronto, si è fermata sopra un'opera che per la novità dell'argomento, per l'importanza di esso in rapporto alla filosofia e alla coscienza nazionale, per la rilevanza dei risultati ci è parsa particolarmente degna di considerazione. Si tratta dell'opera in due volumi di Angiolo Gambaro, *Riforma religiosa nel carteggio inedito di Raffaello Lambruschini*, vol. I, Introduzione, pagg. 434. Torino, Paravia, 1924; vol. II, *Carteggio religioso e appendice*, pagg. 403, Torino, Paravia, 1926.

Dei due volumi, il primo ha propriamente carattere e valore di studio storico-filosofico, il secondo, pur essendo tutto dedicato a pubblicare un carteggio, fin qui, per gran parte, inedito, del Lambruschini ad altri, e di altri a lui, è però ricco di note che hanno molti e importanti riferimenti alle questioni filosofiche e religiose trattate nel primo volume. Il quale ci offre un ampio e vivo quadro delle grandi questioni e discussioni d'ordine religioso-morale-educativo-politico, che si svolsero, si

Digitized by Google

può dire, intorno al Lambruschini, fra menti pensose e operose di Toscana e di fuori negli anni medesimi in cui si andava preparando il Risorgimento politico della Patria, e con il quale quelle erano intimamente, per varii nessi, legate. Il pensiero e desiderio di una riforma religiosa, che, incentrandosi sul problema essenzialmente filosofico dei rapporti fra autorità e libertà, si dilatasse ad abbracciare la interpretazione dei dogmi, la costituzione della Chiesa, i suoi rapporti con la società civile, era allora molto largamente diffuso; e il Lambruschini, certo, era in Italia una delle coscienze più atte, per la purezza della vita, l'acutezza e la temperanza dell'ingegno, la vivacità e larghezza della cultura, a proclamarlo, e a ragionarne. Aver visto l'interesse e l'importanza di questo aspetto del più vasto problema filosofico, onde è investito tutto il nostro Risorgimento; averlo, con cura amorosa, diligente e perspicace, studiato nel travaglio molteplice di un'anima superiore; aver rannodato intorno ad esso tutte le fila che lo congiungono al pensiero italiano, francese, svizzero del tempo, al mazzinianesimo, al saintsimonismo, al giansenismo, al lamennaisianismo; aver precisato, per quanto era possibile in materia così delicata e, direi, mobile, il pensiero, finora imperfettamente noto, del Lambruschini che, pur nella sua ansiosa e profonda preoccupazione di dare alla vita religiosa ed educativa un contenuto e un indirizzo essenzialmente interno e spirituale, volle sempre rimanere nell'orbita della Chiesa, costituiscono, a giudizio nostro, merito ragguardevole dell'opera del Gambaro. Ond'essa ci appare come un buon apporto, non pure alla conoscenza completa e sincera del gran moto spirituale e delle correnti filosofiche del nostro glorioso Risorgimento, ma anche alla ulteriore discussione e risoluzione di quei problemi etici-religiosi-pedagogici, che sono pure tanta, e così viva, parte della coscienza nazionale odierna.

L'importanza scientifica della pubblicazione del Gambaro, che è anche frutto di lunghe difficili e pazienti indagini compiute in varii archivii privati e pubblici, e che va integrata con la pubblicazione posteriore (ma sempre del 1926) di *Conferenze religiose e preghiere inedite* del Lambruschini (Venezia, La " Nuova Italia „ editrice), è stata unanimemente ricono-

Digitized by Google

sciuta dalla critica, anche quando su taluni particolari di accertamento e di apprezzamento della figura, del pensiero e dei rapporti spirituali del Lambruschini ci potevano essere fra gli autorevoli recensenti dissensi e riserve.

Crediamo quindi di potervi proporre di assegnare il Premio Gautieri di filosofia per il triennio 1924-26 all'opera di Angelo Gambaro sulla *Riforma religiosa nel carteggio inedito di Raffaele Lambruschini.*

Torino, 20 maggio 1929.

La Commissione:

Gaetano De Sanctis, *Presidente.*
L. Einaudi.
A. Faggi.
G. Solari.
G. Vidari, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Emilio Repossi.

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LXIV, DISP. 14ª e 15ª, 1928-1929

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3
1929

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 26 Maggio 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono intervenuti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: PEANO, GRASSI, PANETTI, VALLAURI e il Segretario REPOSSI;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: DE SANCTIS, STAMPINI, EINAUDI, PATETTA, VIDARI, LUZIO, JANNACCONE e il Segretario FAGGI.

Scusano la loro assenza i Soci: D'OVIDIO, MATTIROLO, BOSELLI, RUFFINI, BRONDI e CIAN.

Dietro invito del Presidente, il Socio VIDARI legge la Relazione della Commissione per l'assegnazione del Premio di fondazione GAUTIERI per la Filosofia, relazione che conclude con la proposta che il premio sia assegnato, per il triennio 1924-26, all'opera di Angelo GAMBARO sulla *Riforma religiosa nel pensiero di Raffaele Lambruschini*. Posta ai voti, la relazione è approvata all'unanimità, senza alcuna osservazione da parte dei Soci.

Il Socio EINAUDI legge in seguito la Relazione della Commissione per l'assegnazione del Premio di fondazione GAUTIERI per la Storia, che conclude con la proposta che il premio per il triennio 1925-27 sia diviso in parti uguali fra i Professori

Digitized by Google

Arturo Carlo Jemolo e Luigi Pareti. Posta ai voti, la relazione e le sue conclusioni sono pure approvate all'unanimità, senza che, a richiesta del Presidente, alcun Socio presente faccia osservazioni.

Adunanza del 9 Giugno 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: Peano, Mattirolo, Grassi, Ponzio, Pochettino, Garelli e il Segretario Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: Ruffini, Stampini, Brondi, Einaudi, Vidari, Luzio, Solari e il Segretario Faggi.

Scusano l'assenza i Soci: D'Ovidio, Somigliana, Panetti e Vallauri.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Presidente propone alle Classi di inviare al Socio Boselli. in occasione del 91° suo genetliaco, il seguente telegramma:

Ricorrenza genetliaco V. E., R. Accademia Classi Unite felicitandosi porge fervidi augurî reverenti saluti.

Presidente: Parona.

La proposta è accolta con vivo plauso.

Si passa quindi alla votazione per l'assegnazione del Premio Gautieri per la Filosofia 1924-26. Dalla votazione, fatta per schede segrete come prescrive lo Statuto, il Dott. Mons. Angelo Gambaro viene proclamato vincitore del premio.

Digitized by Google

Dalla votazione per l'assegnazione del Premio Gautieri per la Storia 1925-27, fatta con le stesse norme, risultano vincitori i Professori A. C. Jemolo dell'Università di Bologna e Luigi Pareti della Università di Firenze, fra i quali, giusta le proposte della Commissione, viene diviso il premio in parti eguali.

Gli Accademici Segretarii:
Emilio Repossi.
Adolfo Faggi.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 9 Giugno 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, GRASSI, PONZIO, POCHETTINO, GARELLI e il Segretario REPOSSI.

Scusano l'assenza i Soci: D'OVIDIO, SOMIGLIANA, PANETTI e VALLAURI.

Il Presidente presenta i seguenti omaggi pervenuti all'Accademia:

Chanousia. Annuario, N. 1, 1922-27, pubblicato a spese del Ministero dell'Economia (Direzione Generale dell'Agricoltura) col concorso del Dott. Marco DE MARCHI;

Ing. S. FRANCHI, *Sulla tettonica delle Alpi Cozie franco-italiane.*

Il Segretario, a nome del Socio corrisp. Prof. E. PISTOLESI, presenta, per l'inserzione negli *Atti*, una Nota dal titolo: *Sul calcolo della resistenza delle eliche:* 1. *L'eliminazione dei momenti flettenti;* 2. *I momenti torcenti e la loro eliminazione.*

Il Socio GARELLI presenta in seguito per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Prof. Michele GIUA e di Giovanni RACCIU, dal titolo: *Ricerche sulla resinificazione:* I. *Sulla condensazione dell'aldeide formica con l'uretano ordinario;* e ne espone brevemente il contenuto.

Il Presidente PARONA presenta infine, sempre per l'inserzione negli *Atti*, una Nota della Dott.ssa R. ZUFFARDI COMERCI, intitolata: *La fauna pliocenica di Masserano Cossato (Biellese).*

Digitized by Google

LETTURE

Sul calcolo di resistenza delle eliche.

Nota del Socio corrispondente ENRICO PISTOLESI

I. — L'eliminazione dei momenti flettenti.

È noto come un'opportuna forma della linea baricentrica della pala permetta di ottenere una compensazione fra i momenti flettenti dovuti alle azioni aerodinamiche e quelli dovuti alla forza centrifuga.

Considerando del momento flettente agente in una sezione i due componenti: principale (asse momento normale all'asse di rotazione dell'elica) e secondario (asse momento coincidente con l'asse di rotazione), il problema si scinde in due: compensazione dei momenti flettenti principali e compensazione dei momenti flettenti secondari.

Sebbene ambedue questi problemi siano stati risolti da tempo (1), ci è sembrato opportuno riprenderne in considerazione alcuni aspetti, anche perchè i precedenti studi in argomento sono ormai rari o mal noti.

1. — La risoluzione dei suddetti problemi richiede la conoscenza della distribuzione lungo l'asse della pala delle azioni elementari centrifughe e delle pressioni aerodinamiche, principale e secondaria.

In altri termini, se indichiamo con fdr la forza centrifuga

(1) R. Verduzio, *Sulla statica delle eliche*, Roma, 1917; E. Pistolesi, *Studio sulle sollecitazioni delle eliche*, " Bollettino Tecnico N. 5 della Direzione Sperimentale dell'Aviazione „, 1919.

Digitized by Google

agente nel tratto di pala compreso fra le sezioni praticate ai raggi r e $r + dr$, con $t\,dr$ e $q\,dr$ le forze aerodinamiche elementari, rispettivamente principale e secondaria, agenti sullo stesso elemento di pala, si richiede la conoscenza delle funzioni

$$f(r),\ t(r) \text{ e } q(r).$$

È facile allora impostare le equazioni differenziali delle due proiezioni $y(r)$ e $z(r)$ principale e secondaria della linea baricentrica (linee di campanatura) in base alla condizione che tale linea deve, per ogni valore del raggio, essere tangente alla risultante delle forze agenti sul tratto di pala compreso fra la sezione al raggio considerato e l'estremità.

Si avrà:

a) *per la campanatura principale:*

$$\frac{dy}{dr} = \frac{\int_r^R t\,dr}{\int_r^R f\,dr}\ ; \tag{1}$$

Questa equazione suggerisce senz'altro la risoluzione, numerica o grafica, del problema.

Adottando, ad es., la via grafica, con due integrazioni grafiche procedenti dall'estremità del raggio verso il centro si determinano in corrispondenza delle varie sezioni i valori dei due termini della frazione che fornisce $\frac{dy}{dr}$. Una terza integrazione fornisce y in funzione di r.

Ci asteniamo dallo scendere ai particolari, rimandando per questi ai lavori citati.

b) *per la campanatura secondaria:*

Posto $Q = \int_r^R q\,dr$ e $F = \int_r^R f\,dr$, si ha:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{Q - \int_r^R f \frac{z}{r} dr}{F},$$

ovvero:

$$F\frac{dz}{dr} - Q + \int_r^R f \frac{z}{r} dr = 0.$$

Digitized by Google

Derivando rispetto ad r, si ottiene:

$$\frac{dF}{dr}\cdot\frac{dz}{dr}+F\frac{d^2z}{dr^2}-\frac{dQ}{dr}-\frac{dF}{dr}\cdot\frac{z}{r}=0. \qquad (2)$$

Si tratta di risolvere questa equazione differenziale, il che può farsi in più modi.

2. — Un metodo diretto, già indicato nel Bollettino Tecnico N. 5 della Direzione Sperimentale dell'Aviazione, si basa sul principio stesso di partenza, cioè nel tracciare ogni elemento nella direzione della forza risultante sulla porzione esterna della pala. Ciò rende possibile un procedimento " passo per passo „, per il quale rimandiamo al citato Bollettino, ove è applicato per via grafica.

Un altro metodo, indicato nelle Lezioni sulla Teoria delle Eliche, da me tenuto al Corso per Costruttori Aeronautici del R. Politecnico di Torino (1), è il seguente:

Moltiplicando tutti i termini della (2) per r e trasformando opportunamente, si ottiene:

$$r\frac{d}{dr}\left(F\frac{dz}{dr}\right)-z\frac{dF}{dr}=r\frac{dQ}{dr}.$$

Si aggiunga e si tolga $F\frac{dz}{dr}$; si ottiene:

$$r\frac{d}{dr}\left(F\frac{dz}{dr}\right)+F\frac{dz}{dr}-\left(z\frac{dF}{dr}+F\frac{dz}{dr}\right)=r\frac{dQ}{dr},$$

ossia:

$$\frac{d}{dr}\left(rF\frac{dz}{dr}\right)-\frac{d}{dz}(Fz)=r\frac{dQ}{dr}.$$

Integrando e tenendo conto che per $r=R$, $F=0$, si ha:

$$F\left(r\frac{dz}{dr}-z\right)=-\int_r^R r\frac{dQ}{dr}\,dr.$$

---

(1) *Teoria delle eliche.* Dispense litografate. Torino, Perotti, 1922.

Digitized by Google

Posto

$$I = \int_r^R rq\, dr,$$

si ha dunque:

$$F\left(z - r\frac{dz}{dr}\right) = I,$$

od anche:

$$r^2 F \frac{d}{dr}\left(\frac{z}{r}\right) = -I,$$

e quindi:

$$\frac{z}{r} = \int_r^R \frac{I}{r^2 F} + C.$$

Se imponiamo, ad esempio, che per $r = R$ sia $z = 0$, si ha:

$$z = r\int_r^R \frac{I}{r^2 F}\, dr. \qquad (3)$$

Graficamente necessitano due integrazioni grafiche, una per determinare I, l'altra per determinare $\frac{z}{r}$.

3. — Ma il problema può risolversi anche per altra via, con un'impostazione sostanzialmente equivalente, ma formalmente diversa.

Calcoliamo il momento flettente in una sezione. Esso sarà la somma del momento delle forze elementari q, cioè:

$$\int_r^R Q\, dr,$$

e del momento delle forze centrifughe elementari. Decomposte queste nelle due componenti secondo r e secondo z, ponendo il punto di concorso di esse nell'origine, si hanno facilmente per i momenti derivanti dall'una e dall'altra i valori:

$$-z\int_r^R f\, dr \quad \text{e} \quad r\int_r^R f\frac{z}{r}\, dr$$

Digitized by Google

(si assume per senso positivo dell'asse z quello per cui si passa da r a z nel senso di rotazione dell'elica).

La compensazione dei momenti flettenti si traduce perciò nell'equazione

$$\int_r^R Q\,dr - z\int_r^R f\,dr + r\int_r^R f\frac{z}{r}\,dr = 0, \qquad (4)$$

da cui:

$$\frac{1}{r}\int_r^R Q\,dr - \frac{z}{r}\int_r^R f\,dr + \int_r^R f\frac{z}{r}\,dr = 0.$$

Posto $\frac{z}{r} = \zeta$, derivando la precedente equazione rispetto ad r, posto inoltre $\int_r^R Q\,dr = M''$, si ha:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{M''}{r}\right) - \frac{d\zeta}{dr}F = 0,$$

da cui:

$$\frac{d\zeta}{dr} = \frac{\frac{d}{dr}\left(\frac{M''}{r}\right)}{F},$$

e quindi:

$$\zeta = -\int_r^R \frac{\frac{d}{dr}\left(\frac{M''}{r}\right)}{F}\,dr + C,$$

$$z = -r\int_r^R \frac{d\left(\frac{M''}{r}\right)}{F} + Cr, \qquad (5)$$

che può anche scriversi:

$$z = r\int_r^R \frac{M'' + rQ}{Fr^2}\,dr + Cr.$$

Il termine Cr rappresenta (data la piccolezza di z) una rotazione attorno ad O ed è senza importanza. Si può cioè prendere $C = O$ imponendo che sia $z = O$ per $r = R$.

Digitized by Google

Le due soluzioni (3) e (5) sono identiche, com'è naturale. Ed invero, integrando per parti:

$$I = \int_r^R rq\,dr = Qr + \int_r^R Q\,dr.$$

4. — Una soluzione approssimata dei due problemi sopra indicati può ottenersi semplicemente assumendo a priori la forma della linea di campanatura (ad es. rettilinea o parabolica) e imponendo che i momenti siano compensati in uno o due punti determinati, ad esempio alla radice della pala e a metà di essa.

Per la campanatura principale il calcolo dei momenti al raggio r conduce alla relazione:

$$\int_r^R T\,dr = \int_r^R f(y_r - y)\,dr\,, \tag{6}$$

$$\int_r^R T\,dr = \int_r^R f y_r\,dr - yF.$$

Se si adotta la forma rettilinea

$$y = \alpha r \tag{7}$$

si avrà:

$$\int_r^R T\,dr = \alpha \int_r^R fr\,dr - \alpha r F\,;$$

e integrando per parti:

$$\int_r^R T\,dr = \alpha \int_r^R F\,dr\,,$$

da cui:

$$\alpha = \frac{\int_r^R T\,dr}{\int_r^R F\,dr}. \tag{8}$$

Se vogliamo che la (6) sia soddisfatta per $r = r_1$, essendo r_1 il raggio corrispondente alla radice della pala, basterà porre r_1 nella (8) al limite inferiore dei due integrali. Se indichiamo con T_1 ed F_1 i valori della spinta e della forza centrifuga alla radice della pala (cioè per $r = r_1$), con δ_T e δ_F le distanze dei

Digitized by Google

baricentri dei diagrammi t ed f dall'ordinata condotta per $r = r_1$, la (8) si può scrivere:

$$\alpha = \frac{T_1 \delta_T}{F_1 \delta_F}. \tag{8'}$$

Se poniamo

$$y = \alpha r + \beta r^2,$$

dalla (6) si ottiene:

$$\int_r^R T dr = \alpha \int_r^R F dr + \beta \int_r^R Fr\, dr. \tag{9}$$

Applicando la (9) a due punti r_1 ed r_2 se ne deducono facilmente i valori di α e di β.

5. — Per quanto riguarda la campanatura secondaria, ricorreremo alla (4). Tenuto presente che un termine del tipo Kr nell'equazione di z non ha nessuna influenza sui momenti, basterà porre (per campanatura rettilinea):

$$z = e. \tag{10}$$

Sostituendo nella (4) e integrando per parti si ottiene facilmente:

$$\int_r^R Q\, dr = er \int_r^R \frac{F}{r^2}\, dr,$$

da cui:

$$e = \frac{\int_r^R Q\, dr}{r \int_r^R \frac{F}{r^2} dr}. \tag{11}$$

Conviene applicare la (11) per $r = O$; in tal caso il numeratore è semplicemente la coppia $\frac{C}{n}$ competente alla pala (supposto l'elica di n pale); il denominatore si presenta sotto forma indeterminata. Il calcolo diretto del momento flettente dovuto alla forza centrifuga fornisce peraltro il valore:

$$\int_0^R f \frac{e}{r} \cdot r\, dr = e F_0$$

Digitized by Google

(F_o = forza centrifuga per $r = O$) e quindi:

$$e = \frac{C\,n}{F_0}, \tag{12}$$

semplicissimo risultato già trovato incidentalmente in altra ricerca [1].

Se poi si vuole adottare la forma parabolica:

$$z = e + cr^2 \tag{13}$$

sostituendo nella (4) si ottiene:

$$\int_r^R Q\,dr = er\int_r^R \frac{F}{r^2}\,dr - cr\int_r^R F\,dr. \tag{14}$$

Se applichiamo la (14) per $r = O$ si ottiene lo stesso risultato di prima e quindi lo stesso valore di e dato dalla (12). Ciò non può sorprendere, perchè il momento della forza centrifuga per $r = O$ dipende soltanto dall'eccentricità e, com'è facile verificare eseguendo la decomposizione delle forze centrifughe elementari per O ed osservando che per il punto $r = O$ è nullo il momento delle componenti parallele a z.

Resterà da determinarsi il valore di c, applicando la (14) in un punto r_2, ad esempio per $r_2 = 0{,}5$, essendo e già determinato.

II. — I momenti torcenti e la loro eliminazione.

Lo studio dei momenti torcenti per una pala d'elica può avere importanza da due diversi punti di vista:

a) per ogni tipo di elica, ma specialmente per le eliche in legno o per le eliche metalliche a pale molto sottili, in quanto

---

[1] *Calcolo della linea elastica dell'elica*, " Atti del IV Congresso Internazionale di Navigazione aerea „, Roma, 1928 e " L'Aerotecnica „, 1927.

Digitized by Google

la torsione, modificando l'orientazione delle sezioni, modifica il passo e le caratteristiche aerodinamiche dell'elica;

b) per le eliche a passo variabile, nelle quali ogni pala è girevole intorno ad un asse normale all'albero motore, in quanto il momento torcente complessivo agente sulla pala tende a produrne la rotazione e deve essere contrastato, sia disponendo opportuni arresti, sia affidando il comando dell'orientazione della pala ad un meccanismo ad arresto spontaneo.

L'eliminazione dei momenti torcenti può quindi avere un duplice obiettivo: annullare il momento torcente per ogni sezione, in guisa da assicurare la costanza delle caratteristiche geometrico-aerodinamiche dell'elica; ovvero annullare il momento torcente alla radice della pala, così da eliminare il pericolo di una spontanea rotazione di questa e da rendere minimo lo sforzo necessario alla manovra nel caso di eliche a pale orientabili.

Il problema deve naturalmente essere impostato sullo studio dei momenti torcenti dovuti alle azioni aerodinamiche e di quelli dovuti alle forze centrifughe.

L'argomento è stato già da alcuni studiosi parzialmente trattato (1). Ritengo tuttavia non inutile trattarlo nuovamente, per giungere alla importante conclusione che la completa eliminazione dei momenti torcenti (sia nell'uno che nell'altro dei due sensi sopra accennati) non è praticamente possibile, a differenza di quanto invece può farsi per i momenti flettenti.

1. — Il calcolo dei momenti torcenti dovuti alle azioni aerodinamiche richiede la conoscenza del centro di pressione delle forze aerodinamiche e del valore di queste.

In calcoli di questo genere, necessariamente approssimati, e necessariamente valevoli per una sola condizione di funzionamento dell'elica, è lecito far ricorso ad ipotesi semplificative.

---

(1) Greffits & Heigs, " R. & M. Aeronautical Research Committee „, 452, 454, 455; Alexandroff, *La théorie tourbillonnaire du Prof. N. Joukowski et le calcul des hélices propulsives aériennes,* " Atti del IV Congresso Internaz. di Navigaz. aerea „, Roma, 1928.

Digitized by Google

Assumiamo pertanto che il centro di pressione su di ogni sezione sia sulla parallela alla corda condotta dal baricentro della sezione e distante da esso di $l/4$, dove l è la lunghezza della corda (1). Indichiamo inoltre con r il raggio, con $t\,dr$ e $q\,dr$ le azioni elementari, rispettivamente assiale e tangenziale, con $y\,(r)$ e $z\,(r)$ le coordinate del baricentro della sezione al raggio r (l'asse y essendo diretto parallelamente all'asse di rotazione e l'asse z normalmente al piano dell'asse y e dell'asse r, quest'ultimo, nel caso di pale orientabili, coincidente con l'asse di rotazione della pala) (2) e finalmente con α l'*angolo di calettamento* della sezione, cioè l'angolo della corda col piano $r\,z$.

Il momento torcente nella sezione r_1 sarà:

$$M_t' = \int_{r_1}^{R} t\left(\frac{l}{4}\cos\alpha + z - z_1\right)dr + \int_{r_1}^{R} q\left(\frac{l}{4}\operatorname{sen}\alpha + y - y_1\right)dr. \quad (1)$$

2. — Il momento torcente dovuto alla forza centrifuga si ottiene in base alle considerazioni che seguono.

Su una porzione di pala, compresa fra le sezioni praticate ai raggi r ed $r + dr$, ogni elemento di base $d\sigma$ e altezza dr e coordinate y' e z' è soggetto ad una forza centrifuga elementare passante per l'asse di rotazione, che ha una componente normale al piano della sezione, data da $\Delta \,.\, d\sigma \,.\, dr \,.\, \omega^2 r$, dove Δ è la *densità* del materiale costituente l'elica, ed una componente contenuta nel piano della sezione, $\Delta \,.\, d\sigma \,.\, dr \,.\, \omega^2 z'$.

Le forze elementari contenute nel piano della sezione, trasportate nel baricentro, danno origine ad una forza parallela all'asse z di valore

$$\Delta\,\omega^2\,dr \int_\sigma z'\,d\sigma = \Delta\,\omega^2\,\sigma z\,dr, \quad (2)$$

---

(1) Questa ipotesi può in qualche caso condurre ad una sopravalutazione del momento torcente elementare; ma ciò, come risulterà dai calcoli, rafforza in generale le conclusioni del presente studio. Del resto l'ipotesi ammessa è assai verosimile per sezioni simmetriche e in generale per forti incidenze.

(2) y e z sono le coordinate delle cosidette linee di campanatura principale e secondaria, cioè le due proiezioni della linea baricentrica.

Digitized by Google

dove σ è l'area della sezione e z la coordinata del suo baricentro, e ad un momento torcente elementare

$$\Delta\omega^2 dr \int_\sigma z'(y'-y)\,d\sigma = \Delta\omega^2 dr \int_\sigma (z'-z)(y'-y)\,d\sigma \text{ (1)}. \quad (3)$$

La quantità espressa dall'integrale non è altro che il momento centrifugo della sezione rispetto a due assi baricentrici paralleli rispettivamente all'asse y e all'asse z. Se indichiamo questo con m_{yz}, il momento torcente elementare espresso dalla (3) potrà scriversi:

$$\Delta\omega^2 m_{yz}\,dr. \quad (3')$$

Ciò premesso, il momento torcente sulla sezione r_1 sarà:

$$M_t'' = \Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} m_{yz}\,dr + \Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} \sigma z (y - y_1)\,dr. \quad (4)$$

Occorre notare che i due momenti M'_t e M''_t hanno sensi opposti e che perciò il momento torcente complessivo è dato dalla loro differenza:

$$M_t = \int_{r_1}^{R} \frac{l}{4}(t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,dr - \Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} m_{yz}\,dr +$$

$$+ \int_{r_1}^{R} t(z - z_1)\,dr + \int_{r_1}^{R} q(y - y_1)\,dr - \Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} \sigma z (y - y_1)\,dr. \quad (5)$$

Nella precedente formula si sono riuniti nel primo rigo i termini indipendenti dalla forma della linea baricentrica, nel secondo rigo i termini che ne dipendono e sui quali possiamo agire, variando opportunamente la linea baricentrica, allo scopo di ottenere la compensazione dei momenti torcenti.

3. — La compensazione assoluta, cioè per tutte le sezioni, richiede che il momento torcente non vari nel passare da una sezione ad una infinitamente vicina. Infatti, poichè il momento

---

(1) Ciò perchè $\int z(y'-y)\,d\sigma = z\int (y'-y)\,d\sigma = 0$, essendo y la coordinata del baricentro.

Digitized by Google

è certo nullo all'estremità della pala, esso rimane in tal caso nullo ovunque.

Ora, nel passare da r ad $r - dr$, il momento torcente varia di:

$$\frac{l}{4}(t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\alpha)\,dr - \Delta\omega^2 m_{yz}\,dr + T\,dz + Q\,dy -$$

$$- \Delta\omega^2\,dy\int_r^R \sigma\,.\,z\,dr, \qquad (6)$$

dove si è posto

$$T = \int_r^R t\,dr\ , \qquad Q = \int_r^R q\,dr.$$

Uguagliando a zero, si ha l'equazione cercata.

Stabilita la funzione z, si può da questa equazione ricavare la y. Ammettiamo, ad es., che sia $z = \text{cost.} = e$.

Si ha allora:

$$\frac{l}{4}(t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\alpha)\,dr - \Delta\omega^2 m_{yz}\,dr = \left(e\frac{G}{g}\omega^2 - Q\right)dy, \qquad (7)$$

avendo posto $G = g\Delta\int_{r_1}^R \sigma\,dr$ il peso del tratto di pala dalla sezione considerata alle estremità. Da cui:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{\frac{l}{4}(t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\alpha) - \Delta\omega^2 m_{yz}}{e\frac{G}{g}\omega^2 - Q}. \qquad (7')$$

Si osservi che $t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\alpha$ non è altro che la proiezione della pressione aerodinamica elementare (risultante di t e q) sulla normale alla corda.

Se invece

$$z = e + cr\,,$$

si ha:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{\frac{l}{4}(t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\alpha) - \Delta\omega^2 m_{yz} + Tc}{e\frac{G}{g}\omega^2 + cF - Q}, \qquad (7'')$$

Digitized by Google

essendo $F = \Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} \sigma r\, dr$ la forza centrifuga totale agente sulla sezione considerata.

4. — Per vedere se le soluzioni (7′) e (7″) sono o no praticamente possibili, poniamo $t\cos\alpha + q\,\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\rho c_s l w^2$, dove ρ è la densità dell'aria, c_s è un coefficienle di spinta, che poco differisce dal coefficiente consueto di portanza [1] è $w^2 = r^2\omega^2 + v^2$ essendo v la velocità di avanzamento. Introdotto il rapporto funzionale

$$\Upsilon = \frac{v}{R\omega}$$

segue $v = \frac{\Upsilon r\omega}{r\,R}$.

Sostituendo:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{\frac{l^2}{8} c_s \rho r^2 \omega^2 \left(1 + \frac{\Upsilon^2}{(r/R)^2}\right) - \Delta\omega^2 m_{yz} + Tc}{e\frac{G}{g}\omega^2 + cF - Q}.$$

Il calcolo approssimativo di m_{yz} si può condurre in base alle considerazioni seguenti.

Siano $\eta\zeta$ gli assi principali d'inerzia della sezione; se y e z sono assi ortogonali, ma non principali, ed è α l'angolo di cui occorre ruotare la coppia $\eta\zeta$ per portarla a coincidere con $y\,z$, si ha, com'è noto:

$$m_{yz} = (J_\eta - J_\zeta)\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha.$$

Si può in pratica ammettere che l'asse ζ sia parallelo alla corda della sezione, nel qual caso α è l'angolo di calettamento. Generalmente, data la forma delle sezioni, J_ζ è piccolo di fronte a J_η. Se si potesse supporre concentrata tutta la sezione sulla sua corda, si avrebbe, posta uguale a σ l'area:

$$m_{yz} = \sigma\frac{l^2}{12}\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha.$$

---

[1] Naturalmente relativo all'*allungamento virtuale* della sezione.

Digitized by Google

In generale si potrà introdurre un coefficiente correttivo k e porre:

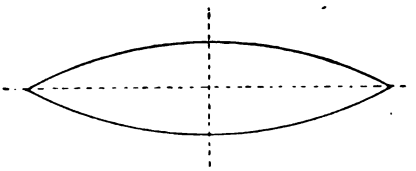
$$m_{yz} = k\sigma \frac{l^2}{12} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

con k non molto diverso da 1.

Ad es. per una sezione ellittica in cui lo spessore sia 1 6 della corda, si trova $k = 0{,}74$.

Per una sezione cava (lamiera) di spessore costante, molto sottile, costituita da due archi di cerchio come è indicato in figura, pure con rapporto 1/6 fra spessore e corda, si trova

$$k = 1{,}02.$$



Quanto all'area σ, si può porre $\sigma = al^2$ (a per le sezioni piene d'elica ordinaria è compreso fra 1/8 e 1/10); si ponga inoltre:

$$\frac{l}{R} = \lambda\,, \quad \frac{r}{R} = \xi\,.$$

Avremo:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{R^4 \omega^2 \lambda^2 \left[\frac{1}{8} \rho c_s (\xi^2 + \gamma^2) - \frac{ka}{12} \Delta \lambda^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\right] + Tc}{e \frac{G}{g} \omega^2 + cF - Q}\,.$$

Se, ad esempio, supponiamo che sia $z = 0$ per tutte le sezioni (pala priva di campanatura secondaria), ossia $e = c = 0$. al numeratore rimangono i soli termini esprimenti il contributo dei momenti elementari e al denominatore la sola risultante tangenziale Q.

Un esempio servirà ad orientare circa l'ordine di grandezza di queste quantità. Sia:

$$k = 0{,}8\,, \quad a = \frac{1}{8}\,, \quad \Delta\,(\text{legno}) = 72\,, \quad \lambda = 0{,}17.$$

Digitized by Google

Quanto ad α, supponiamo che l'elica sia a passo geometrico uniforme e sia γ_c il valore di γ relativo ad esso. Si ha allora:

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \frac{\gamma_c \xi}{\gamma_c^2 + \xi^2}.$$

Supponiamo $\gamma = \gamma_c = 0{,}4$ e assumiamo per c_s il valore 0,5. Si ottiene:

	$\xi =$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
a) $\frac{1}{8}\rho c_s(\xi^2+\gamma^2)$	=	0,00156	0,00250	0,00416	0,00625	0,00906
b) $\frac{k a}{12}\Delta\lambda^2 \frac{\gamma_c \xi}{\gamma_c^2+\xi^2}$	=	0,00694	0,00867	0,00800	0,00694	0,00598
b-a)	=	0,00538	0,00617	0,00384	0,00069	−0,00308.

Risulta da questo prospetto che la variabilità dei momenti torcenti elementari lungo la pala è molto minore per la forza centrifuga che per le azioni aerodinamiche, e, nel caso considerato, che i primi soverchiano per quasi tutta la pala i secondi (ciò che si verifica in quasi tutti i casi pratici). Naturalmente il risultato sarebbe modificato alquanto introducendo la rastremazione della pala, cioè la variabilità di λ col raggio; ma ciò non farebbe che aggravare la conclusione che vogliamo trarre da quanto sopra, cioè la grande variabilità lungo la pala del momento torcente complessivo.

Osserviamo ora che, ammessa una certa distribuzione della spinta tangenziale lungo il raggio, è facile calcolare Q in funzione di ξ e della coppia resistente dell'elica. Ammettiamo, ad esempio, che la spinta tangenziale sia uniformemente distribuita da $\xi = 0{,}2$ a $\xi = 1$; che l'elica sia a 2 pale e che C sia la coppia totale sull'albero; si avrà:

$$Q = \frac{C(1-\xi)}{0{,}96\,R};$$

e posto $C = \rho\kappa R^5\omega^2$, segue:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{0{,}96\,\lambda^2\left[\frac{1}{8}\rho c_s(\xi^2+\gamma^2) - \frac{k a}{12}\Delta\lambda^2 \frac{\gamma_c \xi}{\gamma_c^2+\xi^2}\right]}{\rho\kappa(1-\xi)}.$$

Digitized by Google

Ora, nelle ipotesi ammesse, un valore plausibile di κ è 0,005. Se ne deducono i seguenti valori di $\frac{dy}{dr}$:

$$\begin{array}{lccccc} \xi = & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1{,}0 \\ \frac{dy}{dr} = & 0{,}30 & 0{,}46 & 0{,}43 & 0{,}16 & -\infty . \end{array}$$

Queste cifre valgono già a dimostrare l'impossibilità pratica della compensazione perfetta, giacchè $\frac{dy}{dr}$ non potrebbe praticamente oltrepassare qualche centesimo. Ma l'impossibilità risulterà ancor più manifesta se osserviamo che $\frac{0{,}96\,\lambda^2}{\rho\,\kappa\,(1-\xi)}$ ha valori che vanno da 55 a ∞ e che perciò la quantità entro parentesi al numeratore dovrebbe risultare dell'ordine dei decimillesimi, mentre è differenza di quantità dell'ordine dei millesimi. Ne deriva che un errore anche piccolo nelle ipotesi si ripercuote in misura notevolissima sui risultati, togliendo ad essi ogni fondamento.

La conclusione può confermarsi senza difficoltà anche ammettendo una campanatura secondaria.

5. — Il secondo problema, la compensazione dei momenti alla radice della pala, si risolve uguagliando a zero la somma dei momenti data dalla (5), dove per r_1 s'intenderà il valore del raggio che compete alla radice della pala.

Generalmente le due campanature sono già calcolate per la compensazione dei momenti flettenti. Siccome però la campanatura principale è sempre determinata a meno di un termine costante e quella secondaria a meno di un termine proporzionale ad r (1), se indichiamo con y_i e z_i i valori inizialmente calcolati, si può scrivere

$$z = y_i + h\,, \qquad y = z_i + c\,r$$

e cercare di determinare h e c in guisa da soddisfare la (5). Si

(1) Vedasi la 1ª parte della presente comunicazione.

Digitized by Google

vede subito che h senz'altro si elimina, perchè nella (5) compaiono sempre le differenze $y - y_1$; mentre la costante c viene espressa dalla formula seguente, nella quale si sono aboliti, per semplicità di scrittura, gli indici i alle lettere z ed y, che perciò rappresentano qui i valori inizialmente assunti per le due campanature, e si è indicato con M_{ti} il momento calcolato mediante la (5) con i suddetti valori iniziali delle campanature:

$$c = \frac{M_{ti}}{\Delta\omega^2 \int_{r_1}^{R} \sigma r (y - y_1)\, dr - \int_{r_1}^{R} t (r - r_1)\, dr}. \qquad (8)$$

Naturalmente si potrebbero operare sulla precedente formula trasformazioni analoghe a quelle sviluppate al numero precedente, introducendo le ipotesi ivi assunte. Un'analisi fatta sulla base di tali ipotesi porterebbe facilmente a concludere che anche il problema attuale è, nella generalità dei casi, praticamente insolubile, nel senso che i valori di c che la (8) fornisce sono, oltre che molto incerti, costruttivamente inammissibili.

Pisa, 26 aprile 1929, VII.

Digitized by Google

Ricerche sulla resinificazione.

I.

Sulla condensazione dell'aldeide formica con l'uretano ordinario.

Nota di MICHELE GIUA e GIOVANNI RACCIU
presentata dal Socio nazion. residente Felice Garelli.

In una Nota precedente, uno di noi (1) ha studiato l'influenza di alcuni aggruppamenti sulla resinificazione di diversi derivati del cinnamilidenacetofenone, operata dalla luce solare. Riprendendo in questa Nota in esame il fenomeno della resinificazione delle sostanze organiche in relazione con la loro costituzione chimica, abbiamo fermato la nostra attenzione sulla condensazione dell'aldeide formica con l'uretano ordinario, in modo da stabilire un confronto coi prodotti resinosi che si ottengono nella condensazione della stessa aldeide con l'urea, tiourea, ecc., che, come è noto, presentano anche interesse tecnico.

Non crediamo opportuno di riassumere i risultati sperimentali che hanno condotto, in un periodo piuttosto recente, a mettere in evidenza una intima relazione fra costituzione chimica e resinificazione; sia perchè, essendo l'argomento per sè stesso vasto, il solo porre in luce le conclusioni a cui si è pervenuti richiederebbe troppo spazio, sia per il fatto che l'argomento è stato fatto oggetto recentemente di una trattazione sistematica da J. Scheiber e K. Sändig in un volume avente per titolo *Die künstlichen Harze* (2).

(1) GIUA, " Gazz. chim. ital. „ *35*, 567 (1925).

(2) N. 14 della collez. *Chemie in Einzeldarstellungen* edita dalla " Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft „ di Stuttgart (1929).

Digitized by Google

Nella dotta monografia di Scheiber e Sändig non viene presa in esame la reazione che forma oggetto di questa Nota. Essa però era stata descritta quasi contemporaneamente dal Bischoff (3) e da Conrad e Hock (4), i quali, nello studiare la condensazione dell'aldeide formica con l'uretano ordinario, pur avendo notato la formazione di prodotti oleosi, presero solo in esame un composto cristallino, il dimero dell'anidroformaldeideuretano, che si formerebbe in base alla equazione:

$$2\,NH_2 . CO_2C_2H_5 + 2CH_2O \longrightarrow \begin{matrix} C_2H_5O_2C-N--CH_2 \\ | \quad\quad | \\ CH_2-N-CO_2C_2H_5 \end{matrix} + 2H_2O.$$

Secondo Bischoff, Conrad e Hock, il prodotto cristallino fusibile a 100-102° che si ottiene nella reazione cennata, corrisponderebbe alla forma dimolecolare dell'anidroformaldeideuretano monomolecolare, $CH_2 = N - CO_2C_2H_5$. A questa conclusione Conrad e Hock furono condotti dalla determinazione della grandezza molecolare, fatta col metodo ebullioscopico, usando come solvente l'etere.

Abbiamo ripreso lo studio della stessa reazione, in vista di porre in evidenza l'influenza del gruppo azometinico $-N=C<$ sulla resinificazione, proprio in un caso assai più semplice di quello che non appaia da altre reazioni analoghe, quali le condensazioni dell'aldeide formica con l'urea e derivati e, più particolarmente, con le aniline. Facendo avvenire la condensazione dell'aldeide formica in soluzione acquosa (formalina del commercio) con l'uretano ordinario, in presenza di acido cloridrico e in condizioni pressochè identiche a quelle descritte da Conrad e Hock, che non differiscono di molto da quelle seguite dal Bischoff, il prodotto della reazione, come notarono i detti sperimentatori, è costituito da un olio che, lasciato lungamente a sè o all'aria o in essiccatore nel vuoto, ha la tendenza ad ispessire.

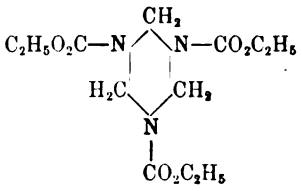
Facendo bollire a lungo il prodotto oleoso della reazione

---

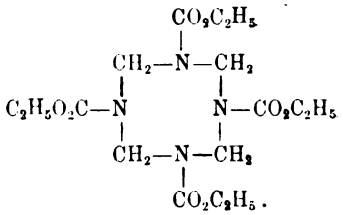
(3) Ber. chem. Gesell. „, *36*, 39 (1903).
(4) Ivi, *36*, 2206 (1903).

Digitized by Google

con acido acetico diluito si ottiene un composto bianco, cristallino, che ha un punto di fusione identico a quello dell'anidroformaldeideuretano di Bischoff e di Conrad e Hock. Nell'analisi di questo prodotto cristallino ottenemmo risultati concordanti coi valori che si calcolano per l'anidroformaldeideuretano, ma la determinazione del peso molecolare col metodo crioscopico dette valori corrispondenti alla formola $(CH_2 = N - CO_2C_2H_5)_3$. Questo trimero cristallino dell'anidroformaldeideuretano può essere quindi rappresentato, analogamente a quanto si fa per il trimero cristallino dell'aldeide formica, il triossimetilene, da una formola ciclica esagonale —



Riscaldando invece il prodotto oleoso della reazione fra aldeide formica e uretano con acido acetico glaciale ed eliminando infine l'acido per evaporazione si ottiene una resina dura, di color giallastro, solubile in benzene, che all'analisi dette valori corrispondenti all'anidroformaldeideuretano, mentre col metodo crioscopico si ottennero per il peso molecolare valori corrispondenti alla formola $(CH_2 = N - CO_2C_2H_5)_4$. Volendo stabilire anche per questo composto una formola ciclica si può ad esso attribuire quella rappresentata dallo schema seguente:



Parte sperimentale.

Gr. 89 di uretano ordinario si disciolgono in gr. 90 di formalina al 40 % e alla soluzione limpida e filtrata così ottenuta

Digitized by Google

si aggiungono cc. 25 di acido cloridrico conc.: agitando, la reazione di condensazione s'inizia rapidamente, mentre la temperatura sale a circa 80°. Dopo che la reazione è terminata si riscalda all'ebollizione in apparecchio a ricadere per almeno tre ore. Anche a caldo il liquido si divide in due strati, di cui uno oleoso, pesante, che col raffreddamento ispessisce. Si aggiunge il doppio volume di acqua e si estrae con etere. Il residuo dell'estratto etereo è costituito da un olio incolore, che a freddo e lasciato a sè diventa sempre più vischioso.

Quest'olio fu disciolto in etere, filtrato ed evaporato il solvente; mantenuto in essiccatore nel vuoto su acido solforico per oltre una settimana, fu analizzato.

Gr. 0,1706 di sostanza dettero gr. 0,2983 di CO_2 e gr. 0,1128 di H_2O; gr. 0,1721 di sost. dettero cc.20 di N (a 12° e 738 mm.)

		Trovato	Calcolato
	C %:	47,76	47,52
per $C_4H_7O_2N$ (101)	H „ :	7,34	6.93
	N „ :	13,52	13,86

Per ottenere il trimero cristallino, gr. 25 del prodotto della reazione si trattano con gr. 75 di acido acetico diluito (gr. 25 di acido acetico glaciale e 50 cc. di acqua) e si riscalda all'ebollizione in apparecchio a ricadere per 4-5 ore. Dopo raffreddamento si aggiunge acqua fino ad intorbidamento e si lascia cristallizzare. Si separano così prismi incolori, che cristallizzati dall'alcool fondono a 101-102°.

All'analisi:

Gr. 0,2004 di sostanza dettero cc. 25 di N (a 15° e 734 mm.)

per $C_{12}H_{21}O_6N_3$ (303)	N %:	Trovato	14,28
		Calcolato	13,86

I. Gr. 0,1087 di sostanza disciolti in gr. 24,1632 di benzene dettero un abbassamento del punto di congelamento di 0°,075.

II. Gr. 0,1533 di sostanza disciolti in gr. 24,1632 di benzene dettero un abbassamento del punto di congelamento di 0°,105.

III. Gr. 0,217 di sostanza disciolti in gr. 24,1632 di benzene dettero un abbassamento dal punto di congelamento di 0°,145.

	I	II	III
Peso molecolare trovato:	299	302	309

Digitized by Google

La sostanza è solubile in alcool, etere, benzene, cloroformio e acetone, pochissimo solubile in etere di petrolio.

Riscaldando parti eguali del prodotto oleoso della reazione e di acido acetico in bagno di sabbia fino ad evaporazione completa dell'acido, il residuo è costituito da una massa colorata in giallo-chiaro, che col raffreddamento solidifica.

All'analisi:

Gr. 0,1940 di sostanza dettero gr. 0,3401 di CO_2 e gr. 0,1108 di H_2O; gr. 0,1265 di sostanza dettero cc. 15,3 di N (a 14° e 739 mm.).

		Trovato	Calcolato
	C % :	47,79	47,52
per $C_{16}H_{28}O_8N_4$ (404)	H „ :	6,34	6,93
	N „ :	13,99	13,86

I. Gr. 0,2164 di sostanza disciolti in gr. 23,4903 di benzene dettero un abbassamento del punto di congelamento di 0°,11.

II. Gr. 0,2881 di sostanza disciolti in gr. 23,4903 di benzene dettero un abbassamento del punto di congelamento di 0°,14.

	I	II
Peso molecolare trovato:	418	438.

Il prodotto resinoso è solubile nei comuni solventi organici tranne l'etere di petrolio.

Torino — Laboratorio di Chimica organica
della R. Scuola d'Ingegneria.

Digitized by Google

La fauna pliocenica di Masserano-Cossato (Biellese).

Nota della Dott.ssa ROSINA ZUFFARDI-COMERCI
presentata dal Socio nazion. residente C. F. Parona.

Lo studio e l'ordinamento della " *raccolta paleontologica Di Rovasenda* „, ricca di parecchie collezioni, specialmente del Cenozoico piemontese, e anche di altre regioni italiane, procedono regolarmente, ponendone sempre meglio in evidenza la ricchezza, la buona conservazione dei fossili — molti dei quali particolarmente preziosi, perchè rari o non ancora descritti — e le eccezionali cure dedicate dal colto e benemerito raccoglitore alla scelta intelligente delle forme degne di essere conservate e studiate.

Delle Collezioni che meritano uno studio particolareggiato e di essere menzionate, fa parte della " raccolta „ quella dei fossili del giacimento pliocenico (*piacenziano*) di Masserano che, essendo rimasti indeterminati, attendevano l'esame del paleontologo. La fauna di Masserano è da molti anni conosciuta: nella grande opera fondamentale Bellardi-Sacco (1), risulta già determinata e illustrata la maggior parte dei molluschi che la costiscono. E non sarebbe il caso di riparlarne, se il materiale in esame non permettesse di aggiungere buon numero di specie al già lungo elenco di quelle riscontrate nello spoglio dell'opera ora ricordata, nonchè di integrarlo coll'aggiungervi nomi di pochi altri fossili non appartenenti alla classe dei molluschi, e un breve studio critico d'interpretazione sopra una notevole forma di gasteropodo, del gen. *Chenopus*, ben rappresentato nella Collezione.

(1) Bellardi L. e Sacco F., *I Molluschi del Piemonte e della Liguria*, in XXX parti. Torino, 1872-1904.

Digitized by Google

Parmi inoltre utile far conoscere, nel suo insieme, questa fauna che certamente è fra le più ricche dei lembi pliocenici subalpini piemontesi e lombardi, e che presenta una composizione abbastanza diversa da quella propria dei giacimenti — pur ricchi di fossili — finemente argillosi; caratteristiche a questo riguardo le faune del Ponte di S. Quirico (M. Fenera) in Val Sesia e di Taino (Angera, Lago Maggiore) (1). Tali differenze sono evidentemente in rapporto con la natura del sedimento fossilifero di Masserano, sabbioso, micaceo, scarsamente argilloso; senza per altro presentare il carattere in generale arenaceo (tipico quello noto del Ponte dei Preti) dei depositi affioranti qua e là al margine dell'apparato morenico frontale d'Ivrea, o che dalle morene sono coperte (2). Né è da trascurare l'altra differenza faunistica, che, mentre le argille fossilifere plioceniche contengono numerosissimi foraminiferi, questi altri più o meno schiettamente sabbiosi ne sono, invece, quasi affatto privi. Nel caso particolare del giacimento di Masserano si può dire ancora che esso va contraddistinto con l'abbondanza dei *Pectunculus* e di valve numerose ed eccezionalmente grandi del *Pectunculus bimaculatus* Poli, sede più frequente delle coloniette dei briozoi. Così, si può segnalare, perchè specie piuttosto rara, l'*Eudolium subfasciatum* Sacc., forma miocenica.

Un lembo pliocenico che offre, come il deposito del ponte di Crescentino (Po), notevoli affinità di fauna con questo di Masserano è quello di Maggiora (Borgomanero), poco al di là della Sesia, nell'alto novarese, anche per il fatto del presentarsi in esso quella forma di *Chenopus* della quale è accennato in seguito. Dà motivo a questa osservazione l'esame di una piccola collezione di fossili, pure del Museo Rovasenda.

---

(1) Parona C. F., *Esame comparativo della fauna dei vari lembi pliocenici lombardi*, " Rend. R. Ist. Lomb. „, 1883; Parona C. F., *Valsesia e Lago d'Orta. Descrizione geologica.* " Atti Soc. It. Sc. Nat. „, XXIX, 1886.

(2) Recentemente il Museo Geologico torinese ebbe in dono un grosso campione fossilifero di arenaria pliocenica trovata a Mazzè (Canavese) nei lavori di una galleria (presa d'acqua per energia elettrica), a circa 60 o 70 m. sotto la sommità della collina.

Digitized by Google

Premesse queste osservazioni, presento l'elenco generale dei fossili componenti la fauna di Masserano, notando che le specie già indicate nell'opera Bellardi e Sacco sono in numero di 188 e che sono 80 quelle aggiunte in base allo studio della Collez. Rovasenda (1).

*Balanus concavus Bronn.

Murex torularius Lmk.
„ polymorphus Br.
Ocenebrina imbricata (Br.)
*Hadriania craticulata (L.)
Triton Doderleini d'Anc.
*Lampusia affine Desh.
*Streptochetus clavatus (Br.)
*Euthriofusus virgineus Grat.
*Aspa marginata (Mart.)
*Phos polygonum (Br.)
Pleurotoma turricula Br.
Surcula intermedia (Brn.)
* „ dimidiata (Br.)
Genota Bonnanii Bell.
Cymatosyrina incrassata (Duj.)
Clavatula rustica (Br.)
„ interrupta (Br.)
*Bathytoma cataphracta (Br.)
Bellardiella emarginata (Donov.)
* „ ? ligustica (Bell.)
*Perotoma histria (Jan.)
„ elegans (Donov.)
Teres anceps (Eichw.)
„ turritelloides Bell.
Raphitoma hispidula (Jan.)
„ submarginata (Bon.)
„ turgida (Forb.)
„ attenuata (Mont.)
„ megastoma (Brugn.)
*Pseudotoma intorta (Br.)
Nassa mutabilis (L.)
Niotha clathrata (Born)
„ Canthrainii (Bell.)
Niotha scalaris (Bors.)
Hima bugellensis (Bell.)
„ planicostata (Bell.)
„ serraticosta (Bronn.)
„ asperata (Cocc.)
Amyda semistriata (Br.)
„ Chiereghinii (Bell.)
Latirus bugellensis Bell.
*Cancilla planicostata (Bell.)
Uromitra plicatula (Br.)
Cypraecassis marginata (De-Serr.)
Semicassis levigata (Defr.)
Tuberculodolium stephaniophorum (Font.)
*Eudolium subfasciatum Sacc.
Malea orbiculata (Br.)
Ficula geometra (Bors.)
„ reticulata Lk.
Natica epiglottina Lk.
Naticina catena Da-Costa
Tectonatica textula (Bon.)
Neverita Josephinia Risso
*Cryptostoma striatum (De Serr.)
*Adiscoacrilla Coppii (De-Boury)
*Terebra acuminata (Bors.)
Fuscoscala Turtonis (Turt.)
Hirtoscala elegans (Risso)
Linctoscala frondicula (Wood W.).
Subula fuscata (Br.)
Myurella pliocenica (Font.)
* „ reticularis (Pecch.).
Subularia subulata (Don.)
*Pyrgolidium internodulum (Wood W.)
Rhombostoma striata Segu.
Niso terebellum (Chemn.).

(1) Le specie segnate con l'asterisco sono citate qui, per la prima volta, come appartenenti alla fauna di Masserano.

Digitized by Google

Odontostomia conoidea (Br.)
Turritodostomia plicata (Mont.)
Macrodostomia submicaelis Sacc.
Auristomia fusulata Sacc.
Ondina? bugellensis Sacc.
Spica Monterosatoi Sacc.
Pyrgulina interstinta (Mont.)
Tragula fenestrata (Forb.)
Chemnitzia Campanellae (Phil.)
Turbonilla lactea (L.)
" postacuticostata? Sacc.
Strioturbonilla densecostata (Phil.)
Pygostelis rufa (Phil.)
Rhingiculella auriculata (Mén.)
*Solarium simplex Brn.
Conuspirus antediluvianus (Brug.)
Chelyconus pelagicus (Br.)
" striatulus (Br.)
" bitorosus (Font.)
*Rhizoconus? virginalis (Br.)
*Strombus coronatus (Defr.)
Chenopus uttingerianus (Risso)
" pespelecani (L.)
" peraraneosus Sacc.
Erato laevis (Don.)
*Solatia piscatoria (Gmel.)
" hirta (Br.)
Bivetia cancellata (L.)
Sveltia varicosa (Br.)
Cerithium vulgatum Brug.
* " varicosum Br.
" crenatum Br.
Bittium reticulatum (Da-Costa)
" exiguum (Montrs.)
" spina (Partsch.)
Monophorus perversus (L.)
Rissoia lineolata Micht.
Apicularia sulzeriana (Risso)
Axinus reticulatus (Mont.)
Rissoina pusilla (Br.)
Zebinella decussata (Mont.)
Turritella tricarinata (Br.)
Haustator vermicularis (Br.)
* " tornatus (Br.)
* " ? Strobelianus (Cocc.)
*Vermetus Deshayesi (May.)
*Tenagodes anguinus (L.)
Torculoidella subvaricosa Sacc.
Petaloconcus intortus (Lk.)
*Xenophora crispa (Koenig.)
*Calyptraea chinensis (L.)
Crepidula gibbosa Defr.
Janacus crepidulus (L.)
*Capulus hungaricus (L.)
Brocchia laevis Brn.
Smaragdia viridis (L.)
* " virgata (Micht.)
Steganomphalus pullus (L.)
*Bolma rugosa (L.)
Oxystele patula (Br.)
Gibbula magus (L.)
Forskalia fanulum (Gmel.)
*Magulus ardens (V. Salis)
Ampullotrochus granulatus (Born.)
" ? cingulatus (Br.)
*Retusa decussata (Bon.)
Scaphander lignarius L.
Jujubinus striatus (L.)
Strigosella strigosa (Gmel.)
Actaeon tornatilis (L.)
" semistriatus (Fèr.)
Actaeonidea achatina (Bon.)
Volvula acuminata (Brug.)
Roxania utriculus (Br.)
*Tinostoma Woodi (Hörn.)
Bulla subampulla D'Orb.
Haminea hydatis (L.)
Bullinella cylindracea (Penn.)
Cylichnina umbilicata (Montg.)
" pliocrassa Sacc.
Dentalium sexangulum Schrit.
*Antale novemcostatum Lmk.
" ? dentale (L.)
*Gadila gadus (Montg.)
*Ostrea edulis (L.)
*Pycnodonta cochlear (Poli)
Anomia ephippium L.
*Monia striata (Br.)
Aequipecten opercularis (L.)
Lissochlamys excisa (Brn.)
Flabellipecten flabelliformis (Br.)
" nigromagnus Sacc.

Digitized by Google

Flabellipecten Bosniaseckii (De St. et Pant.)
Pecten jacobeus (L.)
„ planomedius Sacc.
Radula paucicostata (Sow.)
*Mantellum inflatum (Chemn.)
* „ hians (Gmel.)
*Avicula hirundo (L.)
Pinna pectinata L.
*Modiola adriatica Lmk.
„ mytiloides Brn.
Modiolula phaseolina Phil.
Arca Noe L.
Barbatia modioloides (Cantr.)
*Soldania mytiloides (Br.)
Anadara diluvii (Lk.)
Axinaea bimaculata (Poli)
„ pilosa (L.)
„ insubrica (Br.)
Nucula nucleus (L.)
„ placentina Lk.
*Ledina Bonellii (Bell.)
Glans intermedia (Br.)
Actinobolus antiquatus (L.)
Cardium aculeatum L.
„ echinatum L.
„ erinaceum Lk.
* „ paucicostatum Sow.
Trachycardium multicostatum (Br.)
Ringicardium hians (Br.)
Papillicardium papillosum (Poli)
Laevicardium norvegicum Swains
„ cyprium (Br.)
Nemocardium striatulum (Br.)
Chama gryphoides (Gualt.) L.
Isocardia cor (L.)
Callista chione (L.)
* „ pedemontana (Lk. et Ag.)
Pitar rudis (Poli)
Amiantis Brocchii (Desh.)
Ventricola multilamella (Lk.)
„ alternans (Bon.)
Chamelaea gallina (L.)
Circomphalus plicatus (Gmel.)
Timoclea ovata (Pennt.)
*Clausinella scalaris (Br.)
Gouldia minima (Montg.)
Dosinia lupinus (L.)
Callistotapes vetulus (Bast.)
Psammobia färoënsis (Chemntz.)
Solenocurtus candidus (Ren.)
Azor antiquatus (Pultn.)
*Ensiculus cultellus (L.)
Spisula subtruncata (Da Costa)
Lutraria lutraria (L.)
Corbula gibba Olivi.
* „ revoluta (Br.)
Glycimeris Faujasi (Mén.)
Gastrochaena dubia (Pennt.)
Lucina fragilis (Phil.)
Megaxinus ellipticus (Bors.)
„ transversus (Brn.)
„ bellardianus (Mayr.)
Dentilucina orbicularis (Desh.)
„ borealis (L.)
„ Meneghinii (Desh. et Pant.)
Myrtea spinifera (Montg.)
Jagonia reticulata (Poli)
Loripes lacteus (L.)
Tellina distorta Poli
*Tellinula incarnata (L.)
Moerella donacina (L.)
Macomopsis elliptica (Br.)
Peronaea planata (L.)
Oudardia compressa (Br.)
Arcopagia corbis (Brn)
* „ telata (Bon.)
Syndesmia alba (Wood W.)
* „ longicollus (Sc.)
Abra stricta (Br.)
Thracia pubescens (Pultn.)
„ papiracea (Poli)
„ convexa? (Wood W.)
Stirpulina bacillum (Br.)

*Terebratula ampulla (Br.)

*Lichenopora mediterranea Bl.
*Adeona Heckli Rss.
*Hippaliosina clavula Mnf.
*Schizotheca stellata Seg.
*Peristomella coccinea Abild.

Digitized by Google

*Schizobrachiella sanguinea Norm.
*Lunularia androsaces Micht.
*Callopora Dumerilii Aud.
*Cupuladria canariensis Bk.
*Conopeum Lacroixii Cip.
*Electra elliptica Rss.
* „ concatenata Rss.
*Aetea anguina (L.)
*Diaperaecia dilatans John.

*Ditrupa cornea (L.)
*Protula sp.

*Cladocora Michelottii E. H.

*Cliona celata Top.

*Polystomella striato-punctata Fichtel et Moll.
*Polystomella crispa (L.) (1)
*Amphistegina Lessoni d'Orb.
*Polymorphina gibba d'Orb.
*Robulina calcar (L.)
*Adelosina Duthiersi Sclumb.
*Quinqueloculina oblonga d'Orb.

Osservazioni sul *Chenopus peraraneosus* Sacco.

L'esame di numerosi esemplari di *Ch. pespelecani*, *Ch. Uttingerianus* Risso e *Ch. Uttingerianus* var. *peraraneosa* Sacc. mi permette di tornare su un argomento già ampiamente trattato dal Prof. Vinassa, per quanto riguarda affinità e differenze tra le due specie (2), per segnalare qualche particolare di notevole significato, in rapporto anche al valore di specie o di varietà da attribuire alla forma che il Prof. Sacco distinse col nome di *peraraneosa* (3). Osservo innanzi tutto che *Chenopus Uttingerianus*, *Ch. pespelecani*, *Ch. Uttingerianus* var. *peraraneosa*, con le rispettive loro caratteristiche distintive, coesistono nello stesso giacimento piacenziano di Masserano; ciò che non si accorda con l'affermazione del Vinassa, il quale ritiene il *Ch. Uttingerianus* specie di mare profondo, e il *Ch. pespelecani* invece di litorale: sta il fatto che, nella fauna di Masserano, parecchie altre specie, particolarmente significative, danno impronta di facies litoranea.

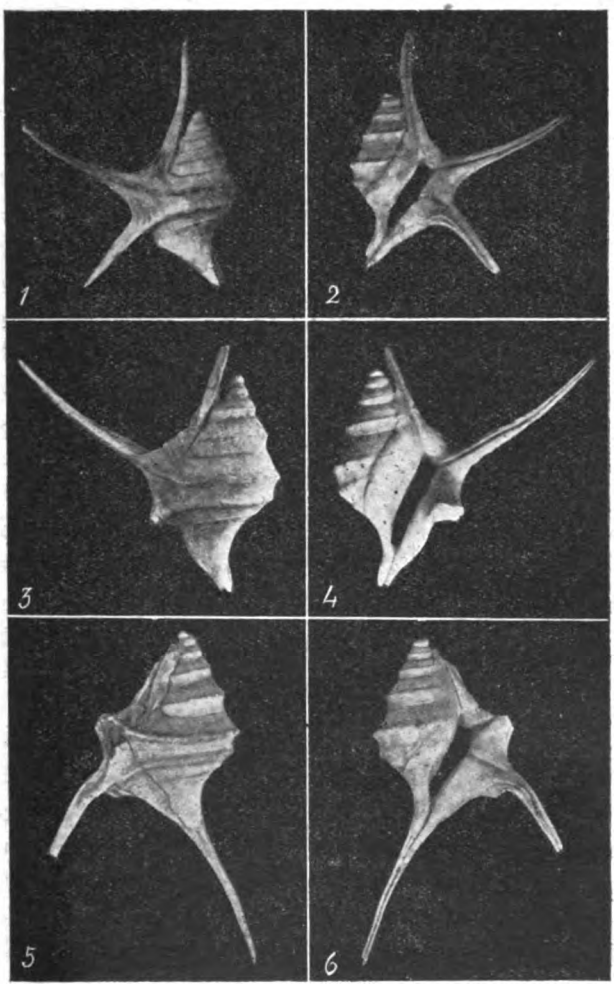
(1) Devo alla cortesia e competenza della collega Sig.na Dott. Anna Martinotti la determinazione dei Foraminiferi.

(2) Vinassa de Regny P. E., *Il Chenopus Uttingerianus* Risso *e il Chenopus pespelecani* L. *del pliocene italiano.* " Boll. Soc. Malacologica ital. „ vol. XX, pagg. 21-44, 1896.

(3) Sacco F., *I Molluschi terziarii del Piemonte e della Liguria*, parte XIV, pag. 26. Tav. II, fig. 23, 1893.

Digitized by Google

La forma *peraraneosa*, negli esemplari di Masserano (figg. 3 e 4), si presenta con caratteri più differenziati di quanto appaia nella diagnosi e nella figura data dal Prof. Sacco. Pur condividendo



le opinioni del Prof. Vinassa sul concetto giustamente ampio di specie e sulla problematica utilità della moltiplicazione eccessiva delle specie e delle varietà, io ritengo che la forma *peraraneosa* debba essere conservata non solo, ma portata anzi al

Digitized by Google

grado di specie. Mi induce a questo modo di vedere lo studio di buon numero di individui conservati nella Collezione Rovasenda, provenienti dai due giacimenti d'identica facies litologica e paleontologica di Masserano e Maggiora. In questi esemplari, infatti, la lunghezza delle *dita*, la quale, anche in esemplari con dita non integre, giunge a 30 mm.; il ridursi in estensione dell'area interdigitale (che è massima nel *Ch. pespelecani*, media nel *Ch. Uttingerianus*, minima nella forma *peraraneosa*); la forma delle dita esili, leggermente arcuate ed acuminate a guisa di spinosità; le dimensioni degli esemplari quasi costantemente minori e l'aspetto sempre più delicato; sono tutte prerogative che valgono come caratteri differenziali per questa forma in confronto con le due specie, sia nei loro rappresentanti fossili come nei viventi, quali sono ad esempio figurati nella Monografia del Roussillion (1). I caratteri dell'angolo apicale e dell'accrescimento spirale, per quanto in diminuite proporzioni, seguono sufficientemente quelli del *Ch. Uttingerianus*, nei limiti di variabilità che a questi caratteri debbonsi concedere (da 16 a 20 mm. di altezza si contano 7 anfratti); è invece ben definita la differenza per quanto riguarda la prima carena dell'ultimo anfratto: essa è a rilievo continuo e rugoso, con la quasi scomparsa dei nodi, ben visibili, invece, nel *Ch. pespelecani* e rintracciabili ancora nel *Ch. Uttingerianus*. Le dita sono tutte e quattro assai lunghe e subeguali, in nessun esemplare completamente conservate nella loro lunghezza totale — evidentemente in causa della loro grande fragilità —; esse irradiano dall'espansione labiale con angolo assai ampio; la prima, diretta verso l'apice, supera l'altezza della spira e la sovrasta, incurvata verso il fianco posteriore. Tutte le dita sono percorse interamente dal canale boccale.

Considerando che i caratteri differenziali tra la forma *peraraneosa* e le due specie considerate sono più notevoli che non le differenze tra le due specie stesse, mi sembra di poter concludere che al *Ch. peraraneosus* Sacco possa attribuirsi il valore di specie a sè.

---

(1) Bucquoy, Dautzenberg, Dollfus, *Mollusques marins du Roussillon*. Tome I: *Gasteropodes*, Tav. 23. Paris, 1886-87.

Digitized by Google

Queste osservazioni e considerazioni valgono anche — mi sembra — riguardo alla forma del pliocene di M. Mario attribuita dal Dr. Cerulli-Irelli al *Ch. Uttingerianus* (1).

In complesso la forma descritta, e qui figurata, presenta rimarchevoli affinità col più piccolo *Chenopus mirandus* Cossmann et Peyrot (2) (tipo del nuovo sottogenere *Triacantium* degli stessi Autori) dell'Aquitaniano, così da lasciar pensare alla possibilità, che il pliocenico *Ch. peraraneosus* ne sia un derivato evolutivo.

Il *Ch. peraraneosus* Sacco si trova, con le medesime caratteristiche di quelli di Masserano (figg. 3 e 4) e di Maggiora, per quanto a caratteri leggermente attenuati, ad Albenga (Liguria) (figg. 1 e 2), Rocca d'Arazzo (Astigiano) (figg. 5 e 6). Gli esemplari esaminati, provenienti dalle varie località, sono 18.

---

(1) Cerulli-Irelli S., *Fauna malacologica mariana.* " Palaeontographia Italica „, XVII, pag. 274, Tav. XXVI, figg. 26-28, 1911.

(2) M. Cossmann et A. Peyrot, *Conchologie néogénique de l'Aquitaine* (" Actes de la Soc. Linn. de Bordeaux „, LXXIV-LXXV), Tom. IV, livr. II, pag. 346, tav. VIII, figg. 20-21, 1924.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 16 Giugno 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: PEANO, GRASSI, PANETTI, SACCO, POCHETTINO e il Segretario REPOSSI;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: RUFFINI, BRONDI, EINAUDI, VIDARI, JANNACCONE e il Segretario FAGGI.

Scusano l'assenza i Soci: MATTIROLO, VALLAURI, STAMPINI e LUZIO.

Il Presidente si onora di comunicare all'Accademia che è giunta l'approvazione Reale alla nomina di S. A. R. il Duca d'Aosta a Socio nazionale residente e che il relativo diploma sarà in questi giorni consegnato a S. A.

Il Presidente comunica quindi un telegramma di S. E. BOSELLI, giunto in risposta al telegramma inviatogli dall'Accademia in occasione del suo 91° genetliaco, ed i telegrammi di ringraziamento del Dott. Mons. GAMBARO e Prof. JEMOLO, ai quali fu comunicata l'assegnazione del Premio Gautieri.

Digitized by Google

Il Presidente invita il Tesoriere ad esporre i dati del Bilancio consuntivo 1928-29. Il Socio PANETTI premette che le spese straordinarie che furono fatte nel corso dell'esercizio si poterono affrontare in grazia del fondo pure straordinario concesso dal Ministero e dal Municipio per i buoni uffici del Socio RUFFINI e lo ringrazia.

Il Bilancio consuntivo viene in seguito letto ed approvato senza discussione.

Il Tesoriere legge poi il Bilancio preventivo 1929, il quale viene pure approvato dopo alcune osservazioni dei Soci EINAUDI e RUFFINI sugli assegni al Tesoriere ed ai Segretari, cui rispondono il Tesoriere e il Presidente.

Il Tesoriere infine dà relazione dei Bilanci dei vari Premi accademici, bilanci che si presentano complessivamente in buone condizioni.

L'Accademia, associandosi al Presidente, tributa un vivo plauso al Tesoriere.

Il verbale è letto ed approvato seduta stante.

Gli Accademici Segretari:
EMILIO REPOSSI
ADOLFO FAGGI

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 23 Giugno 1929 (VII)

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. C. F. PARONA
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, PANETTI, PONZIO, HERLITZKA, POCHETTINO, BOGGIO, GARELLI, VALLAURI e il Segretario REPOSSI.

Scusano la loro assenza i Soci: D'OVIDIO e MAJORANA.

Il verbale dell'adunanza precedente è letto ed approvato senza osservazioni.

Il Socio HERLITZKA presenta in omaggio all'Accademia il Vol. IV della Serie II delle *Ricerche sperimentali,* pubblicate dal Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Torino sotto la sua direzione.

Il Socio PANETTI presenta pure in omaggio all'Accademia un suo opuscolo dal titolo: *La navigazione aerea come mezzo di trasporto*; e il Socio MATTIROLO un opuscolo di D. BOIS.

Il Socio PEANO presenta, per l'inserzione negli *Atti,* una Nota della dott.ssa Maria CIBRARIO, dal titolo: *Proposizioni universali e particolari e definizione del limite*; ed il Socio GARELLI

Digitized by Google

un'altra Nota dei dott. Michele Giua e Giovanni Racciu, dal titolo: *L'influenza dei sostituenti sulla stabilità di alcuni composti ciclici.*

Il Segretario Repossi presenta, per l'inserzione negli *Atti*, anche a nome del Socio Ponzio, una Nota della dott.ssa Elsa Debenedetti, dal titolo: *Studio cristallografico dell'epidoto del Giasset in Val d'Ala (Piemonte)*; ed una sua Nota dal titolo: *Studio mineralogico dei terreni agrari del Vercellese,* e ne illustra brevemente il contenuto.

Il Presidente comunica che sono pervenute, per la pubblicazione, una Nota del Socio Majorana, dal titolo: *Attenuazione dissimmetrica di energia raggiante in un mezzo assorbente*; ed una Nota del Socio corrisp. Colomba, dal titolo: *Osservazioni litologiche e mineralogiche sul giacimento di Castiglione (Traversella).* Entrambe compariranno negli *Atti*.

Il Presidente comunica in seguito una lettera del Socio Majorana, il quale, riconoscendo di non potere per i propri impegni prender parte regolarmente ai lavori dell'Accademia, prega di volerlo passare alla categoria dei Soci nazionali non residenti; ciò che, a termine dello Statuto, viene fatto.

La Classe di Scienze fisiche può quindi disporre di un nuovo posto di Socio nazionale residente.

Il Segretario riassume brevemente una circolare dell'*Institut International de Coopération intellectuelle,* nella quale questo domanda il parere dell'Accademia circa la possibilità e l'opportunità di creare a Torino e in Italia dei centri di cooperazione intellettuale. Il Presidente mette la circolare a disposizione degli Accademici e incarica il Socio Peano di raccogliere i pareri dei Soci e di riferirne alla Presidenza, perchè questa possa rispondere all'invito ricevuto.

Il Presidente infine, constatando che nessun Socio ha presentato lavori da pubblicare nelle *Memorie* dell'Accademia, propone che si proceda alla pubblicazione nelle *Memorie* stesse

Digitized by Google

della terza ed ultima parte della " *Flora Sardoa* „ *di M. A. Plazza (1795), illustrata dal Prof.* A. Terracciano, ora defunto; della quale opera, le prime due parti furon già pubblicate nelle nostre *Memorie*. La relazione favorevole alla pubblicazione essendo già stata approvata, l'Accademia accetta senz'altro la proposta del Presidente.

Il presente verbale è letto e approvato seduta stante.

Digitized by Google

LETTURE

Proposizioni universali e particolari, e definizione di limite.

Nota della Dott.ssa MARIA CIBRARIO
presentata dal Socio nazionale residente G. Peano.

Varie proposizioni di matematica, fra cui la definizione di limite, contengono una successione di affermazioni universali e particolari. Scambiando le affermazioni universali colle particolari, e mutando l'ordine loro, si muta il valore delle proposizioni. Per esaminare queste questioni sono molto utili le notazioni di logica matematica.

Notazioni di logica.

Se a e b sono delle classi, $a \supset b$ indica la proposizione universale: " ogni a è b ". Esempio: " uomo $\supset$ mortale "; " quadrato $\supset$ rettangolo "; " multiplo di 6 $\supset$ multiplo di 2 ".

$a \supset b$ si può anche leggere: " la classe a è contenuta nella classe b ", ossia b contiene a. Il segno $\supset$ è appunto l'iniziale invertita della parola *contiene*.

Il segno $\supset$, con questo valore, si trova in GERGONNE, 1816, ed in ABEL. Usato nel *Formulario Matematico*, è divenuto di uso quasi universale fra i cultori della logica matematica.

$a \cap b$ indica la classe comune agli a e ai b. Il segno $\cap$ si legge *e*, ed ha alcune proprietà del segno $\times$ (moltiplicato) dell'aritmetica, ma non si può confondere con esso. Invece di $a \cap b$ scriveremo semplicemente ab, quando non ci sia equivoco. Esempio:

$$\text{rettangolo} \cap \text{rombo} = \text{quadrato};$$
$$(\text{multiplo di } 2) \cap (\text{multiplo di } 3) = (\text{multiplo di } 6).$$

In queste proposizioni si trova il segno $=$ col significato logico, più generale di quello aritmetico.

Digitized by Google

$\exists\, a$ indica la proposizione " esistono degli a „, o " la classe a non è nulla „. Quindi $\exists\,(a \cap b)$ vale " esistono degli a che sono b „; cioè esprime la proposizione particolare: " qualche a è b „.

$x \in a$ indica la proposizione singolare: " x è un a „. Il segno $\in$ è l'iniziale della parola greca *ἐστί*. Esempio:

$$6 \in (\text{multiplo di } 3).$$

I segni $\supset$, $\exists$, $\in$ rappresentano le proposizioni universale, particolare, singolare, secondo Aristotele: *καθόλου, ἐν μέρει, καθ' ἕκαστον*.

Se p_x è una proposizione contenente la variabile x, cioè una condizione in x (p. es. un'equazione), allora $x \ni p_x$ indica la classe degli x che soddisfano la condizione p_x.

In luogo di:

$$(x \ni p_x) \supset (x \ni q_x)$$

" ogni soluzione della condizione p_x è pure soluzione della condizione q_x „, si scrive:

$$p_x \cdot \supset_x \cdot q_x,$$

" da p_x si deduce, per ogni x, q_x „.

E se l'ipotesi p_x e la tesi q_x non contengono altra lettera variabile, oltre la x, si può sottintendere l'indice x al segno $\supset$, e scrivere:

$$p_x \cdot \supset \cdot q_x$$

" da p si deduce q „.

I punti separano l'ipotesi dal segno di deduzione, e questo dalla tesi; e fanno ufficio equivalente a quello delle parentesi. La notazione dei punti, più comoda, è dovuta a Leibniz. I punti ripetuti : .˙. equivalgono alle parentesi ripetute.

Col segno $\ni$ una deduzione si trasforma in proposizione universale tra classi.

Ricorderò ancora che:

$$x \ni (x \in a) = a$$

" gli x che soddisfano alla condizione $x \in a$, formano la classe a „. Ciò spiega l'origine del segno $\ni$ dal segno $\in$ rovesciato, perchè le due operazioni sono inverse.

Digitized by Google

Nell'espressione " $x \ni (p_x)$ „, " gli x che soddisfano la condizione p_x ", la lettera x è *apparente,* cioè quell'espressione non muta se cambiamo il nome della variabile x in y. Parimenti, sono apparenti le lettere che figurano come indici al segno di deduzione.

Nell'enunciato completo di un teorema, tutte le lettere sono apparenti.

Proposizioni congiunte alla definizione di limite.

Sia x una successione di quantità reali. In virtù dell'identità:

$$\lim x = a \,.=.\, \lim \operatorname{mod}(x - a) = 0,$$

potremo limitarci a considerare il limite 0 di una successione di quantità positive o nulle.

In alcune questioni seguenti, conviene anche considerare l'∞ come una quantità. Perciò introdurremo i simboli:

Q = quantità (positiva),
Q_0^{∞} = Q, compreso lo zero e l'infinito,
N_0 = numero naturale, compreso lo zero.

Supponiamo che x sia una successione di Q_0^{∞}, i cui indici siano 0, 1, 2..., cioè $x_0, x_1, x_2 \ldots$ sono Q_0^{∞}. Nei simboli del Formulario:

$$x \in Q_0^{\infty} \mathrm{F} N_0$$

" x è un Q_0^{∞} funzione degli N_0 „.

Per definire la proposizione $\lim x = 0$, occorre introdurre tre variabili m, n, h e dire che nell'ipotesi: $m \in N_0 \,.\, n \in N_0 \,.\, h \in Q$, seguirà la tesi: $x_{m+n} < h$.

Ognuna delle lettere m, n, h può essere accompagnata dall'affermazione universale o particolare, cioè da uno dei segni $\supset$, $\exists$, vale a dire da una delle due parole *ogni* e *qualche*, così che si avranno otto accoppiamenti delle lettere m, n, h coi segni $\supset \exists$. Le lettere m, n, h si possono permutare in 6 modi; ma siccome scegliemmo le lettere in modo che ipotesi e tesi fossero sim-

Digitized by Google

metriche in m ed n, potremo sempre supporre che la lettera m preceda la n; avremo così a considerare solo tre permutazioni m, n, h; m, h, n; h, m, n. Si presentano così 24 proposizioni. Che queste proposizioni abbiano vario significato, fu osservato da varii autori. Vedasi ad esempio:

PEANO, *Sulla definizione di limite,* " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", 1913;

CASSINA, *Sul concetto di limite,* " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", 1928.

Nel presente lavoro ci proponiamo appunto di studiare le proposizioni differenti, così ottenute.

Considero dapprima la permutazione degli indici m, n, h.

(1) $\supset_m \supset_n \supset_h$. Così indico la disposizione: universale in m, universale in n, universale in h. In disteso:

$$m \in N_0 . \supset_m . \therefore . n \in N_0 . \supset_n : h \in Q . \supset_h . x_{m+n} < h ,$$

" per ogni m, si ha che per ogni n, ne risulta che per ogni h sempre si deduce la tesi ". Ma la proposizione:

$$h \in Q . \supset_h . x_{m+n} < h$$

" x_{m+n} è minore di ogni quantità prefissata h (tanto piccola quanto si vuole) " significa: $x_{m+n} = 0$. Quindi la proposizione si riduce a:

$$m, n \in N_0 . \supset_{m,n} . x_{m+n} = 0 ,$$

" qualunque siano m ed n, sempre $x_{m+n} = 0$ ", ossia tutti i termini della successione sono nulli.

(2) $\exists_m \supset_n \supset_h$ " per qualche m si ha che per ogni n e per ogni h risulta la tesi ", per quanto si è detto in (1) vale:

$$\exists N_0 \cap m \ni [n \in N_0 . \supset_n . x_{m+n} = 0]$$

" si può determinare un indice m, dal quale in poi tutti i valori della funzione sono nulli ".

Indicando Vx il valore intero di x (o Ex di altri autori), un esempio è dato dalla funzione $V(5^x)$, ove ad x attribuiamo i valori $1, 2 \ldots$ Essa assume i valori $5, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0 \ldots$

Digitized by Google

In una nota:

G. PEANO, *Sugli ordini degli infiniti*, " R. Accademia dei Lincei ", 16-VI-1910, l'Autore fa corrispondere ad ogni successione x un nuovo ente, che chiama " fine x ", e che definisce così:

$$\text{fine } x > \text{fine } y \,.\, = \exists\, N_0 \cap m \ni (n \in N \,.\, \supset_n \,.\, x_{m+n} > y_{m+n})$$

$$" \quad = \quad " \qquad " \qquad " \quad = \quad "$$

$$" \quad < \quad " \qquad " \qquad " \quad < \quad "$$

Si definiscono le operazioni algebriche:

$$\text{fine } x + \text{fine } y = \text{fine } (x + y),$$

$$\text{fine } x \times \text{fine } y = \text{fine } (x \times y), \text{ ecc.}$$

I fini delle successioni non soddisfano al postulato di Archimede. Con questa convenzione, la proposizione (2) si riduce a:

$$0 = \text{fine } x.$$

Esiste una regola di logica, che dirò *A*:

A. Da una proposizione universale si deduce la particolare.

Nel nostro caso, da $\supset_m$ si deduce $\exists_m$, e quindi (1) $\supset$ (2).

(3) $\supset_m \exists_n \supset_h$ " per ogni m e per qualche n e per ogni h si ha la tesi ". Per quanto si è detto in (1) vale:

$$m \in N_0 \,.\, \supset_m \,.\, \exists\, N_0 \cap n \ni [x_{m+n} = 0].$$

" Comunque sia l'indice m si può determinare un indice successivo $m + n$, tale che il valore corrispondente di x sia zero ".

Per esempio la funzione $x - (\sqrt{x})^2$, ove x assume i valori $0, 1, 2 \ldots$, costituisce una successione

$$0, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1 \ldots,$$

che soddisfa alla condizione (3).

Dalla proposizione (2) si deduce la (3) conformemente ad una regola di logica (che però non sta scritta nei trattati di logica scolastica).

Digitized by Google

B. Dalla proposizione particolare-universale segue la proposizione universale-particolare.

Nel nostro caso, da $\exists_m \supset_n$ segue $\supset_n \exists_m$, e permutando m ed n, a causa della loro simmetria, si ha $\supset_m \exists_n$.

Se indico con Fine x la classe dei valori di fine z, ove z è una successione estratta dalla x, cioè composta di alcuni termini di x, allora la proposizione (3) si può esprimere:

$$0 \in \text{Fine}\, x.$$

La classe Fine $[x - (\forall \overline{x})^2]$ è costituita da tutti gli N_0.

(4) $\exists_m \exists_n \supset_h$ " per qualche m e per qualche n e per ogni h vale la tesi „ significa:

$$\exists N_0 \cap m \ni [\exists N_0 \cap n \ni (x_{m+n} = 0)],$$

cioè qualche termine della successione x è nullo.

Se indico con $x(N_0)$ l'insieme, o classe, dei valori assunti da x, al variare dell'indice nel campo N_0, la proposizione (4) si riduce a:

$$0 \in x(N_0),$$

" 0 è uno dei valori assunti da x „.

Dalla (3) si deduce la (4) colla regola *A*.

Riassumendo: (1) $\supset$ (2) $\supset$ (3) $\supset$ (4).

(5) $\supset_m \supset_n \exists_h$ " per ogni m e per ogni n e per qualche h vale la tesi „, e in disteso:

$$m \in N_0 . \supset_m : n \in N_0 . \supset_n . \exists Q \cap h \ni (x_{m+n} < h).$$

Ora la proposizione $\exists Q \cap h \ni (x_{m+n} < h)$ significa che x_{m+n} è finito. Dunque la proposizione (5) significa " ogni termine è finito „.

(6) $\exists_m \supset_n \exists_h$ significa " da un certo posto in poi, tutti i termini sono finiti „.

(7) $\supset_m \exists_n \exists_h$ significa: " da ogni posto in poi la successione ha valori finiti „.

Digitized by Google

(8) $\exists_m \exists_n \exists_h$ significa: " la successione ha dei valori finiti ".

Per la regola *A* si ha:

$$(1) \supset (5), \quad (2) \supset (6), \quad (3) \supset (7), \quad (4) \supset (8),$$

e per le regole *A* e *B* si ha:

$$(5) \supset (6) \supset (7) \supset (8).$$

Considero ora la permutazione degli indici m, h, n:

(9) $\supset_m \supset_h \supset_n$ vale la (1) $\supset_m \supset_n \supset_h$, in virtù di una regola di logica:

C. Due affermazioni universali successive si possono commutare.

(10) $\exists_m \supset_h \supset_n$ vale la (2) $\exists_m \supset_n \supset_h$, perchè basta commutare $\supset_h \supset_n$ in $\supset_n \supset_h$, colla regola *C*.

(11) $\supset m \exists_h \supset_n$ " per ogni m e per qualche h e per ogni n vale la tesi " e in disteso:

$$m \in N_0 . \supset_m . \exists Q \frown h \ni [n \in N_0 . \supset_n . x_{m+n} < h]$$

significa " comunque si prenda m si può determinare un h maggiore di ogni valore di x_{m+n} ", ossia " il limite superiore dei valori di x da ogni m in poi, è finito ".

Se, come si è supposto, x è una successione, cioè funzione degli N_0, questa proposizione dice che il limite superiore di tutti i valori di x è finito, $l'x(N_0) \in Q_0$. Ma se supponiamo invece che x sia funzione di tutti i numeri positivi, cioè $x \in Q\,F\,Q$, questa proposizione (11) può essere vera, senza che sia finito il limite superiore dei valori di x. Per esempio la funzione $1/x$, ove $x \in Q$, soddisfa alla condizione (11), ma il limite superiore dei suoi valori è ∞.

Colla regola *A* si ha (1) $\supset$ (11), e colla regola *B* si ha (11) $\supset$ (5).

(12) $\exists_m \exists_h \supset_n$ significa: " da un certo m in poi, il limite superiore dei valori di x è finito ".

Digitized by Google

Colla regola *A* si ha: (2) = (10) ⊃ (12), (11) ⊃ (12), e per la regola *B* si ha: (12) ⊃ (6).

(13) $\supset_m \supset_h \exists_n$ " per ogni m e per ogni h e per qualche n segue la tesi „ e per disteso:

$$m \in N_0 . \supset_m : h \in Q . \supset_h . \exists N_0 \cap n \ni [x_{m+n} < h].$$

La proposizione $\exists N_0 \cap n \ni [x_{m+n} < h]$ significa: " qualche valore di x, dal posto m in poi, è minore di h „, cioè $l_1 x (m + N_0) < h$, " il limite inferiore dei valori di x da m in poi, è minore di h „.

E se ciò avviene per ogni h, cioè $\supset_h \exists_n$, segue: " il limite inferiore dei valori di x, da m in poi, è zero „. E infine $\supset_m \supset_h \exists_n$ vale:

$$m \in N_0 . \supset_m . l_1 x (m + N_0) = 0 ,$$

e questo si esprime nel Formulario con:

$$0 \in \mathrm{Lm}\, x$$

" lo zero appartiene alla classe limite degli x „.

Se x è una successione di numeri reali, e a un numero reale, si definisce:

$$a \in \mathrm{Lm}\, x . = . 0 \in \mathrm{Lm}\ \mathrm{mod}\ (x - a).$$

La classe $\mathrm{Lm}\, x$ è la classe formata dai limiti di tutte le successioni che si possono estrarre da x ed aventi limite.

Mentre una successione può mancare di limite, esiste sempre la classe limite, includendovi anche l'∞. La classe limite si trova in Cauchy (V. *Formulario*, tomo V, pagg. 215, 222 e 224). Poi l'idea di classe limite andò quasi in disuso nei trattati di calcolo.

Però i due elementi $\max \mathrm{Lm}\, x$ (massimo della classe limite) e $\min \mathrm{Lim}\, x$ (minimo della classe limite) con nomi diversi e definiti direttamente furono considerati da Dini (a. 1878) e da altri autori.

Sulla classe limite vedasi:

G. Sannia, *I limiti di una funzione in un punto limite del suo campo,* " Mem. Acc. di Torino „, 25 aprile 1915.

Per la regola di logica *B* si ha (3) ⊃ (13).

Digitized by Google

(14) $\exists_m \supset_h \exists_n$, per quanto si è visto nella spiegazione della (13), significa:

$$\exists N_0 \cap m \ni [l_1 x (m + N_0) = 0]$$

" esiste un indice m tale che il limite inferiore dei valori di x, da m in poi, è zero „.

Per la regola A: (2) = (10) $\supset$ (14), (13) $\supset$ (14); e per la regola B: (4) $\supset$ (14).

(15) $\supset_m \exists_h \exists_n$ è identica alla (7) per la regola di logica:

D. Due proposizioni particolari successive si possono commutare.

(16) $\exists_m \exists_h \exists_n$ è identica alla (8), per la stessa regola D.

Considero ora la permutazione degli indici h, m, n.

(17) $\supset_h \supset_m \supset_n$ è identica alla (1), per la regola C.

(18) $\exists_h \supset_m \supset_n$ significa: " esiste una quantità positiva h maggiore di ogni valore della data successione x „, cioè: " il limite superiore dei valori di x è finito „:

$$l' x (N_0) \in Q_\theta, \quad \text{ossia} \quad \infty \text{ non } l' x (N_0).$$

Colla regola B, (18) $\supset$ 11; colla A, (1) = (17) $\supset$ (18).

(19) $\ni_h \exists_m \supset_n$ " per ogni h e per qualche m e per ogni n vale la tesi „ e per disteso:

$$h \in Q \cdot \supset_h \cdot \exists N_0 \cap m \ni [n \in N_0 \cdot \supset_n \cdot x_{m+n} < h].$$

Questa è la definizione del limite e si scrive:

$$\lim x = 0.$$

Per la regola di logica B si ha:

$$(2) \supset (19); \quad \text{e} \quad (19) \supset (13).$$

(20) $\exists_h \exists_m \supset_n$ vale la (12) per la regola D.

(21) $\supset_h \supset_m \exists_n$ vale la (13) per la regola C.

Digitized by Google

(22) $\exists_h \supset_m \exists_n$ " per qualche h e per ogni m e per qualche n vale la tesi „ e per disteso:

$$\exists Q \cap h \ni \{m \in N_0 . \supset_m . \exists N_0 \cap n \ni [x_{m+n} < h]\}.$$

La proposizione $\exists N_0 \cap n \ni (x_{m+n} < h)$ significa che il limite inferiore dei valori di x da m in poi è minore di h, e quindi è finito, cioè $l_1 x (m + N_0) \in Q_0$, e poichè ciò avviene per ogni valore di m, ricordando quanto si è detto nella spiegazione della (13), risulta che la classe limite della successione x contiene qualche elemento finito, cioè la proposizione (22) significa: $\exists Q_0 \cap Lm\, x$, o anche ∞ non $= \lim x$.

Per la regola *A* si ha: (13) = (21) $\supset$ (22), e per la regola *B*: (22) $\supset$ (15) = (7).

(23) $\supset_h \exists_m \exists_n$ significa:

$$h \in Q . \supset_h . l_1 x (N_0) < h,$$

cioè:

$$l_1 x (N_0) = 0.$$

Si ha, per la regola *B*: (14) $\supset$ (23).

(24) $\exists_h \exists_m \exists_n$ vale la (8) per la regola *D*.

Così esaminammo le 24 proposizioni che contengono gli stessi elementi della definizione di limite, ma che ne differiscono per l'ordine delle proposizioni universali e particolari.

Tra queste passano numerose relazioni, che si deducono colle regole di logica *A*, *B*, *C*, *D*, viste a proposito delle proposizioni (2), (3), (9) e (15).

Tra le proposizioni considerate, oltre la definizione di limite, sono notevoli quelle che contengono fine, la classe Fine, e la classe Limite.

Si è visto, per la regola *C*, che due affermazioni universali successive si possono commutare e ridurre anche ad una sola, avendo il segno $\supset$ gli indici delle due affermazioni. Lo stesso avviene di due affermazioni particolari successive, per la regola *D*. Ma una affermazione universale non si può commutare colla particolare; sussiste solo la regola *B*.

Digitized by Google

Dirò "grado logico„ di una proposizione contenente più segni $\supset$, $\exists$ il numero minimo di questi segni, cioè il numero delle successioni dei segni $\supset$, $\exists$.

In matematica vi sono poche proposizioni di grado zero:

$$2 + 3 = 5.$$

La maggior parte delle proposizioni è di grado uno, e contiene un solo segno $\supset$.

La definizione del limite di una funzione è la proposizione (19), di terzo grado logico. La definizione del limite inferiore (l_1) data dalla (23) è di secondo grado logico.

Notizie storiche.

EUCLIDE, libro V, definizione 4, liberamente tradotto, dice: "Se a e b sono grandezze omogenee, e $a < b$, esiste un numero naturale m, tale che $ma > b$„; in simboli:

$$a, b \in \mathrm{Q} \,.\, a < b \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{N} \cap m \ni (ma > b),$$

proposizione di secondo grado logico; basandosi su questo principio, Euclide dimostra proposizioni relative all'area del circolo, a volumi, ecc. In sostanza si usa il principio: l'area del cerchio è il limite superiore dei poligoni inscritti, ed il limite inferiore dei poligoni circoscritti.

ARCHIMEDE, *Della sfera e del cilindro,* libro I, postulato 5, riporta la proposizione precedente, ora nota col nome di "postulato di Archimede„, e la ripete nella prefazione al libro "delle linee spirali„; e se ne serve per trovare l'area del cilindro, del cono, della sfera, ecc.

La definizione di derivata esige il limite (lim) di una funzione. Questa idea è chiara in Newton, Leibniz, Eulero, e matematici di quel tempo; tutte le formule erano esatte, ma la loro definizione spesso si riduceva a sinonimi: quantità infinitesime, evanescenti, ecc.

NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* liber primus, scholium, parlando del rapporto di quantità evanescenti, dice:

Digitized by Google

" Objectio est quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio ; quippe quae, antequam evanuerunt, non est ultima ; ubi evanuerunt, nulla est „.

Versione libera: " Alla definizione di tangente ad una curva, come congiungente due punti coincidenti, si può fare l'obbiezione: prima che i due punti coincidano, quella retta non è ancora tangente; e quando i due punti coincidono, quella retta non c'è più „.

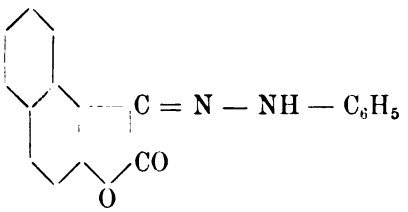
Secondo il citato articolo del prof. Peano, la prima enunciazione della definizione di limite colle tre variabili apparenti, universale-particolare-universale, rimonta a circa il 1870. Ivi si trovano riportate molte altre definizioni precedenti e seguenti.

Digitized by Google

Influenza dei sostituenti sulla stabilità di alcuni composti ciclici.

Nota di MICHELE GIUA e GIOVANNI RACCIU
presentata dal Socio nazion. residente Felice Garelli.

Il 4, 5—benzocumarandione, ottenuto per la prima volta da uno di noi (1) e in seguito studiato da Staudinger (2), Fries (3), Stollé (4) e Saftien (5), a causa del suo carattere di lattone dell'acido 2-ossi-1-naftilgliossilico, si presta assai bene per lo studio della stabilità o meno del nucleo cumarandionico rispetto ad alcuni sostituenti. Giua e De Francisci hanno trovato che il 4, 5-benzocumarandione, per azione della fenilidrazina, forma dapprima un monofenilidrazone al quale si deve attribuire la seguente costituzione:

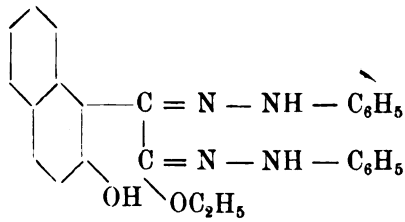


Tale formola viene confermata dalla identità del monofenilidrazone cennato, ottenuto per azione diretta della fenilidra-

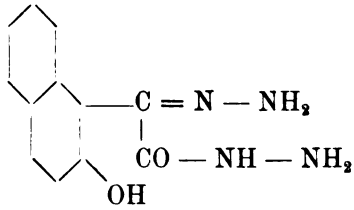
(1) Giua, « Gazz. chim. ital. », 47, I (1927); Giua e De Francisci, *54*, 510 (1924).
(2) « Helv. Chim. Acta », *4*, 394 (1921).
(3) « Ber. chem. Gesell. », *54*, 715 (1921).
(4) « Ber. chem. Gesell. », *54*, 1213 (1921).
(5) « Ber. chem. Gesell. », *58*, 1958 (1925).

Digitized by Google

zina sul 4, 5-benzocumarandione, col composto preparato per altra via da M. Passerini (6). Con un eccesso di fenilidrazina si ha l'apertura dell'anello pentagonale e dalla soluzione alcoolica si ottiene un composto i cui dati analitici coincidono con la formula seguente:



In questa Nota si prende in esame il comportamento dello stesso benzocumarandione verso l'idrazina. Per azione di un eccesso di idrazina sulla soluzione alcoolica del benzocumarandione si ottiene l'idrazone-idrazide dell'acido 2-ossi-1-naftilgliossilico, della formula:

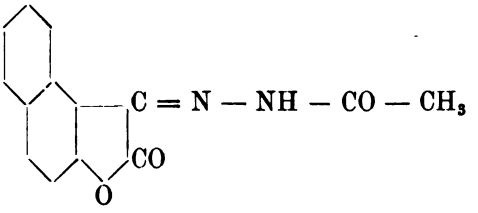
(I) 

Trattando il benzocumarandione con una molecola di idrato di idrazina non si riesce ad ottenere il 3-monoidrazone allo stato puro, per quanto si abbia indizio della formazione di un prodotto di condensazione. Allo stato di acetilderivato si ottiene invece facilmente dal composto precedente per azione dell'anidride acetica che insieme alla reazione acetilante verso l'aggruppamento idrazinico in posizione 3 elimina il residuo idrazidico e ciclizza in seguito a derivato del cumarandione. I dati analitici per il prodotto che si forma per azione dell'anidride ace-

(6) « Gazz. chim. ital. », *54*, 189 (1924).

Digitized by Google

tica sull'idrazone-idrazide del 4,5-benzocumarandione concordano per un composto della formola:

(II) 

Questa reazione trova riscontro nel comportamento dell'anilanilide dell'acido 2-ossi-1-naftilgliossilico, chiarito recentemente dal Saftien.

Parte sperimentale.

Gr. 5 di 4, 5-benzocumarandione, cristallizzato dall'acido acetico, si disciolgono in 250 c. c. di alcool e alla soluzione così ottenuta si aggiungono gr. 6 di idrato di idrazina al 50 %. La reazione s'inizia subito con sviluppo di calore e dopo poco si nota la separazione di un'abbondante sostanza biancastra, che, raccolta e seccata all'aria, pesa gr. 3,8. Si cristallizza dall'alcool e si ottengono lamelle bianche argentee che fondono a 195-196° con decomposizione.

All'analisi:

Gr. 0,2713 di sostanza dettero gr. 0,5865 di CO_2 e gr. 0,1075 di H_2O.
Gr. 0,1546 di sostanza dettero c. c. 31,2 di N (a 22° e 750 mm.).

		Trovato	Calcolato
per $C_{12}H_{12}O_2N_4$	C %	58,96	59,01
	H "	4,43	4,96
	N "	23,02	22,90

La sostanza, che corrisponde alla formula (I), è solubile nei comuni solventi organici, tranne l'etere di petrolio. Con acido solforico concentrato dà una intensa colorazione violetta.

Trattando gr. 1,5 di idrazone-idrazide con 15 c. c. di anidride acetica per debole riscaldamento si separa una sostanza gialla, che cristallizzata dall'acido acetico fonde a 244°.

Digitized by Google

All'analisi:

Gr. 0,1049 di sostanza dettero gr. 0,2539 di CO_2 e gr. 0,0424 di H_2O.
Gr. 0,1040 di sostanza dettero c. c. 10,4 di N (a 12° e 732 mm.).

		Trovato	Calcolato
per $C_{14}H_{10}O_3N_2$	C %	66,01	66,10
	H "	4,49	3,93
	N "	11,6	11,02

La sostanza è solubile nei comuni solventi organici; poco solubile in etere di petrolio; con acido solforico conc. dà una intensa colorazione rosso-vinosa.

Torino, Laboratorio di Chimica organica
della R. Scuola d'Ingegneria.

Digitized by Google

Studio mineralogico dei terreni agrari del Vercellese.

Nota del Socio nazion. resid. EMILIO REPOSSI

Dalla Stazione Sperimentale di Risicoltura di Vercelli mi furono comunicati per lo studio numerosi campioni di terreni agrari provenienti dalle varie parti del territorio vercellese, ossia della regione compresa tra le falde della zona montuosa ed i fiumi Dora Baltea, Po e Sesia.

I campioni furono prelevati alla superficie del terreno e mi furono trasmessi già preventivamente spogli dello scheletro ghiaioso e sabbioso grossolano e dei frustoli vegetali più visibili.

Scopo precipuo del lavoro la determinazione mineralogica dei componenti sabbiosi del terreno, sia in riguardo alla loro natura, sia in riguardo al loro stato di conservazione, ch'è strettamente legato ad alcuni dei caratteri praticamente più importanti del terreno agrario.

Data l'indole del lavoro ed i suoi scopi essenzialmente applicativi, per i quali la determinazione della maggior parte dei componenti rari od eccezionali del terreno non ha importanza apprezzabile, le ricerche si poterono mantenere entro un àmbito relativamente modesto, lontane dalle minuziosità richieste da uno studio completo dei singoli materiali alluvionali, e poterono quindi procedere con una certa speditezza.

Di ciascun campione, sopra una quantità determinata (10-20 gr.), fu operata innanzitutto una prudente levigazione per allontanarne la parte colloïdale argillosa e tutto il pulviscolo cristallino che per la sua estrema finezza non si presta ad una determinazione microscopica fatta con gli ordinari ingrandimenti. Parte dello scheletro sabbioso così ottenuto (e pesato) venne

Digitized by Google

sottoposta ad un rapido trattamento con acido cloridrico molto diluito, prima a freddo e poi a caldo, ottenendone così sia una opportuna lavatura, necessaria per le determinazioni ottiche, sia la constatazione rapida della eventuale presenza di carbonati.

Tanto il residuo non lavato come quello lavato furono quindi stacciati con una reticella metallica di 440 maglie per cm^2. La parte più grossolana fu volta per volta esaminata con una lente binoculare ($\times$ 20) per la determinazione ad occhio dei componenti più sicuramente riconoscibili, ed anche per separarne ed esaminarne con tutte le risorse della tecnica mineralogica i componenti di dubbia o difficile determinazione. La parte stacciata, formata da granuli di dimensioni opportune per la diretta determinazione al microscopio, fu invece divisa ulteriormente in due porzioni mediante bromoformio ($d = 2,9$), ottenendo così da una parte la concentrazione di tutti i minerali leggeri (quarzo, calcedonio, felspati, calcite, dolomite, ecc.) e dall'altra i così detti minerali pesanti. Quest'ultima separazione, preferita agli ordinari metodi di concentrazione dei minerali pesanti perchè più delicata e perfetta, rende non solo più rapida la determinazione dei singoli componenti, ma permette anche un più esatto apprezzamento della loro frequenza e, dato lo scopo del lavoro, è completamente sufficiente. In nessun caso infatti si dovette ricorrere ad ulteriori separazioni gravimetriche per la sicura determinazione dei vari minerali, bastando sempre la diagnosi microscopica fatta, per ciascuna porzione, sopra un non grande numero di preparati (quattro o cinque, rispondenti a 2000-2500 granuli all'incirca).

Le indagini sui terreni del Vercellese, così condotte, non hanno la pretesa di essere, sotto il riguardo strettamente scientifico, completamente esaurienti. Non è impossibile, sebbene poco probabile, che qualcuno dei componenti rari delle sabbie sia sfuggito al controllo, e occorre notare che il prelevamento dei campioni, fatto in superficie e con indirizzo agrario piuttosto che geologico, può essere in qualche caso inadatto a darci un'idea completa della composizione dei vari lembi alluvionali; ma, pur tuttavia, parmi che la somma di lavoro compiuta rappresenti un non trascurabile contributo allo studio mineralogico dei ter-

Digitized by Google

reni, al quale ora si dà un'importanza non molto inferiore a quella dello studio chimico, fisico e organico dei terreni stessi.

I campioni di terreni agrari studiati, provenienti da località distribuite regolarmente nel territorio vercellese di pianura, rappresentano cronologicamente tutti i terreni del quaternario, ossia l'olocene recente (alluvium) e antico (diluvium superiore) e il plistocene (diluvium medio e inferiore), non escluso il morenico o almeno il terreno di rimaneggiamento morenico.

La provenienza delle alluvioni si può già a priori ritenere quadruplice: esistono cioè nel Vercellese alluvioni padane, alluvioni sesiane, alluvioni biellesi e alluvioni aostane; le quali naturalmente si posson trovare in qualche caso, diremo così, allo stato puro e in casi più frequenti variamente mescolate. Quest'ultima condizione si verifica soprattutto nelle alluvioni che abbiam chiamate padane, le quali nel territorio vercellese sono in realtà costituite in parte da materiali di provenienza aostana e in parte da materiali di provenienza più occidentale. Mescolanze si hanno pure tra le alluvioni aostane e quelle biellesi, dovute in parte anche al rimaneggiamento che i torrenti biellesi più occidentali hanno fatto delle morene dell'anfiteatro d'Ivrea. Anche per questa ragione i materiali di provenienza aostana sono molto largamente diffusi nel territorio vercellese.

Le alluvioni sesiane pure sono limitate ad una non larga striscia di alluvium che costeggia la Sesia prima della sua confluenza col Cervo e con l'Elvo. Dopo di questa confluenza abbiamo alluvioni miste sesiane-biellesi e più in basso forte mescolanze anche con alluvioni della Dora, le quali ultime invero sembrano largamente estese su tutta la parte meridionale del territorio vercellese: ciò che è d'accordo col declivio generale di questa porzione di piano diluviale e con l'andamento di tutti i rivi che la percorrono, orientati da nord-ovest a sud-est.

Ma se questa è la distribuzione generale delle alluvioni, posson darsi casi, e si danno in realtà, in cui la provenienza del materiale non è prevedibile o non è spiegabile con le considerazioni alle quali abbiamo accennato. L'esame mineralogico dello scheletro sabbioso di un terreno, confrontato con la natura petrografica delle rocce dei vari bacini fluviali, tenendo conto

Digitized by Google

soprattutto delle rocce eventualmente sviluppate in un solo bacino, può fornirci un documento sicuro di provenienza. Parve però ad ogni modo prudente ed opportuno confortare le deduzioni ricavabili da questo confronto, studiando le alluvioni attuali dei corsi d'acqua principali che bagnano o attraversano il territorio vercellese, ed a questo scopo furono per ciascuno di essi prelevati e studiati appositi campioni di sabbia viva.

È poi da notarsi che l'analisi mineralogica delle sabbie attuali ci offre un altro termine di confronto necessario. Non dobbiamo infatti dimenticare che per lo studio del suolo agrario interessa non solo la composizione mineralogica attuale dello scheletro sabbioso, ma anche la composizione primitiva. Occorre cioè stabilire, fin dove sia possibile, quali siano i minerali che sono parzialmente o interamente scomparsi dal terreno dal momento in cui l'alluvione si è formata sino ad oggi. Questa constatazione si può fare anche tenendo conto semplicemente del fatto che le sabbie vercellesi sono tutte costituite dagli stessi minerali essenziali, ossia sono qualitativamente pressapoco eguali, almeno nella maggioranza dei casi, e differiscono solo per le quantità relative dei diversi costituenti o per la presenza di qualche minerale subordinato. Ma è evidente che lo studio della composizione attuale delle alluvioni ci permette in ogni caso di metterci su una base più sicura e più completa.

E questo confronto è tanto più opportuno, a proposito dei terreni del Vercellese, in quanto questi appartengono, come s'è detto, a tutti i diversi livelli del quaternario; attraverso i quali è stato in qualche caso possibile accompagnare gradualmente ne' suoi vari stadi l'alterazione dei minerali del terreno.

Un lavoro consimile, con ben diversa competenza, si proponeva di fare il compianto prof. Artini sopra i terreni agrari del Milanese, e lo aveva iniziato con un suo studio sulla brughiera lombarda, inserito nel volume *Le Brughiere* (1). In questo studio l'Artini ha preso in esame tre campioni di terreno del diluvium

(1) Pubblicato nel 1927 in onore del prof. Angelo Menozzi in occasione del 50° anniversario della sua laurea.

Digitized by Google

superiore, due del diluvium medio e due del diluvium inferiore, provenienti da vari punti del Gallaratese e del territorio a nord di Monza. I risultati ai quali Egli è giunto con quella straordinaria acutezza d'indagine che gli era propria trovano una perfetta corrispondenza con quelli che risultano dalle mie ricerche: ciò che, se da un lato conforta il mio studio, dall'altro prova che le osservazioni dell'Artini hanno invero una portata generale e vanno prese per base per ogni studio del genere.

Quali siano le vicende attraverso le quali passano i componenti minerali del terreno appare chiaro quando si confronta con la composizione delle alluvioni fresche la composizione delle alluvioni del quaternario antico, rappresentate nel Vercellese dai terreni delle *baragge* tipiche (n. 3, 4, 5). In queste, in modo perfettamente analogo a quello notato dall'Artini per il terreno di *groana*, la sostanza calcarea è interamente scomparsa, i feldspati sono tutti profondamente alterati e trasformati in argilla, la idratazione e l'ossidazione di tutto quanto è ossidabile e idratabile sono complete.

Il processo di alterazione si concreta in una profonda idrolisi, in ambiente ossidante, con intenso dilavamento dei prodotti solubili costituiti dai composti dei metalli alcalini e alcalino-terrosi (1).

Come è noto, questo processo viene ormai convenzionalmente indicato col nome di *ferrettizzazione*. Esso risulta infatti caratterizzato dalla trasformazione in ferrici di tutti i composti ferrosi e dalla integrale conservazione, insieme con l'allumina, del ferro, che si osserva spesso concentrato in forma di noduli limonitici duri entro il terreno ferrettizzato e che dà a questo un'intensa e tipica tinta ocracea.

Nei terreni appartenenti ai vari livelli del quaternario questo quadro di alterazione va gradualmente disegnandosi, e noi, studiando lo scheletro sabbioso di ciascuno di essi, assistiamo, si può dire, alle vicende dei vari componenti minerali del terreno; qualcuno dei quali appare sotto questo riguardo particolarmente significativo.

---

(1) E. Artini, op. cit., pag. 11.

Digitized by Google

I minerali sui quali l'Artini richiama in modo speciale l'attenzione per i terreni del Milanese sono i *feldspati*, gli *anfiboli*, i *granati*, la *biotite*, i *carbonati* e l'*apatite*.

Dei *feldspati* nota innanzitutto la alterabilità molto maggiore nei termini poveri di silice che nei termini ricchi; tanto che i plagioclasi basici sono alteratissimi o addirittura scomparsi anche nei terreni relativamente recenti. L'*ortoclasio* e sopra tutto il *microclino* hanno una resistenza molto maggiore.

Queste osservazioni appaiono perfettamente confermate dall'esame dei terreni del Vercellese, in cui la riduzione progressiva dell'elemento feldspatico, del resto logica e prevedibile, parmi netto e regolare. Nei terreni di ciascun tipo d'alluvione i *plagioclasi sodico-calcici* sono sempre notevolmente più scarsi dell'*ortoclasio* ed in qualche caso scompaiono del tutto, mentre permane ancora una percentuale discreta di quest'ultimo. Il *microclino*, come già altra volta osservai (1), nelle alluvioni del Vercellese è un elemento importante solo per quelle di provenienza sesiana, tanto da costituire con la sua frequenza uno dei caratteri distintivi delle sabbie della Sesia in confronto con tutte le altre, che lo contengono solo in percentuali nettamente inferiori. Ora m'è parso di notare che la riduzione del microclino avvenga con una rapidità assai minore di quella degli altri feldspati. E non posso esprimermi in modo più reciso unicamente perchè nel Vercellese alluvioni sicuramente sesiane molto antiche non ne esistono e il confronto dovette esser limitato a quello fra le sabbie attuali e le alluvioni del diluvium medio.

Nelle alluvioni sesiane e in quelle che scendono dalle colline porfiriche tra Cossato e Gattinara entra come componente abbastanza abbondante la pasta felsitica rosea. Anche per questa valgono le osservazioni fatte sui feldspati acidi.

L'Artini, nel lavoro citato come in altri antecedenti, e già prima di Lui il Salmojraghi hanno insistito a lungo sul comportamento dell'orneblenda, in cui, oltre alla progressiva riduzione,

(1) E. Repossi, *Osservazioni mineralogiche sopra alcune sabbie del sottosuolo della pianura presso Novara* (" Atti Accad. delle Scienze di Torino ,, vol. LXIII, 1928).

Digitized by Google

si possono osservare caratteristiche forme di alterazione rappresentate, come è noto, dalle cuspidi di corrosione che si disegnano alle estremità dei cristalli e sui margini delle crepe entro le quali s'insinua l'alterazione.

La progressiva riduzione nella percentuale dell'orneblenda come di tutti gli altri anfiboli verde chiaro o incolori (tremolite) si osserva abbastanza nettamente anche nelle varie alluvioni del Vercellese e non di rado si hanno anche esempi di forme cuspidate (alluvioni del Cervo e Biellesi in genere); ma sopra tutto mi parve di rilevare la frequenza di vere forme di succhiatura degli anfiboli, i quali specie in certi terreni si presentano solitamente in esili individui coi margini e le estremità arrotondati, mentre nelle sabbie attuali sono sempre in forma di schegge a spigoli vivi.

In tutte le alluvioni studiate, ma in particolar modo in quelle sesiane e biellesi, è componente abbastanza frequente e caratteristico l'*orneblenda bruna*. Anch'essa subisce la sorte degli altri anfiboli.

Il *glaucofane* invece, la cui frequenza è in certo modo reciproca di quella degli anfiboli bruni, ossia aumenta notevolmente dalle alluvioni sesiane a quelle della Dora Baltea, di cui è in tutte le sue forme un componente di abbondanza veramente caratteristica, mi sembra notevolmente più resistente degli altri anfiboli. Non vi si notano infatti con sicurezza nè la riduzione di quantità nelle alluvioni antiche nè le forme di corrosione così caratteristiche degli anfiboli verdi.

Il *granato*, come nota l'Artini, si comporta in modo perfettamente analogo a quello degli anfiboli verdi. La riduzione progressiva della sua quantità si rileva non meno agevolmente, poichè nella generalità delle alluvioni vercellesi è un componente altrettanto abbondante e non di rado parmi persino più abbondante della stessa orneblenda. La corrosione degli individui di granato è spesso caratteristica: questi son talvolta ridotti a veri scheletri di cristalli, e pur non di rado vi si nota la faccettatura rilevata in essi dall'Artini.

La *biotite* in tutte le alluvioni del Vercellese è un componente relativamente molto scarso: ciò che del resto è in perfetto

Digitized by Google

accordo con la natura petrografica dei bacini da cui provengono le alluvioni stesse, scavati in buon parte nella zona dei gneiss-Sesia eminentemente muscovitici. La trasformazione in " mica dorata , è la regola in tutte le alluvioni non attuali.

L'Artini nota la scomparsa assoluta dell'*apatite* e dei carbonati nei terreni del diluvium antico.

Per quanto riguarda l'*apatite* noto che si tratta di un componente sicuramente presente nelle alluvioni fresche, ma sempre in quantità molto scarsa : tanto che la sua constatazione richiede di solito l'esame accurato di diversi preparati. Non ho trovato mai l'apatite nei terreni di baraggia e neppure nei terreni del diluvium medio e superiore : ma, dato l'indirizzo del presente lavoro, non posso dare a questa constatazione negativa un grande valore.

La scomparsa dei carbonati nei terreni del diluvium antico è assoluta. Per i terreni più recenti, in cui, data la provenienza delle alluvioni vercellesi, la calcite originaria è solo eccezionalmente presente in quantità apprezzabile, si trova invece con qualche maggiore frequenza la *dolomite*. Ciò ch'è confermato dal fatto che spesso col trattamento con acido cloridrico diluito l'effervescenza si ottiene solo a caldo.

Nelle alluvioni del Milanese studiate dal Salmojraghi e dall'Artini i pirosseni, sia rombici che monoclini, sono componenti scarsissimi o addirittura eccezionali. Di guisa che questi Autori non fanno nessuna osservazione sul loro grado di alterabilità.

Nelle alluvioni del Vercellese invece, e specialmente nelle alluvioni biellesi e sesiane, i cui bacini d'origine sono ampiamente intagliati nelle rocce gabbro-dioritiche della " zona d'Ivrea,, i pirosseni sono spesso quasi altrettanto abbondanti come gli anfiboli. Predominano nelle alluvioni i *pirosseni rombici*, tanto facilmente riconoscibili pel loro pleocroismo rosso-verde (iperstene-enstatite), ma non mancano neanche i monoclini.

A me parve di osservare che i pirosseni subiscano vicende non diverse da quelle degli anfiboli verdi, sia in riguardo alla riduzione di quantità nelle alluvioni antiche sia in riguardo alle forme di corrosione. In un campione prelevato a Buronzo (diluvium sup.), relativamente molto ricco di orneblenda bruna e di

Digitized by Google

pirosseni rombici, si osservano frequenti granuli di iperstene nettamente cuspidati e non dissimili da quelli orneblendici.

Se questi sono i principali componenti alterabili del terreno agrario, si possono pure elencare diversi componenti i quali resistettero perfettamente alle azioni disgreganti che si manifestarono nelle alluvioni dal quaternario antico sino ad ora. Oltre al quarzo, sono da enumerarsi soprattutto i minerali del gruppo epidoto, la muscovite, i minerali del gruppo clorite-serpentino, la tormalina, lo zircone, il rutilo, la magnetite e l'ilmenite.

Pel *quarzo* non occorre spender parola. Lo stesso si potrebbe ripetere per il *calcedonio* organogeno, il quale però nei terreni del Vercellese è veramente eccezionale e limitato esclusivamente ai terreni dei dintorni di Villa del Bosco ed alle alluvioni del torr. Roasenda, che scendono da questo tratto collinesco dove si trova il noto affioramento di calcari liasici (1) carichi di spicule di spugne.

I minerali del gruppo *epidoto-zoisite* sono interessanti per la relativa abbondanza con la quale si trovano nelle alluvioni del Vercellese. Sono frequenti specialmente gli epidoti propriamente detti, ma non mancano, anzi sono talvolta altrettanto abbondanti i termini zoisite-clinozoisite, del quale ultimo minerale si trovano non di rado, anche nei terreni antichi, individui con la zona parallela ad *y* perfettamente conservata, che permette di farne una diagnosi sicura.

La quantità di questi minerali contenuta nelle alluvioni di varia età non sembra diversa, e se pur riesce difficile stabilirne un relativo aumento nelle alluvioni antiche, depauperate dei componenti alterabili, è però certo che non c'è una diminuzione paragonabile a quella degli anfiboli e, tanto meno, a quella dei feldspati.

La stessa affermazione si può ripetere per la *muscovite*, la quale è pure generalmente abbastanza abbondante nelle alluvioni

(1) S. Franchi, *Le pietre da Coti di Villa del Bosco nel Biellese* (" Rassegna Miner. „, vol. XXI, n. 3, Torino, 1904).

Digitized by Google

del Vercellese, e per le *cloriti*, per le quali anzi mi parve di notare un aumento di percentuale nelle alluvioni antiche.

La *tormalina*, lo *zircone* e il *rutilo* si trovano in individui perfettamente intatti anche nelle alluvioni più ferrettizzate. E parmi che le cose non vadano diversamente neppure per la *magnetite* e l'*ilmenite*, componenti spesso altrettanto e più abbondanti dei tre citati. In non rari casi si osservano ottaedrini perfetti di magnetite anche nei terreni più antichi.

Tutti questi componenti inalterabili, ed altri meno frequenti o addirittura eccezionali, non hanno che un'importanza assolutamente indiretta nello studio delle modificazioni dello scheletro sabbioso nei terreni agrari. Ragione per la quale, stabilita la composizione che potrebbe dirsi normale di ciascuna alluvione, si sono, nel presente studio, osservati particolarmente i primi. Nella tabella che riassume nel consueto modo i risultati delle varie determinazioni hanno quindi valore specialmente i numeri riferiti ai minerali alterabili.

Fatte le debite limitazioni e tutte le riserve del caso, il grado di alterazione di un'alluvione può essere rappresentato con larga approssimazione dalla percentuale di argilla che è contenuta nel terreno agrario. Se non si può certo affermare che tutta l'argilla contenuta nel terreno si sia formata in posto, è però sicuro che la parte di essa alla quale si può attribuire questa origine secondaria è sempre cospicua. Sarebbe quindi molto interessante il poter determinare con precisione l'argilla colloidale del terreno. Ma sfortunatamente, come ognuno sa, questa determinazione è in ogni caso molto imprecisa, riuscendo fra l'altro difficilissimo separare con sicurezza l'argilla colloidale dallo scheletro sabbioso finissimo, avente un grado di dispersità non molto minore di quello dei colloidi propriamente detti.

Dato questo fatto e dato anche lo scopo del presente lavoro, si è creduto opportuno limitare la determinazione alla percentuale approssimata dello scheletro grossolano, ottenuto, come s'è detto, mediante prudente levigazione di una quantità determinata del terreno secco, preso sempre nelle medesime condizioni. I campioni trasmessimi per lo studio erano già stati preventivamente seccati per semplice esposizione all'aria e stacciati

Digitized by Google

in modo che nessun granulo minerale conservato superasse un millimetro e mezzo all'incirca di diametro.

All'atto pratico questa determinazione, pur tanto grossolana, diede risultati abbastanza soddisfacenti, soprattutto pel fatto che la riduzione della percentuale dello scheletro sabbioso macroscopico nei terreni di mano in mano più antichi si verifica in misura molto considerevole e che appaiono quindi netti i distacchi da un terreno all'altro. Sono in seguito riportati i risultati per ciascun terreno. Basti ora notare che, mentre nei terreni dell'alluvium e del diluvium superiore lo scheletro sabbioso, determinato nel modo indicato, diede percentuali oscillanti fra il 35 e il 45 per cento, giungendo qualche volta a superare anche il 50 %, nei terreni di baraggia tale percentuale discese sino al 10 %.

Senza dunque voler dare a questa determinazione un valore che non può in nessun modo avere, perchè troppe sono le cause primarie e secondarie che possono influire sulla percentuale delle varie parti, classificate in ordine di grandezza, che costituiscono mineralogicamente un terreno, l'esperienza fatta sui terreni del Vercellese dimostrerebbe ch'essa può dare, caso per caso, un indizio apprezzabile sull'antichità di un'alluvione.

La medesima osservazione si potrebbe fare sul componente ocraceo del terreno, di cui del resto si tien già conto quando, nel riconoscimento ad occhio di un terreno, si parla di grado più o meno avanzato di ferrettizzazione.

***

Nella tabella posta in fine al presente lavoro sono esposti nel consueto modo i risultati dell'esame mineralogico sia delle sabbie vive sia dello scheletro sabbioso dei vari terreni. Non è forse inutile però riassumere prima brevemente i caratteri che mi sembrano più salienti di ciascuna alluvione e di ciascun gruppo di terreni.

Sabbia della Sesia (A).

Il campione esaminato appare alquanto eccezionale, perchè molto ricco di elementi pesanti: i componenti che affondano in

Digitized by Google

bromoformio ($d = 2.9$) rappresentano all'incirca il 50 % in volume della sabbia.

Già in altro lavoro ho messo in evidenza i caratteri che mi sembrano salienti delle sabbie di origine sesiana e che servono a distinguerle da quelle biellesi (1). Lo studio attuale conferma pienamente i risultati allora conseguiti. La sabbia sesiana studiata è innanzitutto distinta dall'abbondanza relativamente grande di tre componenti: il *microclino*, il *pirosseno rombico* e l'*orneblenda bruna*; ai quali si potrebbe aggiungere anche la *sillimanite*. In qualunque preparato compare ordinariamente, già nel primo campo esaminato, il microclino tra gli elementi leggeri e gli altri due fra i minerali pesanti.

Nel campione esaminato appare abbondante anche il *granato*, ma questa sua relativa abbondanza è forse dovuta al carattere alquanto eccezionale del campione stesso, in cui gli elementi pesanti sono certo concentrati in misura superiore al normale.

Come caratteri negativi, e sempre limitandoci ai minerali di maggiore e più costante diffusione, credo di poter citare la relativa scarsità degli *anfiboli verdi*, del *glaucofane* e dell'*epidoto*.

Sabbia del Roasenda (B).

Le caratteristiche di questa sabbia stanno essenzialmente nell'abbondanza dei componenti che derivano dallo sfacelo dei porfidi, formanti quasi per intero il bacino d'alimentazione del Roasenda. Il colore stesso della sabbia, marcatamente rossastro, ne è indice.

Il componente predominante, in quantità superiore anche al quarzo, è la *pasta felsitica* rosea. Compare in una certa misura anche la *sericite* giallo-verdognola.

Relativamente scarso, in confronto a quanto ci si potrebbe aspettare, il *calcedonio* organogeno (spicule di spugne), ch'è invece abbondantissimo nei terreni di Villa del Bosco.

Gli altri componenti fanno pensare che le sabbie attuali del Roasenda derivino in parte dal rimaneggiamento del diluvium

(1) Nota citata.

Digitized by Google

antico, in cui è probabile ci sia stata una notevole mescolanza tra i materiali locali e i materiali sesiani e biellesi.

Sabbia del Cervo (C).

La sabbia del Cervo ha un colore grigio-rossastro. Essa parmi caratterizzata da una notevole abbondanza degli *elementi feldspatici*, che sono tutti rappresentati, *microclino* compreso, e dal predominio assoluto degli *anfiboli verdi* su tutti gli altri. Non mancano gli *anfiboli azzurri* e neppure quelli bruni, ma sono molto scarsi.

Relativamente abbondanti lo *zircone*, la *titanite* e l'*apatite*, che sono, specialmente questi ultimi, ordinariamente molto scarsi nelle sabbie del Vercellese.

Gli *epidoti* sono scarsi, ma contano una quantità notevole di *zoisite-clinozoisite*; pure scarsi i *pirosseni*.

Sabbia dell'Elvo (D).

Non ho potuto avere in esame un campione di sabbia viva dell'Elvo, ma credo pur tuttavia di potere indicare i caratteri generali ricavandoli dall'esame di un campione di alluvioni recenti preso sopra Quinto Vercellese.

I caratteri salienti delle sabbie dell'Elvo sono dati, per quanto riguarda gli elementi leggeri, dalla mancanza o dalla grande scarsità del *microclino*, mentre gli altri feldspati sono abbastanza abbondanti e tutti rappresentati.

I *pirosseni* sono tutti assai scarsi, mentre gli *anfiboli verdi* e quelli chiari, presenti in buona misura, prevalgono nettamente sugli *anfiboli azzurri*. L'*orneblenda bruna* tipica sembra mancare, mentre si trova qualche anfibolo verde-bruno.

La *mica* è quasi tutta *muscovite* e non molto abbondante, almeno nel campione esaminato.

Sabbia della Dora Baltea (E).

La sabbia della Dora ha una tinta grigia, fredda, più chiara nell'insieme e ben distinta da quella delle sabbie precedenti.

Le sue caratteristiche più salienti si possono così riassumere: l'elemento feldspatico è prevalentemente *ortoclasio*, mentre

Digitized by Google

il *microclino* è scarsissimo; la *mica* è assai abbondante (almeno nel campione esaminato, preso presso Saluggia) e quasi interamente *muscovite*; *epidoto-zoisite, anfiboli verdi* e *glaucofane* pure abbondanti, mentre diventano rari o rarissimi gli *anfiboli bruni* ed i *pirosseni* in genere, tra i quali non si notano più gli *ipersteni* intensamente pleocroici, frequenti ad esempio nelle sabbie sesiane. Compaiono in certa misura i *carbonati*.

Fra tutti questi caratteri uno dei più facilmente constatabili è l'abbondanza di glaucofane, per il quale la sabbia della Dora sembra emergere su tutte le altre del Vercellese.

Come altri caratteri singolari, si può citare la non rara presenza dei *granati gialli* e di *cloritoide*, e l'assenza completa o quasi completa delle *sillimanite*.

Sabbia del Po (F).

Il campione studiato fu prelevato a Crescentino, alla confluenza del Po con la Dora. La sabbia ha un colore grigio freddo non molto dissimile da quello delle sabbie della Dora, che del resto sono qui naturalmente mescolate in larga misura con le sabbie di provenienza occidentale.

Anche in questo campione appare come carattere più spiccato l'abbondanza di *muscovite* e di *anfiboli verdi* e *azzurri*. Il *glaucofane*, almeno nel campione studiato, sembra però meno abbondante che nelle sabbie della Dora, con un netto distacco. Sembrano invece alquanto più abbondanti i *carbonati romboedrici*. Scarsissimi ancora il *microclino*, i *pirosseni rombici*, la *biotite* e gli *anfiboli bruni*. Un po' più frequenti i *pirosseni monoclini* e la *tormalina*. Per gli altri componenti non ci sono differenze apprezzabili con sicurezza con una ricerca relativamente sommaria, quale è quella fatta nel presente studio, che si propone appunto di rilevare solo le più spiccate caratteristiche di ogni alluvione.

Terreno di Villa del Bosco e di Roasio (1 e 2).

Questi due terreni si staccano nettamente dagli altri che descriveremo in seguito. Si tratta infatti di terreni collineschi (il secondo proviene da un vigneto), vicini per di più agli affio-

Digitized by Google

ramenti triasici e liasici di questa plaga. Caratteristica più spiccata di essi la presenza, in percentuale abbastanza forte, specie nel primo, di *carbonati* e di *calcedonio* organogeno, e, naturalmente, di elementi dei porfidi.

I carbonati sono in parte *calcite* e in parte forse anche maggiore *dolomite*.

Il *calcedonio organogeno* sembra essere esclusivamente rappresentato da spicule di spugne, i cui frammenti in forma di cilindretti cavi hanno il loro piccolo tubicino riempito di ocra.

Fra gli elementi dei porfidi predomina la *pasta felsitica* rosea. È pure presente il *quarzo* caratteristico di queste rocce, talvolta in cristallini perfetti. Manca invece l'*ortoclasio* abbastanza fresco, e così pure mancano l'elemento plagioclasico e il microclino ancora ben riconoscibili.

Scarsissimi gli elementi anfibolici e pirossenici, come pure il granato.

Tra le miche abbonda specialmente la *biotite* alterata (la così detta " mica dorata „) e non manca la *sericite*.

Tanto l'uno quanto l'altro terreno sono assai ricchi di parte argillosa e minuta, che viene scacciata con la levigazione, e di grumi limonitici, i quali dànno al terreno una forte tinta ocracea. Il residuo, lavato con acido cloridrico, ha un caratteristico colore roseo.

Terreni di baraggia (Buronzo-Masserano) (3-4-5).

I terreni qui citati, appartenenti tutti al diluvium inferiore, provengono da tre diversi punti della baraggia tra Masserano e Buronzo; uno, presso Masserano (3), risponde alla parte più alta della baraggia, perfettamente incolta: un secondo, più presso Buronzo (4), risponde ancora alla baraggia sterile; il terzo risponde invece alla parte più bassa della baraggia, coltivata a risaia (5).

Il terreno n. 3, fino e di color giallo-bruniccio chiaro a secco, trattato nel modo sopra descritto, lascia un residuo sabbioso che sale solo al 17 %.

Il residuo, lavato con acido cloridrico diluito, perde una quantità notevole di limonite senza fare effervescenza nè a freddo nè a caldo.

Digitized by Google

Nel residuo è già ad occhio rilevabile una fortissima percentuale di quarzo; gli elementi feldspatici e i componenti colorati sono scarsissimi.

L'esame microscopico della parte stacciata conferma che il terreno non contiene quasi più feldspati sani e pochissimi sono anche i feldspati torbidi e alterati e la stessa pasta felsitica.

Scarsissimi sono gli elementi pesanti (non più del 2-3 %.

Il terreno n. 4 è anche più profondamente decomposto che non il n. 3. Il colore del campione secco è giallo-ocraceo. Il residuo sabbioso giunge appena al 10 %. Con acido cloridrico non si ha traccia di effervescenza nè a freddo nè a caldo e il residuo perde una quantità notevole di limonite.

Nella parte stacciata gli elementi leggeri, che formano il 90-95 % del residuo, sono rappresentati quasi solamente da quarzo, essendo scarso l'ortoclasio torbido e ancor più scarso il plagioclasio, alteratissimo. La pasta felsitica sembra essa pure fortemente alterata.

Gli elementi pesanti nulla presentano di particolarmente notevole oltre la generale scarsità. I granati sono tutti molto corrosi e così gli anfiboli verdi.

Abbondanti i grumi di limonite.

Il terreno n. 5 può dirsi ancora di baraggia, sebbene appartenga alla lingua inferiore, già trasformata in risaia, dell'alluvione diluviale antica. Il colore del campione secco è bruniccio per una forte percentuale di sostanza organica. Levigato, il campione perde una grande quantità di argilla ocracea fina, lasciando un residuo non superiore al 16 %, composto in prevalenza da quarzo, ma in cui non sono così scarsi come nei precedenti gli elementi pesanti.

All'esame microscopico si constata che i feldspati, e specialmente i plagioclasi, sono anche qui scarsi assai e alterati. I pirosseni sono quasi scomparsi; gli anfiboli ed i granati molto corrosi.

Terreni di Lenta e Arborio (6-7).

I campioni qui indicati provengono dal diluvium recente della sponda destra della Sesia. È opportuno confrontare la loro composizione con quella delle sabbie attuali della Sesia (A).

Digitized by Google

Il terreno secco ha color bruno abbastanza intenso per la percentuale di sostanza organica ch'esso contiene. Trattato nel solito modo lascia un residuo del 28 %. Non fa effervescenza nè a freddo nè a caldo con acido cloridrico.

Il residuo sabbioso grossolano appare ricco di elementi pesanti. Fra i minerali leggeri caratteristica la presenza del *microclino*, la scarsità relativa del *quarzo* e dei *feldspati*. Fra i minerali pesanti caratteristica l'abbondanza della " mica dorata „, dei *pirosseni rombici*, e dell'*orneblenda basaltica* e del *granato*, spesso abbastanza fresco, e la scarsità di *glaucofane*. Caratteri tutti ben d'accordo con la provenienza sesiana dell'alluvione.

Il campione n. 7, preso a nord di Arborio, presenta gli stessi caratteri generali, ma appare alquanto più povero di elementi pesanti. Il residuo sabbioso grossolano sale al 34 %. Non fa effervescenza nè a freddo nè a caldo con acido cloridrico, ma perde una quantità notevole di limonite.

Caratteristica anche qui la presenza del *microclino*, dei *pirosseni rombici* e dell'*orneblenda bruna* e la scarsità del *glaucofane*.

Terreno alluvionale recente di Roasenda (8).

Il campione fu prelevato nell'alluvium di Cascina S. Giacomo presso Roasenda. È opportuno confrontarlo col B e coi campioni di baraggia.

Il terreno è giallo-ocraceo, ed è difatti ricco di grumi limonitici. Lo scheletro sabbioso grossolano sale al 40 % e lavato con acido diluito prende un caratteristico colore roseo, dovuto alla presenza di *ortoclasio* rosa e di *pasta felsitica* in misura considerevole.

Caratteristica la presenza, oltre che di questi elementi, del *calcedonio* organogeno, invero assai scarso, di *orneblenda bruna* e di *pirosseni*, e la scarsità del *glaucofone*. La *sericite* è presente, ma in tenuissima proporzione.

Terreno alluvionale di Buronzo (9).

Il campione, prelevato a sud di Buronzo, proviene dall'alluvium del Cervo: è quindi da confrontarsi col campione C e coi terreni di baraggia.

Digitized by Google

Il terreno secco ha color bruno-giallognolo. Lascia un residuo sabbioso grossolano del 41 %, perdendo molto materiale fino ocraceo.

Nel residuo, che si schiarisce molto con la lavatura, appaiono abbastanza abbondanti gli elementi pesanti. Sono presenti in buona misura i *feldspati* di vario tipo, tra cui non manca il *microclino*, scarsissimo. Fra gli elementi pesanti è caratteristica l'abbondanza dell'*orneblenda bruna* e dei *pirosseni rombici*, tra i quali si notano alcuni individui d'*ipersteno* nettamente cuspidati.

Terreno morenico di Alice Castello e Borgo d'Ale (10-11).

I due campioni di terreno qui elencati provengono dalle pendici esterne delle morene dell'anfiteatro d'Ivrea. Possono quindi ritenersi come terreno morenico rimaneggiato.

Il terreno di Alice Castello (n. 10), di color giallo-bruno intenso, ricco di parte organica, lascia al solito trattamento un residuo sabbioso grossolano del 33 %. Non fa effervescenza a freddo con acido cloridrico, ma dà tracce di effervescenza a caldo.

Nel residuo lavato, di color grigio chiaro, appare abbondante il *quarzo* incolore e latteo, mentre scarseggiano i *feldspati*. Non si osserva nè microclino nè pasta felsitica.

Fra gli elementi pesanti caratteristica l'abbondanza di *anfiboli chiari*, di *orneblenda* e di *glaucofane*. Presenti, ma scarsi, i *pirosseni rombici* e *monoclini*. Non osservata l'*orneblenda bruna*.

Il terreno di Borgo d'Ale (n. 11) non differisce per nessun carattere saliente dal precedente. Col solito trattamento dà un residuo sabbioso grossolano del 31 %.

Terreni di Saluggia, Tronzano e Bianzè (12-13-14).

Il campione n. 12, prelevato a S. Sebastiano presso Saluggia, appartiene all'alluvium della Dora. È di color giallo-bruno chiaro e trattato con acido cloridrico dà tracce di effervescenza a caldo. Contiene dunque anch'esso, come la sabbia attuale della Dora (E), un po' di *dolomite*. Trattato nel solito modo lascia un residuo sabbioso grossolano del 38 %.

Per composizione il residuo non differisce in nulla, pei ca-

Digitized by Google

ratteri essenziali, dal campione E. Caratteristica l'abbondanza, notevole anche per un'alluvione aostana, del *glaucofane*. Presenti, scarsissimi, il *microclino* e l'*orneblenda verde-bruna*.

I campioni 13 e 14, provenienti rispettivamente da Tronzano e da Bianzè, possono ritenersi entrambi del diluvium superiore di origine aostana, e non differiscono molto l'uno dall'altro, nè per aspetto esterno nè per composizione. Noto tuttavia nel primo un residuo grossolano del 36 % e nel secondo del 20 %; ciò che può esser d'accordo con la posizione più bassa di quest'ultimo nella pianura. Noto inoltre in questo la presenza in piccola quantità di carbonati ed una maggiore scarsità di elementi pesanti.

Pel resto i caratteri sono quelli di un'alluvione di Dora, ossia vi abbiamo come al solito una forte percentuale di anfiboli verdi e azzurri fra gli elementi pesanti, e come indizio di relativa antichità la presenza di anfiboli cuspidati e di granati corrosi, oltre ad una scarsità notevole di feldspati sani.

Terreni di Popolo e di Morano sul Po (15-16).

Si tratta di terreni alluvionali recenti del Po, paragonabili quindi al campione F di Crescentino.

Il terreno di Popolo presso Casale (15) di color bruniccio-chiaro, levigato nel solito modo, lascia un residuo sabbioso che sale al 42 %. Trattato con acido cloridrico dà sensibile effervescenza a freddo e prende il colore grigio freddo già notato per la sabbia padana.

L'aspetto generale è fresco. Predominano fra gli elementi leggeri il *quarzo* e l'*ortoclasio*. Abbondanti la *muscovite*, gli *anfiboli* chiari e quelli verdi e relativamente scarso il *glaucofane*. La *biotite*, scarsa, non è quasi mai alterata. Scarsissimi i *pirosseni*.

Il terreno di Morano (n. 16), molto simile al precedente, lascia un residuo sabbioso del 36 % e fa pochissima effervescenza con acido. I caratteri padani del terreno, salva la scarsità de' carbonati, sono più accentuati ancora che nel precedente campione.

Digitized by Google

Terreni di Tricerro, Trino e Costanzana (17-18-19).

I terreni qui elencati appartengono al diluvium superiore terrazzato della così detta Costa di Trino. Essi hanno i caratteri essenziali delle alluvioni della Dora o di alluvioni miste Dora-Po.

Il campione 17 fu prelevato alla Cascina Gerbidi, presso Tricerro. È giallo ocraceo e con la levigazione perde una forte quantità di detrito fino ocraceo, lasciando un residuo grossolano non superiore al 25%.

È privo completamente di *carbonati* e scarsissimo di *plagioclasi*, i quali sono per giunta tutti alterati. Alterato è pure l'*ortoclasio*. Fra gli elementi pesanti, piuttosto scarsi, predominano gli *anfiboli verdi* e *azzurri* e la *muscovite*. La enorme scarsità di *pirosseni*, di *anfiboli bruni* e la mancanza di *microclino* escludono che l'alluvione possa aver relazioni col bacino della Sesia.

Nel complesso, il terreno mostra i caratteri di una ferrettizzazione abbastanza avanzata, compresa la cuspidatura degli anfiboli, non lontana da quella del ferretto tipico di baraggia, quantunque la sua età sia probabilmente più recente. E lo stesso potrebbe ripetersi pei due terreni successivi.

Il campione n. 18 proviene da Ramezzana presso Trino. Il residuo sabbioso è solo del 22% e con la levigazione si asporta molto detrito fino fortemente ocraceo. Nessuna effervescenza con gli acidi. L'avanzata alterazione è anche qui dimostrata dall'alterazione dei feldspati e dal succhiamento degli *anfiboli verdi* e dei *granati*. Mancano il *microclino* ed i *pirosseni rombici*. Presente qualche rara *orneblenda verde-bruna*.

Il campione n. 19 fu prelevato fra Costanzano e Torrione, ed è il più occidentale dei tre. Il residuo è del 25%. Non fa effervescenza con acido cloridrico. Anche per tutti gli altri caratteri essenziali è affatto simile al precedente.

Terreni della pianura a sud e ad ovest di Vercelli (20-21-22-23-24).

I terreni qui elencati provengono dal diluvium superiore (terrazziano) dei dintorni di Vercelli, e specialmente i primi quattro sembrano sostanzialmente identici.

Digitized by Google

Il quarto, ch'è il più meridionale di tutti, si avvicina invece nettamente ai terreni or ora descritti della Costa di Trino.

I numeri 20, 21, 22 e 23 provengono rispettivamente da Sali, da Costanzana, da Salasco e da Salasco sud; il 24 proviene da Ronsecco e fu prelevato presso la Cascina Cavallo.

I primi tre, di color bruniccio chiaro, con la solita levigazione, lasciano un residuo del 30 % circa, sono sensibilmente ocracei e non dànno traccia di effervescenza nè a freddo nè a caldo.

I terreni di Sali e Salasco dànno l'impressione di un'alluvione mista d'origine aostana e biellese, con prevalenza di quest'ultima. La provenienza aostana pare provata dalla relativa abbondanza degli *anfiboli verdi* e *azzurri*, dell'*epidoto* e della *muscovite*; quella biellese dalla costante presenza di *pasta felsitica* rosa e bruna, e dalla relativa frequenza di *anfiboli bruni*.

Il terreno di Ronsecco, di color giallo ocraceo chiaro, non lascia che un residuo del 20 % ed è più fortemente ocraceo dei precedenti. Non fa effervescenza con acido cloridrico. Parmi che in esso si accentui la origine aostana per una maggiore frequenza di *anfiboli azzurri* e di *muscovite*, mentre i *pirosseni*, gli *anfiboli bruni* e la *pasta felsitica* si riducono di molto o scompaiono affatto.

Terreno di Quinto Vallasino (25).

Campione prelevato dall'alluvium dell'Elvo. Il terreno ha color giallo-bruno, non fa effervescenza con acido e lascia un residuo abbondante (il 43 %). È opportuno confrontarlo col campione E.

Il residuo è ricco di feldspati, rappresentati in misura non molto diversa da *ortoclasio* e da *plagioclasio sodico-calcico*, mentre il *microclino* è eccezionale.

Nella parte pesante, che dà l'impressione di una freschezza ancora maggiore, gli *anfiboli*, prevalentemente verdi, appaiono perfettamente conservati; e così può ripetersi del *granato*. La *biotide*, scarsa, è invece di solito trasformata in mica dorata.

Terreno di Pezzana (26).

Il campione di terreno fu prelevato dall'alluvium presso il letto della Sesia, una dozzina di chilometri sotto Vercelli.

Digitized by Google

Sia per quanto riguarda lo stato di conservazione, sia in riguardo alla composizione mineralogica, il campione si direbbe alquanto aberrante; e per questo appunto sembra degno di maggiore interesse.

Il colore è giallo ocraceo e mancano interamente i carbonati. Il residuo giunge appena al 23%.

I caratteri mineralogici rispondono perfettamente a quelli di una sabbia di Dora o tutt'al più ad una alluvione mista Dora-Po. Mancano infatti, o sono scarsissimi, il *microclino*, i *pirosseni rombici* e l'*orneblenda bruna*, così caratteristici nelle alluvioni sesiane, e sono invece abbondanti gli *anfiboli verdi* e *azzurri* e la *muscovite*. La provenienza, ch'io credo indubbiamente occidentale di questa alluvione, sarebbe del resto d'accordo col fatto, da me enunciato sin da principio, che tutta la parte meridionale del Vercellese è essenzialmente formato da alluvioni aostane. Questa constatazione confermerebbe anche l'idea che il corso della Sesia si sia spostato durante il quaternario da est ad ovest, e che questa corra oggi sul margine occidentale delle sue alluvioni.

Terreno di Ricorvo-Lomellina (27).

Questo terreno, posto sulla sinistra della Sesia, ha invece tutti i caratteri di un'alluvione sesiana: ciò che del resto non può stupire.

È un terreno molto fresco, contenendo una quantità notevolissima di feldspati relativamente ben conservati e qualche carbonato. Levigato, lascia un residuo molto scarso (circa il 16%), ma non bisogna dimenticare che si tratta di un'alluvione molto bassa e di conseguenza già originariamente fina.

Caratteri salienti la forte percentuale di *ortoclasio* e quella relativamente forte di *microclino*; la quantità pure notevole di *orneblenda bruna* e di *pirosseno rombico* e di *granato*, la scarsità di *glaucofane*.

Abbastanza tipica pure la presenza, fra i minerali più rari, della *staurolite*.

Digitized by Google

Terreni di Madonna delle Vigne e di Monte Nuovo di Trino (28-29-30).

I terreni qui descritti appartengono al lembo di diluvium antico che le carte geologiche segnano a nord di Palazzolo Vercellese e di Trino, sul margine meridionale del diluvium superiore terrazzato dal Po.

I terreni si assomigliano perfettamente e recano i segni di una ferrettizzazione abbastanza profonda, se non profondissima. Il colore è in tutti giallo-ocraceo; il residuo lasciato è del 20 %, del 18 % e del 10 % rispettivamente. I primi due fanno un po' di effervescenza con acido cloridrico diluito, specialmente a caldo. Ciò che confermerebbe che l'alterazione non è così completa come nei terreni di baraggia tipici. È però indubitato che la ferrettizzazione è molto pronunciata, sebbene irregolare, e in genere si distacca nettamente da quella dei terreni del terrazziano tra i quali questo lembo si trova.

Riguardo alla provenienza dell'alluvione, credo che si possa ritenere piuttosto aostana che prettamente padana, o, tutt'al più, può essere mista.

I caratteri di Dora, come pure quelli della pronunciata ferrettizzazione, compaiono specialmente nel campione 29, privo di carbonati, ricco di ocra e di *anfiboli* e *granati* corrosi. Generale l'abbondanza di *glaucofane* e di *muscovite*, e la scarsità o assenza di *microclino*, di *pirosseni rombici* e di *orneblenda bruna tipica*.

***

Nella tabella che segue, in cui sono rappresentati sinteticamente i risultati dell'analisi mineralogica del residuo sabbioso di ciascun terreno, si adotta la scala di frequenza proposta dall'Artini; e cioè:

1: *Copiosissimo.* — 2: *Copioso.* — 3: *Abbondante.* — 4: *Discretamente abbondante.* — 5: *Molto comune.* — 6: *Comune.* — 7: *Piuttosto scarso.* — 8: *Scarso.* — 9: *Scarsissimo.* — 10: *Raro.*

Queste denominazioni vanno intese con qualche larghezza, e sono in certo modo relative. Non corrispondono sempre alla terminologia usata nel testo, in cui s'è spesso, ad esempio, qualificato abbondante un componente che qui appare scarso. La

Digitized by Google

ragione sta nel fatto che il significato dei vari componenti è, a parità di diffusione, molto diverso in riguardo alla costituzione mineralogica del terreno ed alla diagnosi della provenienza delle varie alluvioni.

Riportiamo poi, per maggiore comodità, la provenienza dei vari campioni elencati nella tabella.

A — Sabbia viva della Sesia.
B — " " " Roasenda.
C — " " del Cervo.
D — " " dell'Elvo.
E — " " della Dora Baltea (a Saluggia).
F — " " del Po (a Crescentino).
1 — Terreno agrario di Villa del Bosco.
2 — " " di Roasio.
3 — " " di Masserano } (*diluvium antico*).
4 — " " di Buronzo nord }
5 — " " di Buronzo sud (destra del Cervo).
6 — " " di Lenta } (*diluvium sup. terrazzato*).
7 — " " di Arborio }
8 — " " di Roasenda (casc. S. Giacomo) (*alluvium*).
9 — " " di Buronzo (*alluvium*).
10 — " " di Alice Castello (*morenico rimaneggiato*).
11 — " " di Borgo d'Ale (*morenico rimaneggiato*).
12 — " " di Saluggia (*alluvium*).
13 — " " di Tronzano } (*diluvium superiore*).
14 — " " di Bianzè }
15 — " " di Popolo } (*alluvium*).
16 — " " di Morano }
17 — " " di Tricerro
18 — " " di Trino } (*diluvium superiore*).
19 — " " di Costanzana (sud)
20 — " " di Sali
21 — " " di Costanzana (nord) } (*diluvium superiore*).
22 — " " di Salasco (nord)
23 — " " di Salasco (sud)
24 — " " di Ronsecco (*diluvium superiore*).
25 — " " di Quinto Vallasino (*alluv. dell'Elvo*).
26 — " " di Pezzana (*alluvium*).
27 — " " di Ricorvo-Lomellina (*alluvium sesiano*).
28 — " " di Mad. delle Vigne (*diluvium antico*).
29 — " " di Trino Monte Nuovo (*diluvium antico*?).
30 — " " di Trino Costa (*diluvium antico*?).

Digitized by Google

terreni agrari del Vercellese.

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Oro	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Quarzo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1-2
Calcedo	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Corindo	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ilmenite	8	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	8	8
Magnet	8	8	9	8	8	8	8	8	8	8	9	8	9	9	8	8	8
Rutilo	9	9	—	9	—	9	9	—	9	9	9	10	9	—	10	9	9
Brookit	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Limoni	—	—	—	—	—	—	—	9	9	9	7	7	7	—	7	7	6
Carbon	9	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	8	—
Ortocla	8	5	4-5	5-6	7	6	7	7	7	7	5	5	5	4	5-6	5	5-6
Microc	—	—	10	—	—	—	—	10	—	—	—	10	10	8	—	—	—
Plagio	8	8	8	9	9	9	8	9	9	9	8	5	8	7	8	8	8
Pirosse	9	10	9	10	—	?	10	10	10	10	9	10	9	8	9	8	—
"	9	—	9	10	10	—	10	10	10	—	9	—	10	9	?	9	9
Anfibo	7	7	7	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
Ornebl	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	7	7	6
"	9	—	9	9	9	9	8	8	8	9	9	9	8	7	—	9	9
Glauco	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	7	9	7	7	5
Granat	9	8	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7-8	7	7	7
Cordie	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—
Zircone	10	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	8	9	9	8-9
Sillima	—	—	—	—	—	—	9	9	9	—	—	—	—	8	—	—	—
Cianite	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—
Andalu	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Epidot	8	7	7	8	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8
Zoisite	8	7	8	9	8	8	9	9	9	9	9	9	9	10	7	9	8
Titano	—	—	—	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Torma	—	10	10	10	—	10	—	—	—	—	—	10	—	8	9	—	—
Stauro	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	8	—	—	—
Muscov	9	6	6	7	8	7	8	8	8	8	8	7	6-7	7	7	8	7
Sericit	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Biotite	9	8	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
Clorite	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8
Clorito	10	—	10	—	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	10	10	10
Serpen	10	—	—	—	9	—	9	—	—	—	—	10	10	—	10	9	—
Titanit	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	10
Spinell	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Apatit	?	10	10	10	10	—	10	10	10	10	—	?	10	10	—	—	—
Pasta	1	—	—	—	—	—	8	8	8	8	9	—	—	—	—	—	—

Digitized by Google

Digitized by Google

Attenuazione dissimmetrica di energia raggiante in un mezzo assorbente.

Nota del Socio nazionale residente Q. MAJORANA

Da qualche anno ho intrapreso ricerche sperimentali per la realizzazione di sistemi telefonici ottici, mediante radiazioni invisibili. Ho già riferito in altra Accademia sui risultati ottenuti servendomi di radiazioni ultraviolette (*); e ho descritto gli apparecchi da me all'uopo ideati e sperimentati, il cui funzionamento si impernia sulla modulazione di un arco a mercurio (da me per la prima volta dimostrata come possibile) e sull'uso di una cellula fotoelettrica. Nella detta sede, ho inoltre recentemente riferito (**) sui perfezionamenti introdotti in tali dispositivi, al fine di assicurarne il funzionamento anche di pieno giorno, di rendere meno ingombranti gli apparecchi, ecc. E, proseguendo nello studio dell'argomento, ho inoltre detto di talune mie altre ricerche che mi hanno condotto ad utilizzare le radiazioni ultrarosse, al posto delle ultraviolette, modificando naturalmente i dispositivi. A questo nuovo indirizzo, ho rivolto la mia attenzione, nella speranza di poter realizzare un sistema di telefonia ottica con radiazioni invisibili, che più facilmente traversassero l'atmosfera, in certe condizioni di nebbia, pioggia o foschia, per le quali le radiazioni u. v. restano notevolmente affievolite.

Tralascio di accennare qui ai particolari dispositivi che mi hanno servito nella utilizzazione delle radiazioni u. r. per il detto

(*) " Rendiconti R. Accademia dei Lincei ", vol. V, p. 726, 1927.
(**) Id., vol. IX, p. 924, 1929.

Digitized by Google

scopo. Dirò soltanto che impiego a tal fine, quale sorgente di radiazioni, una lampada elettrica a incandescenza intensiva (da 200 a 500 watt), della quale filtro, con un vetro all'ossido di manganese, delle λ di 1 micron circa. Le radiazioni di tale lampada, che sono praticamente fisse e costanti in intensità, vengono modulate mediante congegni elettromeccanici (*modulatori*), i quali proiettano quelle radiazioni dalla stazione trasmittente alla ricevente, lasciando convogliare nella loro intensità variabile i periodi acustici da trasmettere. Alla ricevente, le radiazioni u. r. cadono su di una cellula al tallio, probabilmente simile a quella detta dal Case *thalofide*, e che è stata da me costruita, con processo indicato altrove (*).

La telefonia ottica con radiazioni u. r., ha dato sin dalle prime prove, che ho avuto occasione di eseguire in questi ultimi mesi, ottimi risultati. Distanze dell'ordine dei 10 km. fra Bologna e le colline circostanti, sono state facilmente superate. E tuttora sono in corso esperienze, per studiare questo nuovo metodo di telecomunicazione.

Scopo della presente Nota è di riferire su certi fatti di di attenuazione della trasmissione della parola mediante le dette radiazioni (u. v. oppure u. r.), che ho potuto osservare, quando l'atmosfera, compresa tra le due stazioni, non è del tutto limpida, e più particolarmente, quando tale difetto si manifesta non uniformemente lungo tutta la visuale congiungente le due stazioni.

Accennerò subito ai fatti; dirò poi del modo con cui ho controllato la loro esistenza con ricerche di laboratorio; ed infine stabilirò la teoria probabile dei fatti stessi.

Sperimentavo con due stazioni poste ad una distanza dell'ordine di 10 km. (**), essendo esse fornite di impianto duplice per telefonia ottica con raggi u. v. Esperienze del genere, vengono di solito da me condotte, puntando dapprima tutto il fascio

---

(*) MAJORANA e TODESCO, " Rendiconti R. Acc. dei Lincei ,, agosto, 1928.

(**) Più precisamente fra Bologna (Istituto Fisico A. Righi) e Monte Calvo; distanza km. 8,800.

Digitized by Google

di radiazioni della lampada a mercurio da ciascuna stazione, verso l'altra, senza filtrare, mediante il vetro all'ossido di nichel, le sole radiazioni u. v. La recezione è, in tali condizioni, molto forte da entrambi i lati; almeno quando le condizioni di reciproca visibilità delle due stazioni, sono ottime od anche solo buone. La intensità di recezione si affievolisce notevolmente per l'interposizione dello schermo suddetto, che rende il fascio completamente invisibile. Tale affievolimento è, in buone condizioni, e per uno schermo non troppo opaco, di circa il 70 % dell'intensità totale. Ma tuttavia, se le condizioni atmosferiche non sono avverse, la recezione è ancora nettamente possibile.

Si comprende così, che col peggiorare delle condizioni atmosferiche, possa venire a mancare la recezione in sola luce u. v., mentre può continuare a sussistere quella in luce totale. Ma il fatto, che a prima vista non si spiega facilmente, è il seguente: talvolta, la recezione in una delle stazioni è più debole che nell'altra. Sperimentando una sera dello scorso aprile fra le due dette stazioni, mentre era possibile parlare in luce totale da parte delle due stazioni, veniva a mancare quasi completamente la recezione a Bologna, quando Monte Calvo oscurava la sua lampada con vetro al nichel; era invece possibile a Monte Calvo sentire Bologna, quando questa stazione oscurava col proprio schermo le sue radiazioni.

Scartata l'ipotesi di una dissimmetria dei due impianti (che funzionano egregiamente in serate di perfetta trasparenza dell'atmosfera); osservato che probabilmente la trasparenza dell'atmosfera non era ottima; non rimaneva ad ammettere che una certa dissimmetria nelle condizioni di trasparenza lungo tutto il tratto visuale delle stazioni. È evidente infatti, che ammettendo: l'assoluta eguaglianza delle parti costituenti le due stazioni (sorgente, congegno modulante, schermo all'ossido di nichel, cellula fotoelettrica, amplificatore telefonico, cuffia telefonica); e l'omogeneità dell'atmosfera, lungo tutta la visuale, sia pure con un forte potere assorbente ma costante in tutti i punti; non sarebbe stato possibile dare alcuna spiegazione del fenomeno.

Guidato da questi criterii cercai di controllare con l'osser-

Digitized by Google

vazione visiva diretta, la diversa omogeneità dell'atmosfera, durante l'esperimento citato. Forse fu giudicato complessivamente dalle persone che si trovavano alle due stazioni, che un po' più di nebbia si stendesse su Bologna, che non su Monte Calvo; ma può anche darsi che tale dissimmetria fosse addirittura inversa. Senza vagliare esattamente tale conclusione quantitativa, ammetto per ora come certo il fatto generico di una dissimmetria nell'assorbimento da parte dell'atmosfera, delle radiazioni, lungo la visuale stendentesi fra le due stazioni.

L'esistenza dell'effetto in parola, è stata inoltre da me controllata con esperienze in laboratorio. Si sono adoperate alternativamente radiazioni u. v. e u. r. Queste ultime hanno per ora dato risultati meno sicuri; e riferisco perciò su quelli ottenuti soltanto con le u. v. Una lampada a mercurio è posta all'estremità di un corridoio, lungo circa 90 metri. La sua luce è concentrata verso l'altra estremità, mediante una lente. Con tutto ciò, è a ritenersi che il fascio di raggi non sia parallelo: l'immagine dell'arco a mercurio si proietta infatti sul fondo del corridoio con una estensione di più metri, cioè fortemente ingrandita. Qui, una cellula fotoelettrica è colpita dalle radiazioni, che sono concentrate su di essa mediante una lente di 8 cm. di diametro e di 10 cm. di fuoco. Un galvanometro Moll è inserito in circuito con la cellula, insieme con una f. e. m. di 120 volt circa (inferiore alla tensione di accensione della cellula). Si fanno così delle letture di deviazione galvanometrica, alternativamente, quando immediatamente davanti alla lampada si pone o si toglie lo schermo di vetro all'ossido di nichel. Si trova che tali letture stanno nel rapporto $r = 0{,}25$. Si ripete l'osservazione quando si pone lo schermo davanti alla cellula (cioè all'altro estremo del corridoio). Quel rapporto diventa $r' = 0{,}27$. Queste cifre, citate a mo' d'esempio, sono state controllate con molte determinazioni che qui non riporto. Risulta dunque la seguente proposizione: *Sia un fascio di radiazioni divergenti che percorre un certo tratto di lunghezza L. La sua intensità è affievolita nel rapporto r quando si pone attraverso il raggio un tratto assorbente (il vetro al nichel) all'inizio del percorso L, cioè dove le radiazioni sono più concentrate. La stessa intensità si riduce*

Digitized by Google

nel rapporto r', essendo r' > r, quando il tratto assorbente viene interposto verso la fine di L, cioè là dove le radiazioni si sono, per la loro divergenza, assai diffuse.

Veramente la differenza tra i due rapporti r ed r' controllati sperimentalmente, è troppo poca cosa, per lasciar credere che essa senz'altro spieghi quanto è stato osservato nel caso delle recezioni telefoniche, tra Bologna e Monte Calvo. Ma è d'altra parte da notarsi, che in tale caso la distribuzione dell'assorbimento lungo un tratto, che è circa 100 volte maggiore, può essere ben diversa da quella occasionata dal vetro all'ossido di nichel nell'esperimento di laboratorio. In questo, si è inteso sostituire al banco di nebbia, sia pur leggera ma lunga forse qualche chilometro, il vetro al nichel dello spessore di 1 mm., circa. Inoltre, la divergenza dei raggi dà luogo ad un affievolimento di intensità ben superiore nel caso della grande distanza. I due casi non sono dunque quantitativamente, e forse nemmeno qualitativamente, paragonabili. Ma è sintomatico il divario che pur è stato riscontrato nei valori di r ed r'; divario che almeno dà l'indizio di una conferma generica del fenomeno constatato.

Quanto precede, mi ha indotto a condurre una indagine teorica del constatato fenomeno, che passo ad esporre.

Osservo anzitutto, che comunque si disponga il congegno diottrico davanti alla lampada a mercurio, il fascio di raggi emergente, specialmente se studiato a una distanza notevole (tale cioè che di fronte a questa, sia trascurabile l'apertura del sistema diottrico), deve considerarsi come divergente, e mai come parallelo. Il parallelismo dei raggi non potrebbe ottenersi che con una sorgente idealmente puntiforme e con un sistema rifrangente o riflettente esattamente stigmatico. Le comuni lenti, in conseguenza delle gravi aberrazioni di sfericità, della mancanza di correzione cromatica (tanto più notevole in quanto si tratti promiscuamente di regioni visibili ed invisibili dello spettro), e della estensione del cratere luminoso della lampada a mercurio (o di altra sorgente), dànno evidentemente fasci assai divergenti. E tali fasci producono illuminamenti che, a partire da una diecina di metri di distanza dalle lenti in parola, variano praticamente in ragione inversa del quadrato delle distanze.

Digitized by Google

Se diciamo I_1 la intensità alla distanza 1 dalla sorgente (supposta idealmente puntiforme), la intensità alla distanza x sarà:

$$i = \frac{I_1}{x^2}. \qquad (1)$$

Differenziando tale eguaglianza si ha l'espressione

$$di = -\frac{2i}{x}dx;$$

che corrisponde alla variazione elementare, lungo l'elemento dx dell'intensità i, e che, a causa del segno negativo, equivale ad un'attenuazione (*attenuazione per divergenza dei raggi*).

Ma l'energia che si raccoglie alla stazione ricevente, si può andare affievolendo, col crescere della distanza, in causa di assorbimento progressivo dovuto alla mancanza di trasparenza assoluta del mezzo. Se questo è omogeneo, si può ammettere che, attraverso l'elemento dx, la variazione di dell'intensità, intesa come sola *attenuazione per assorbimento del mezzo,* sia espressa da:

$$di = -pi\,dx, \qquad (2)$$

dove p è una costante. In altri termini, si suppone che l'assorbimento sia proporzionale alla intensità, a parità di condizioni del mezzo. La precedente equazione, integrata, dà

$$i = k\,e^{-px}.$$

La costante k, nel caso di un fascio idealmente parallelo, risulta eguale al valore I_0 della intensità alla stazione trasmittente, perchè in tale punto l'esponenziale si riduce all'unità. Si ha così:

$$i = I_0\,e^{-px}.$$

Se il fascio non è parallelo, ma divergente, e cioè partente idealmente da un punto, origine delle distanze x, in tale punto l'intensità, intesa come illuminamento di una superficie posta nell'immediata vicinanza, è infinita. Conviene perciò anche qui riferirsi ad un punto posto p. es. alla distanza unitaria e di-

Digitized by Google

cendo I_1 l'intensità raccolta in quel punto, dare all'integrale della (2) la forma:

$$i = I_1 e^{p(1-x)}. \tag{3}$$

In pratica, entrambe le attenuazioni a cui si è fatto cenno entrano in giuoco, quando si abbia a che fare con la propagazione di un fascio divergente in un mezzo assorbente; e cioè il di complessivo sarà espresso da:

$$di = -\frac{2i}{x}\,dx - pi\,dx. \tag{4}$$

L'integrale di questa equazione, che assume il valore I_1 alla distanza 1, è:

$$i = I_1 \frac{e^{p(1-x)}}{x^2}. \tag{5}$$

Questa espressione ci dice che l'intensità i corrisponde ad una attenuazione della intensità I_1 ottenibile moltiplicando questa per entrambi i coefficienti di attenuazione già indicati nelle relazioni (1) e (3).

Il valore dell'intensità i espresso dalla (5) è lo stesso tanto che l'energia raggiante parta da un estremo che dall'altro del tratto x e lo percorra in tutta la sua lunghezza. Beninteso che esso assumerà nei due casi l'intensità I_1 alla distanza unitaria contata da uno o dall'altro estremo. Ciò è evidente, se p è costante in tutti i punti del mezzo. Ma ci si può domandare che cosa avvenga se p varia con x. In tale caso l'integrazione della (4) dà:

$$i = \frac{I_1}{x^2} e^{-\int_1^x p dx};$$

dove I_1 è sempre la intensità, alla distanza unitaria, e p, a differenza della (5), rappresenta una certa funzione della x. La integrazione indicata verrà estesa ad un valore di x che corrisponderà alla distanza L delle due stazioni. E si comprende che, se tale distanza è molto grande rispetto all'unità (p. es. se

Digitized by Google

si tratta di 10.000 metri, e si sceglie come unità il metro), tale integrale sarà praticamente lo stesso dell'altro:

$$\int_0^x p\,dx\,. \tag{6}$$

Ciò almeno quando la funzione p non presenti discontinuità o punti singolari, come è assai verosimile. Per cui, se si invertono di posto le due stazioni, lasciando sempre la stessa legge di distribuzione del coefficiente di attenuazione p lungo il tratto L, il valore dell'integrale (6) sarà ancora lo stesso, perchè verrà ad essere mutato non solo il segno del differenziale dx, ma anche il segno dell'integrale, i cui limiti saranno invertiti. Rimane dunque immutato il valore di i.

Si deduce quindi che *il valore di i, cioè la intensità raccolta in una delle stazioni (perchè dall'altra viene irradiata sotto forma di un fascio divergente una certa intensità, di cui era stato indicato con* I_1 *il valore alla distanza unitaria) sarà la stessa, indipendentemente dal senso della propagazione, e ciò qualunque sia la legge di distribuzione del coefficiente di assorbimento p lungo il tratto fra le due stazioni.*

In vista di questo risultato e prima di andare avanti, poniamoci da un punto di vista generale, nel considerare il fenomeno di attenuazione di energia raggiante, propagantesi attraverso un mezzo, dovuta a più di una causa. Suppongasi, anzitutto, che nella propagazione di tale energia, si verifichi un'attenuazione esprimibile in forma differenziale con una legge del tipo:

$$di = -pf(i)\,dx\,, \tag{7}$$

secondo la quale, in ogni tratto della linea di propagazione, la intensità i raccolta (cioè quella che cade su una determinata superficie) subisca una diminuzione proporzionale ad una certa funzione $f(i)$ della intensità stessa, e che sia il coefficiente di proporzionalità o di attenuazione p eventualmente variabile col posto.

Nella (7) si separano immediatamente le variabili e si integra fra due limiti a, b di x, scrivendo:

$$\int_{i_a}^{i_b} \frac{di}{f(i)} = -\int_a^b p\,dx\,.$$

Digitized by Google

dove i_a e i_b sono i valori che assume i, in conseguenza del complesso fenomeno, nei punti a, b.

Indichiamo con $\bar{p}$ il valore medio di p nel tratto (a, b), sarà:

$$\bar{p} = \frac{1}{b-a} \int_a^b p\, dx .$$

Se diciamo $F(i)$ una funzione primitiva o integrale di $1/f(i)$, potremo scrivere:

$$F(i_b) - F(i_a) = (a - b)\, \bar{p} .$$

Questa relazione ci dice che la variazione dell'intensità, in conseguenza del fenomeno di attenuazione lungo un determinato tratto, dipende solo dal valor medio di p lungo tutto il tratto; per conseguenza essa deve essere indipendente dal senso di propagazione.

Ma questa indipendenza può ancora essere dimostrata nel caso in cui coesistano più fatti di attenuazione, purchè questi sodisfino a certe condizioni di analogia. Suppongasi che i relativi coefficienti siano p_1, p_2, ...; e sieno $f_1(i)$, $f_2(i)$, ... le relative funzioni che servono a definire come nella (7) dei particolari valori della variazione di. Si ammetta ancora che vi sia proporzionalità (od anche eguaglianza) tra tali coefficienti, o tra tali funzioni; talchè sieno sodisfatte le relazioni:

$$p_1 = h_1 p , \quad p_2 = h_2 p , \ldots ;$$

oppure le altre:

$$f_1(i) = k_1 f(i) , \quad f_2(i) = k_2 f(i) , \ldots ;$$

essendo nei due casi così distinti, h_1, h_2 ... oppure k_1, k_2 ... delle costanti. È chiaro allora, che si potrà scrivere una relazione analoga alla (7), ma sotto una delle forme seguenti:

$$di = - p \,.\, \Sigma\, h f(i) \,.\, dx ;$$
$$di = - f(i) \,.\, \Sigma\, k p \,.\, dx .$$

E tali equazioni differenziali si integrano esattamente come

Digitized by Google

la (7); per cui valgono anche le conclusioni circa la simmetria delle trasmissioni per rapporto all'assorbimento.

Da quanto precede, appare chiaro che il fatto della simmetria della funzione deriva dall'aver potuto scrivere il valore della variazione elementare di in guisa che esso sia rappresentato da un solo termine esprimente il prodotto di una funzione della sola i per una funzione della sola x. Così essendo, è immediatamente possibile la separazione delle variabili e la conseguente integrazione per quadrature dei due membri. Perchè venga meno la simmetria, occorre intanto la coesistenza dei due fatti attenuativi, rappresentabili con espressioni di questo genere:

$$-p_1 f_1(i)\,dx\,, \quad -p_2 f_2(i)\,dx\,;$$

ma tali, che non si possano raccogliere in un solo termine dello stesso tipo. Ciò avverrà dipendentemente dalla particolare natura delle funzioni p ed f, o più semplicemente quando $p_1 \neq h p_2$ o $f_1 \neq k f_2$; essendo h, k delle costanti.

Nel caso fisico che si studia, l'attenuazione è dovuta a due cause. Una di esse, geometrica (attenuazione per divergenza), mai potrà venir meno, nè la sua espressione analitica può esser cambiata. Per essa:

$$p_1 = \frac{2}{x}\,, \quad f(i) = i\,.$$

Per l'altra causa, quella cioè corrispondente all'assorbimento, p è una funzione qualunque di x, e nessuna ipotesi particolare si può fare su di essa. Al fine di spiegare la dissimmetria osservata sperimentalmente, occorre ammettere che essa si verifichi con una legge del tipo $p f(i)\,dx$, dove $f(i)$ indichi una funzione diversa da i e p una funzione di x diversa da k/x (essendo k costante).

D'altra parte la funzione $f(i)$ deve differire poco da i; l'ipotesi più semplice è dunque che:

$$f(i) = i^{1+\epsilon}\,,$$

dove la quantità ϵ è piccola ma diversa da zero. Inoltre le osservazioni e le esperienze da me fatte, farebbero credere che

Digitized by Google

essa debba essere, nei casi studiati, positiva. L'attenuazione complessiva elementare sarà espressa da:

$$di = -\frac{2i\,dx}{x} - p i^{1+\varepsilon}\,dx\,,$$

od anche:

$$\frac{di}{dx} = -\frac{2i}{x} - p i^{1+\varepsilon}\,.$$

Questa equazione, posto $i^{-\varepsilon} = y$, e cioè

$$di = -\frac{1}{\epsilon} y^{-1-\frac{1}{\varepsilon}}\,dy\,,$$

si trasforma nell'altra:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x} + p\epsilon\,.$$

L'integrale di questa equazione è perfettamente determinato, non appena si assegni il valore i_a dell'intensità i in un punto qualunque di ascissa a, che, per evitare la considerazione di valori infiniti, dovrà essere diverso dall'origine. Ed esso è:

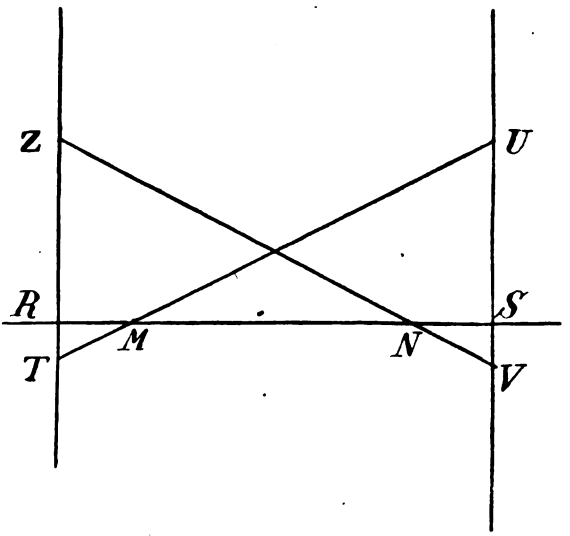
$$y = i^{-\varepsilon} = x^{2\varepsilon}\left(\epsilon \int_a^x p x^{-2\varepsilon}\,dx + i_a{}^{-\varepsilon}\right). \qquad (8)$$

L'esame di questa funzione, indipendentemente dalla possibilità di integrazione della funzione sotto il segno, fa comprendere come essa non possa dar luogo agli stessi valori della intensità i quando si inverta la distribuzione del coefficiente p lungo il tratto (a, x); salvo che p sia costante, nel qual caso, manifestamente, riappare la simmetria. Anzi, è facile verificare che, finchè $\epsilon \neq 0$, è questo l'unico caso in cui può verificarsi lo stesso valore di i in corrispondenza a distribuzione inversa del coefficiente p. Si osservi infatti che tale distribuzione inversa, in generale, corrisponde a considerare la funzione $p(a + b - x)$ in luogo di $p(x)$, dove con b si è indicata l'ascissa dell'estremo del tratto che si considera. Ora, se il secondo

Digitized by Google

membro della (7) non muta sostituendo $p(a+b-x)$ a $p(x)$, e ciò per qualunque valore di b, basta supporre $x=b$, per dedurne $p(a)=p(b)$, cioè, essendo a e b arbitrari, $p=\text{cost.}$

Per riferirmi ora ad un caso concreto, il quale dia anche luogo a relazioni analitiche non troppo complesse, si supponga di avere due stazioni R, S, situate alla distanza L. Lungo tale tratto, scelgo due punti M, N, rispettivamente distanti dai due estremi per i segmenti $RM=NS=a$. Sia $RN=b$; talchè $RS=a+b$ (vedi figura). I punti M, N si potranno in seguito supporre vicinissimi rispettivamente ad R ed S, talchè i tratti RM ed NS diventino piccolissimi ed anche trascurabili di fronte ad L.



Suppongasi ora che la distribuzione, lungo il tratto L, del coefficiente di assorbimento p, sia data dalla legge lineare

$$p_1 = A(x-a);$$

tale legge corrisponde al diagramma TU. Si comprende come questo diagramma non possa avere, con tutto rigore, significato fisico, giacchè secondo esso, nel tratto RM, p assumerebbe valori negativi, ed invece di assorbimento, in tale tratto vi sarebbe

Digitized by Google

guadagno di energia, il che è assurdo. Ma la rappresentazione grafica può risultare approssimata al vero quanto si vuole, in vista della piccolezza suddetta del tratto RM.

Nella figura, è segnata inoltre la retta VZ, la quale rappresenta il diagramma inverso di distribuzione di p, corrispondente alla equazione:

$$p_2 = A\,(b - x).$$

Sostituisco queste due espressioni particolari della funzione p successivamente, nella (8). Procedendo alle integrazioni, si hanno i valori i_1 e i_2 delle intensità in un punto qualunque distante per x dal punto R:

$$i_1^{-\varepsilon} = A\epsilon\, x^{2\varepsilon}\,\frac{x^{2-2\varepsilon} - a^{2-2\varepsilon}}{2 - 2\epsilon} - A\epsilon\, x^{2\varepsilon}\, a\,\frac{x^{1-2\varepsilon} - a^{1-2\varepsilon}}{1 - 2\epsilon} + \frac{x^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon},$$

$$i_2^{-\varepsilon} = A\epsilon\, bx^{2\varepsilon}\,\frac{x^{1-2\varepsilon} - a^{1-2\varepsilon}}{1 - 2\epsilon} - A\epsilon\, x^{2\varepsilon}\,\frac{x^{2-2\varepsilon} - a^{2-2\varepsilon}}{2 - 2\epsilon} + \frac{x^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon}.$$

Queste due espressioni sono diverse l'una dall'altra. E per metterle in forma più esplicita facciamo il caso di $x = b$. Si ha:

$$i_1^{-\varepsilon} = A\epsilon\,\frac{b^2 - a^{2-2\varepsilon}\, b^{2\varepsilon}}{2 - 2\epsilon} - A\epsilon\,\frac{ba - b^{2\varepsilon}\, a^{2-2\varepsilon}}{1 - 2\epsilon} + \frac{b^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon},$$

$$i_2^{-\varepsilon} = A\epsilon\,\frac{b^2 - a^{1-2\varepsilon}\, b^{2\varepsilon+1}}{1 - 2\epsilon} - A\epsilon\,\frac{b^2 - a^{2-2\varepsilon}\, b^{2\varepsilon}}{2 - 2\epsilon} + \frac{b^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon}.$$

Se, come si è detto più sopra, si suppone a piccolissimo di fronte a b, trascurando i termini in cui rientra quella grandezza, si può scrivere:

$$i_1^{-\varepsilon} = A\epsilon\,\frac{b^2}{2 - 2\epsilon} + \frac{b^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon},$$

$$i_2^{-\varepsilon} = A\epsilon\,\frac{b^2}{1 - 2\epsilon} - A\epsilon\,\frac{b^2}{2 - 2\epsilon} + \frac{b^{2\varepsilon}}{a^{2\varepsilon}}\, i_a^{-\varepsilon}.$$

Così, la differenza tra i valori di i_1 e i_2 appare più evidente, rimanendo definitivamente stabilita la dissimmetria della

Digitized by Google

propagazione dell'energia raggiante, quando si facciano comulativamente le ipotesi della divergenza geometrica, della proporzionalità dell'assorbimento ad una potenza della intensità diversa da uno e della non uniforme distribuzione del coefficiente p di assorbimento lungo la visuale compresa fra le due stazioni.

Rimarrebbe ora da stabilire quale sia il valore di ϵ. Per ciò, soltanto l'esperienza potrà dare risposta esauriente; e soltanto allora si potrà tentare di compiere una valutazione numerica della differenza dei valori di i_1 e i_2. Non mi nascondo la difficoltà di questo problema pratico, dipendentemente dal fatto che non si saprà mai con precisione quale forma assumerà, nei singoli casi pratici, la funzione p. Ma comunque, confido di ricavare dalle esperienze o dalle osservazioni, dati sufficienti per confermare l'attendibilità della nuova ipotesi avanzata, sul fenomeno dell'assorbimento.

Termino questa Nota segnalando l'opera zelante prestata dal prof. G. Todesco, nella parte sperimentale e pratica di queste ricerche, e la cortese assistenza datami del prof. C. Rimini nella esecuzione degli sviluppi analitici.

Digitized by Google

Osservazioni litologiche e mineralogiche sul giacimento di Castiglione (Traversella).

Nota del Socio corrisp. LUIGI COLOMBA

(Con una tavola)

I.

Il giacimento a cui si riferisce la presente nota appartiene al gruppo dei giacimenti di Traversella i quali sono tutti dovuti, secondo quanto fu in modo sicuro riconosciuto da V. Novarese (1) ad intensi fenomeni di contatto e di estrazione magmatica, di carattere essenzialmente idatogenico, manifestatisi in diretto rapporto colla intrusione del massiccio dioritico di Valchiusella a spese dei banchi di calcare intercalati fra gli schisti cristallini di detta valle.

Questi giacimenti affiorano a diverse altezze lungo il vallone percorso dal torrente Bersella che sbocca nella valle principale in vicinanza immediata dell'abitato di Traversella, e fra questi quello di Castiglione è il primo che si incontra risalendo il detto vallone dopo quello di Riondello già da me ampiamente descritto unitamente alle rocce del massiccio (2). Esso trovasi

(1) V. Novarese, *L'origine dei giacimenti di Brosso e Traversella*, " Boll. del R. Com. Geol. Ital. „ (1901); *Die Erzlagerstätten von Brosso und Traversella in Piemont*, " Zeits. für prakt. Geol. „ 1902); *La serpentina di Traversella e la sua origine*, " Boll. del R. Com. Geol. Ital. „ (1902).

(2) L. Colomba, *Ricerche sui giacimenti di Brosso e Traversella. Parte I: Osservazioni petrografiche sul massiccio dioritico di Valchiusella*, " Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino „, Serie II, Tomo LXIII, (1911-12). — *Parte II: I fenomeni di metamorfismo e di deposito nei giacimenti inferiori di Traversella*, " Id. id. „, Serie II, Tomo LXVI (1914-15).

Digitized by Google

a poco più di un migliaio di metri di distanza da quest'ultimo, dal quale è separato da un avanzamento delle rocce dioritiche, essendo a sua volta contenuto in una loro posteriore rientranza.

Considerando la sua posizione e la sua altitudine appare evidente che esso si originò a spese di masse calcaree appartenenti agli stessi banchi che diedero origine al giacimento di Riondello e che vennero da questi staccate in seguito agli spostamenti determinatisi per la intrusione delle rocce dioritiche, al pari di quanto avvenne anche per i giacimenti superiori di Pian del Gallo, di Alpe Cima e di Montajeu (Montacuto).

La sua ampiezza riferita alle parti attualmente note, cioè a quelle che furono in passato oggetto di lavorazione, non è molto grande; si può però presumere che essa in altri tempi fosse maggiore avendosi a poche diecine di metri più in alto ed addossati alla parete del massiccio alcuni affioramenti di rocce pirosseniche analoghe a quelle che si trovano più in basso. Ciò lascia supporre che anticamente il giacimento avesse una maggiore estensione e che esso sia stato posteriormente ridotto alle attuali condizioni dai fenomeni di erosione torrenziale.

Percorrendo le gallerie superiori di Castiglione si nota che, prima di raggiungere le formazioni metamorfiche, si incontra sempre una cortina di rocce dioritiche simili a quelle del massiccio. Tale fatto, che in passato indusse taluno a supporre che il giacimento fosse interstratificato nelle dioriti (ipotesi questa insostenibile perchè altre gallerie scavate al di sotto delle precedenti raggiunsero il massiccio senza incontrare traccia alcuna di formazioni metamorfiche), si può facilmente spiegare senza che occorra di ammettere una particolare origine per il giacimento di Castiglione. Basta infatti supporre che, al pari di quanto avviene negli altri giacimenti di Traversella, anche nel nostro caso si abbia qualche apofisi dioritica che, staccandosi dal massiccio, penetri negli schisti cristallini ed avvolga le masse metamorfiche.

Questa disposizione anzi darebbe anche ragione della maggiore intensità che si nota nei fenomeni di metamorfismo e delle più profonde modificazioni che si osservano nelle formazioni metamorfiche di Castiglione in confronto di quelle caratteristiche

Digitized by Google

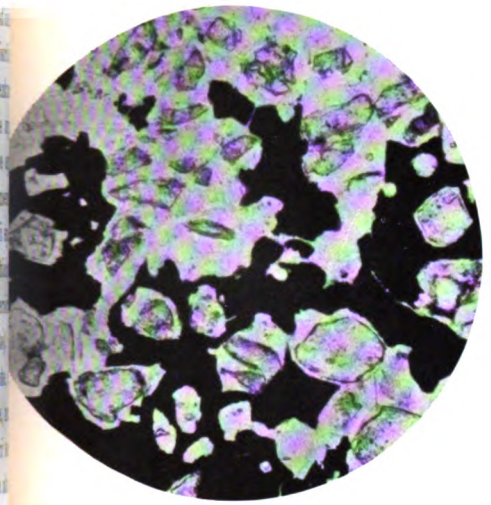


Fig. 1

Fig. 2

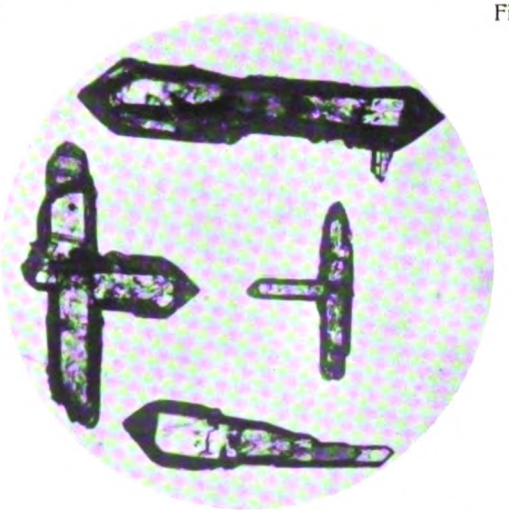


Fig. 3

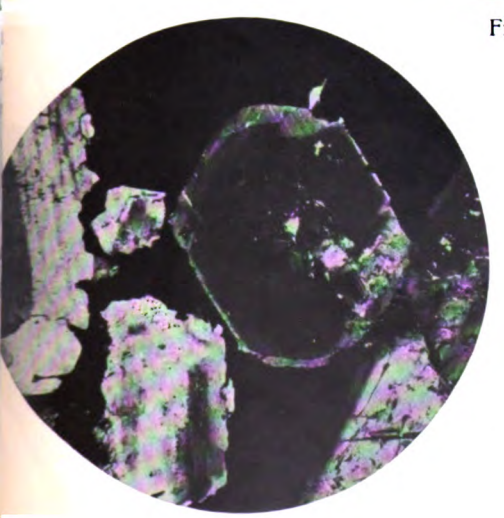


Fig. 4

Fig. 5

Digitized by Google

Digitized by Google

delle zone meno profonde del giacimento di Riondello, zone che sono per la loro posizione da considerarsi come equivalenti a quelle di Castiglione.

Infatti, come già ho accennato nei miei precedenti studi, in queste zone di Riondello le formazioni metamorfiche costituite prevalentemente da pirosseniti, accompagnate talvolta da anfiboliti e da qualche roccia olivinica, sono relativamente sane, mostrando solo tracce non molto intense di modificazioni posteriori rappresentate essenzialmente da una parziale loro serpentinizzazione dovuta ad azioni di tipo idatogenico manifestatesi in un secondo tempo durante la intrusione dioritica per opera di acque circolanti. Ora a Castiglione, dove le formazioni metamorfiche sono rappresentate da analoghi tipi di rocce, escluse le oliviniche, i fenomeni di serpentinizzazione sono molto più intensi ed estesi.

Così pure, mentre a Riondello i calcari sono ancora largamente rappresentati, invece a Castiglione mancano del tutto, avendosi solo scarse masse di carbonati ferro-magnesiaci che talvolta passano direttamente alla siderite. Lo stesso fatto si ha pure in quelle parti delle pirosseniti e delle anfiboliti in cui ancora si hanno tracce delle preesistenti masse calcaree, anch'esse però fortemente arricchite in ferro.

L'unico minerale metallifero veramente importante a Castiglione è la magnetite, che è diffusa nelle rocce metamorfiche in granuli, in vene ed in accentramenti ed ammassi anche di notevoli dimensioni. La pirite manca quasi completamente, comparendo solo, talvolta associata a calcopirite, in piccoli cristalli disseminati in talune delle masse di carbonati. Un minerale che, per quanto sempre molto raro, si può considerare come caratteristico per il giacimento di Castiglione è la molibdenite, già studiata da G. Lincio (1). Essa però, come ha fatto vedere il predetto autore, per il complesso dei caratteri delle sostanze che l'accompagnano, è da considerarsi come dovuta alla seconda

(1) G. Lincio, *La molibdenite del giacimento di Castiglione-Traversella*, "Atti della Soc. dei Natur. e Matem. di Modena „, Serie V, vol. VII (1922).

Digitized by Google

fase metallifera che si manifestò in Valchiusella con caratteri schiettamente filoniani, contemporaneamente alla comparsa delle rocce porfiriche di Drusacco e dei dintorni di Brosso (1) ed alla quale è da riferirsi l'origine sia del giacimento piritifero di Brosso per quelle sue parti, e sono le maggiori, che si trovano lontane dal massiccio dioritico, sia di quelle limitate manifestazioni di carattere filoniano che si osservano, non solo in alcune parti dei giacimenti di Traversella, ma pur anche direttamente nelle rocce del massiccio, come nella località di Nasurg presso Vico Canavese, e negli schisti cristallini, come avviene alle grange di Pinacrosa sul versante sinistro del vallone di Bersella.

Anche la molibdenite partecipa di queste varie giaciture, avendone io constatato la presenza sotto forma di sottili spalmature negli schisti cristallini nelle zone prossime al giacimento in relazione con alcune fenditure che li attraversavano.

II.

Riassumo ora brevemente i risultati delle mie osservazioni sulle sopraccennate formazioni metamorfiche di Castiglione, per quanto si riferisce ai loro caratteri, in rapporto ai vari fenomeni da cui derivarono.

Cominciando dalle pirosseniti che ne costituiscono il gruppo più importante, si osserva che esse ad un semplice esame superficiale mostrano caratteri esterni di vere rocce serpentinose, presentandosi in masse compatte di color variante dal giallo cereo al verde-giallo ed al verde-bruno, dotate di frattura indistinta od imperfettamente concoide ed attraversate da vene di varia grandezza di magnetite, che si trova pure disseminata in impregnazioni diffuse, in noduli ed in accentramenti.

All'esame microscopico invece appare immediatamente la loro vera natura mineralogica di pirosseniti formatesi a spese

(1) A queste rocce porfiriche sono anche da riferirsi alcune rocce porfiriche del giacimento di Brosso indicate localmente, non si sa perchè, col nome di *quarziti dei giacimenti piritosi*. Esse differiscono solo dalle altre per il loro molto più avanzato stato di alterazione.

Digitized by Google

di preesistenti masse calcaree, talvolta ancora riconoscibili, malgrado la loro spesso avanzata trasformazione in serpentino, rimanendo sempre tracce visibili del primitivo pirosseno, costituito anche in questi casi da termini diopsidici e meno frequentemente da fassaite.

Riguardo al processo di serpentinizzazione si nota che in un primo tempo il pirosseno passò ad anfibolo, che nei casi di alterazione parziale avvolse i cristalli di pirosseno e penetrò nel loro interno seguendo i piani di sfaldatura. In un secondo tempo questo anfibolo passò a serpentino.

Nella figura 1ª della tavola è rappresentata con un ingrandimento di 50 diametri una sezione di dette pirosseniti vista a luce naturale ed in essa appare evidente il predetto processo di serpentinizzazione, in seguito al quale i residui dei preesistenti cristalli di pirosseno appariscono sotto forma di granuli privi di contorni definiti, avvolti, tanto quando sono liberi quanto nei casi in cui sono inclusi nella magnetite, da una sostanza incolora fibrosa costituita da serpentino.

Dal modo poi in cui si presenta la magnetite nella massa della roccia e tenendo conto specialmente del fatto che anche quando è incluso nella magnetite, il pirosseno appare serpentinizzato al pari di quanto avviene negli altri punti della roccia, si deduce che la comparsa della magnetite non dovette avvenire nel primo tempo dei fenomeni di metamorfismo, cioè quando si originarono le pirosseniti, ma bensì nel secondo tempo quando in queste si iniziò il processo di serpentinizzazione.

La differenza poi essenziale che si ha fra le pirosseniti di Riondello e quelle di Castiglione, oltre alla mancanza in queste ultime del granato e della speziaite, è data dalla presenza in queste della magnetite, il che non si verifica mai nelle zone equivalenti del giacimento di Riondello, dove la magnetite è sempre contenuta nei calcari più o meno modificati.

Fatti analoghi si osservano nelle rare anfiboliti pure serpentinizzate, che si riconoscono facilmente dalle pirosseniti per il colore più chiaro, tendente al grigiastro, delle rispettive masse serpentinose e per la loro evidente struttura a grandi intrecci di fibre.

Digitized by Google

Le masse dei carbonati che, come dissi, debbono a Castiglione considerarsi come i rappresentanti delle preesistenti masse calcaree hanno caratteri strutturali e mineralogici varianti col variare del loro colore.

Quelle di tinta molto chiara, bianche o grigiastre, hanno una struttura granulare e compatta, ed in esse si nota esclusivamente la presenza di un minerale in piccole laminette bianche, leggermente untuose al tatto e disseminate uniformemente nella loro massa. Questo minerale che doveva inizialmente essere costituito da una mica, appare ora come un prodotto intermedio fra la mica ed il talco. Le dette masse sono in generale povere in ferro e sono quindi da considerarsi come ultimi residui di preesistenti masse calcaree sottoposte ad un debole metamorfismo.

Quelle di tinta gialla o gialla brunastra rappresentano invece tipi molto ricchi in ferro, i quali, come già dissi, possono anche giungere alla pura siderite. Esse non hanno più struttura compatta, presentando invece l'aspetto di aggregati di romboedri deformati intimamente associati e fortemente compressi, con frequenti vani che dànno origine a piccole geodi le cui pareti sono tappezzate dalle estremità dei predetti romboedri. Tutte contengono abbondantissima clorite in laminette verdi non disseminate uniformemente nella loro massa, ma bensì associate e riunite in accentramenti in diretto rapporto colle precitate geodine.

Nei termini non molto ricchi di ferro, oltre alla clorite, non si hanno che scarsi e microscopici cristalli di pirite e di quarzo, sempre associati alla clorite. Nei termini invece più ricchi in ferro si ha pure, sempre associata alla clorite, la magnetite in granuli ed in cristalli microscopici talora anche assai abbondanti.

Si può quindi ammettere che questi varî tipi di carbonati ricchi in ferro rappresentino altrettanti stadi differenti di modificazione dei calcari preesistenti, i quali, in seguito ad azioni progressivamente più intense di carattere idatogenico, abbiano dato origine a tipi gradatamente più ricchi in ferro, nei quali quindi dapprima si sarebbe formata solo clorite ed in seguito quando il ferro fu in eccesso, anche la magnetite.

Digitized by Google

Considerate dal lato puramente mineralogico appare chiaramente da quanto ho detto, che queste masse di carbonati non presentano un grande interesse. In un solo caso ho avuto occasione di esaminare alcuni esemplari di un carbonato ricchissimo in ferro che presentava un certo interesse per la sua maggiore ricchezza in minerali e per alcuni speciali caratteri di taluni fra questi. In essi infatti, oltre alla clorite, alla pirite, al quarzo ed alla magnetite, constatai la presenza della calcopirite, del rutilo e di un minerale che, per quanto dubitativamente, supposi potersi riferire alla ottaedrite. Tutti questi minerali erano, al pari degli altri, associati alla clorite.

Per quanto riguarda la clorite, la pirite e la magnetite non trovai nulla di nuovo; così pure nulla vi è da accennare rispetto alla calcopirite che si presentava in granuli informi. Il rutilo è degno di nota per il fatto che non fu mai trovato in altri punti dei giacimenti di Traversella, mentre invece appare in grandi cristalli in zone molto prossime ad essi; negli esemplari a cui accenno esso si presentava in gruppi poligeminati serpentini di piccolissimi cristalli di color nero e dotati di vivissima lucentezza adamantina; in essi mi fu possibile ad occhio di riconoscere la presenza dei due prismi tetragonali, di un prisma ditetragonale e di due bipiramidi che per le loro posizioni ed inclinazione sembravano doversi riferire alla $\{111\}$ ed alla $\{101\}$.

Associata al rutilo, ma molto più scarsa di esso, osservai una sostanza in granuli ed in incompleti frammenti di cristalli di color giallo a giallo-ranciato, avente una durezza ed un peso specifico pressochè uguali a quelli del rutilo. Essa era birifrangente e mi diede esclusivamente la reazione del titanio. Per quanto dubitativamente io la riferii alla ottaedrite perchè fra i cristalli incompleti ebbi modo di osservarne uno che sembrava costituito da una bipiramide tetragonale molto acuta ampiamente smussata da un pinacoide basale imperfetto per la presenza di tremie.

Anche il quarzo presentava nei detti esemplari alcuni interessanti caratteri. Infatti notai che spesso i suoi cristalli, sebbene sempre piccolissimi, presentavano forme a clava ed a manubrio,

Digitized by Google

come si vede in due di quelli riprodotti nella figura 3ª della tavola con un ingrandimento di 15 diametri; tali forme, unite al fatto che le estremità ingrossate apparivano nitide e lucenti, mentre invece le parti centrali si mostravano corrose, mi lasciarono supporre che essi siano stati sottoposti a fenomeni di corrosione ed a successivi fenomeni di rigenerazione manifestatisi alle loro estremità.

Questi cristalli di quarzo erano anche interessanti sotto un altro punto di vista. Invero io notai pure che spesso essi formavano dei gruppi i quali in alcuni casi, come appare dai due riprodotti al centro della già citata figura, assumevano l'aspetto di veri geminati. Ed anzi, poichè anche il già citato cristallo a manubrio portava ad una delle sue estremità rigenerate un piccolo subindividuo in posizione di geminato, si sarebbe tratti a supporre che la tendenza alla comparsa della geminazione abbia incominciato od abbia continuato a manifestarsi durante i fenomeni di rigenerazione. Debbo però far notare come, date le minime dimensioni dei cristalli e date le loro imperfezioni, non mi fu possibile di stabilire con sicurezza se si trattava di veri geminati oppure solo di forme vicine, per quanto la loro regolarità militi piuttosto in favore della prima di queste ipotesi.

Lungo i confini del giacimento di Castiglione con gli schisti cristallini si hanno frequenti litoclasi che si prolungano attraverso a questi ultimi e che presentano talvolta un alto interesse mineralogico, sebbene contengano solamente cristalli di calcite e di quarzo. Basta a questo proposito rammentare che è da taluna di esse che provennero i geminati di calcite e di quarzo ampiamente descritti da Q. Sella (1) nelle sue classiche ricerche sui geminati pubblicate nel 1856.

In alcune di queste litoclasi contenenti ambedue i predetti minerali, le pareti sono tappezzate dai cristalli di quarzo ai quali spesso aderiscono i cristalli scalenoedrici di calcite con dimensioni che non superano mai i 10 o 12 millimetri. Ora

(1) Q. Sella, *Studi sulla mineralogia sarda*, " Mem. della R. Accademia delle Scienze di Torino „ Serie II, Tomo XVII (1856).

Digitized by Google

talvolta in dette litoclasi osservai che i cristalli di calcite erano sostituiti da altri i quali, pur mantenendo interamente il primitivo abito scalenoedrico, corrispondevano chimicamente ad un idrossido di ferro avente una composizione chimica molto prossima a quella della goethite, che si sarebbe quindi formata per un processo di pseudomorfosi avente nulla di eccezionale in un ambiente quale è quello di Traverselle. Ciò che però era degno di nota si è che i cristalli pseudomorfi di goethite non raggiungevano mai le dimensioni massime dei preesistenti cristalli di calcite, mantenendosi anzi nei limiti di quelli più piccoli, come se solamente questi ultimi fossero stati capaci di trasformarsi in goethite.

Ora la spiegazione di questo fatto mi apparve chiaramente in seguito all'esame di alcune di queste litoclasi ancora percorse dall'acqua, poichè potei constatare che in esse i cristalli pseudomorfi non solo avevano dimensioni uguali a quelle dei cristalli di calcite, ma pur anche apparivano molto più ricchi in acqua di quelli a cui ho prima accennato, il che li rendeva pastosi invece che friabili, come invece si mostravano quelli di goethite.

Si può quindi supporre che in queste litoclasi la limonite abbia sostituito la calcite, senza dar luogo a variazioni nelle dimensioni dei cristalli pseudomorfi, e che solo posteriormente per un progressivo processo di disidratazione si sia verificata in questi una graduale contrazione di volume, che però non avrebbe per nulla influito sulla forma dei cristalli, i quali quindi avrebbero gradatamente assunto dimensioni sempre minori fino a quande il processo di disidratazione avrebbe avuto termine. Ed anzi potei facilmente riprodurre tale fatto sperimentalmente lasciando per lungo tempo alcuni dei predetti cristalli pastosi di limonite in un ambiente secco. In tali condizioni infatti io potei constatare che si avverò quanto ho innanzi accennato e che la contrazione di volume ed il processo di disidratazione si arrestarono quando appunto i cristalli pseudomorfi raggiunsero una composizione chimica corrispondente a quella della goethite, che rappresentava quindi lo stato di equilibrio corrispondente all'estremo loro limite di disidratazione.

Digitized by Google

III.

Il diretto contatto che in alcune parti del giacimento di Castiglione esiste fra le rocce del massiccio e le formazioni metamorfiche ha dato origine ad alcuni interessanti fenomeni di mineralizzazione che si possono chiamare inversi, perchè sono dovuti ad infiltrazioni le quali penetrarono nella massa già consolidata delle rocce dioritiche provenendo dalle zone metamorfiche-metallifere per opera dei medesimi agenti che diedero origine alla comparsa in queste ultime della magnetite.

Un interessante esempio di questi fenomeni fu da me osservato in alcuni esemplari di diorite provenienti dalle zone esterne del massiccio, nei quali si osservavano alcune impregnazioni di magnetite che penetravano nel loro interno per un certo tratto, modificandone sensibilmente la struttura.

Premetto che le dioriti di Castiglione mantengono integralmente i caratteri che io considerai come proprii dei termini più diffusi e normali, per cui anche in esse sono visibili i già da me descritti fenomeni di corrosione dei plagioclasi per opera di una intrusione posteriore di un magma ortosico proveniente da grande profondità e che si diffuse nella massa delle dioriti.

Le impregnazioni a cui intendo di accennare apparentemente presentavano due tipi molto differenti, poichè, mentre in alcuni casi esse si riducevano ad un semplice arricchimento in magnetite disposta in letti paralleli dello spessore di pochi centimetri, senza che la struttura della roccia apparisse modificata sensibilmente, in altri casi invece esse assumevano l'aspetto di masse nere, compatte, attraversanti la roccia come veri strati. In ambedue i casi poi notai che da esse si passava rapidamente alla roccia normale.

Dall'esame microscopico di una serie di sezioni provenienti da vari punti delle predette impregnazioni, dalle più povere in magnetite alle più ricche, risultò che tanto le une quanto le altre dovettero manifestarsi dopo la completa consolidazione delle dioriti, in conseguenza di un fenomeno di infiltrazione

Digitized by Google

proveniente dall'esterno e dovuto alle medesime cause che determinarono la comparsa della magnetite nelle pirosseniti e nelle anfiboliti. Infatti potei constatare che i due tipi di impregnazione differivano l'uno dall'altro soltanto per la intensità del fenomeno che in ambedue i tipi portò alla sostituzione della magnetite alle masse allotriomorfe di ortosio a cui è dovuta la corrosione dei cristalli di plagioclasio.

Ed anzi a questo proposito ho notato non solo come tale sostituzione sia avvenuta esclusivamente a spese delle masse allotriomorfe di ortosio e non dei cristalli di plagioclasio, ma pur anche come intorno a questi ultimi ed in perfetto isorientamento con essi si sia depositata una sostanza di nuova formazione, di natura plagioclasica, tendente a risanare le loro corrosioni ed a ricostituirne quindi le forme iniziali ; questa sostanza poi appariva dotata di un grado di acidità superiore a quella dei cristalli inclusi, essendo rappresentata da termini oligoclasici molto ricchi in sodio ed anche direttamente da albite.

Notevole poi era il fatto pure da me osservato che le lamelle di geminazione visibili in essa si comportavano esattamente come la continuazione di quelle visibili nei cristalli inclusi, sebbene, in causa del diverso grado di acidità, si estinguessero sotto angoli diversi.

Nelle figure 2ª, 4ª, 5ª della tavola sono riprodotte tre sezioni che dànno modo di riconoscere i predetti caratteri. Nella figura 2ª si ha un grande cristallo di plagioclasio zonato che si spezzò in più parti, anche spostate, per l'azione della intrusione dell'ortosio il quale penetrò anche nel suo interno e, come appare chiaramente, la magnetite, non solo si sostituì parzialmente alla circostante massa ortosica, ma pur anche penetrò nell'interno del cristallo. Nelle due figg. 4ª e 5ª sono riprodotti due cristalli corrosi di plagioclasio lungo il cui contorno è perfettamente visibile la sostanza di nuova formazione che tende a ricostituirne i contorni. Nella prima la tendenza alla detta ricostituzione è evidentissima e si vedono in essa distintamente alcune lamelle di geminazione secondo la legge dell'albite che si saldano completamente a quelle che si hanno nelle zone esterne del cristallo incluso. Nella figura 5ª si nota lo stesso fatto,

Digitized by Google

avendosi in essa un cristallo (quello che si vede al centro) il quale presenta due parti centrali più illuminate, rappresentanti il residuo della corrosione dovuta all'ortosio, che si mostrano inferiormente avvolte da alcuni strati successivi di un plagiocasio di nuova formazione più acido, le cui lamelle di geminazione formano la esatta continuazione di quelle molto fitte visibili nei frammenti centrali.

Genova, Istituto di Mineralogia, giugno 1929 (VII).

Digitized by Google

Studio cristallografico dell'Epidoto del Giassett in Val d'Ala (Piemonte).

Nota della Dott.ssa ELSA DEBENEDETTI
presentata dal Socio nazionale residente Emilio Repossi.

Sul lato settentrionale della val d'Ala, cioè sul versante opposto a quello dove si trovano i famosi giacimenti di epidoto del Paschietto, di Saulera e di Rocca Nera, si è trovato, vicino alla Testa Ciarva dove l'epidoto è rarissimo, un nuovo giacimento di epidoto, quello del Giassett. Esso fu descritto, alcuni anni fa, dal prof. Repossi.

" Il giacimento si raggiunge salendo dalle alpi del Giassett chiamate per antonomasia con questo nome e collocate ad occidente della Testa Ciarva, sullo sfondo del Pian della Mussa, verso le Alpi di Ciamarella. A meno di metà della salita, dove il sentiero attraversa il torrentello, s'incontrano nella prasinite alcuni banchi di epidoto, e non raramente questi presentano litoclasi, colle pareti ricoperte di cristalli.

" La roccia, in vicinanza dei litoclasi, si arricchisce di granato e di albite ed assume una tessitura più compatta. La calcite in uno dei banchi riempie parzialmente i litoclasi, investendo i cristalli impiantati sulle pareti, che si liberano solo asportando con acido il minerale involgente. Il giacimento è ricco e ha già dato buon numero di eleganti esemplari. I cristalli di epidoto, addossati l'uno all'altro in croste fitte ed irregolari, sono ordinariamente non molto grandi, superando di rado pochi millimetri di diametro, ma sono belli e brillanti. Il loro colore è giallo-verde, o verde-bruno chiaro; talvolta la tinta passa al bruno più deciso. Spesso sono perfettamente limpidi e trasparenti, specie i più piccoli „.

Digitized by Google

Le forme trovate dal prof. Repossi sono le seguenti:

$$\{100\}\ \{201\}\ \{101\}\ \{102\}\ \{20\bar{1}\}\ \{10\bar{1}\}\ \{10\bar{2}\}\ \{011\}\ \{001\}$$

$$\{111\}\ \{11\bar{1}\}\ \{22\bar{1}\}\ \{213\}.$$

Poichè in questi ultimi tempi si è venuti in possesso di materiale molto più abbondante, si è creduto opportuno di riprendere lo studio di questo epidoto, col materiale fornito in parte dal collezionista Dott. Crida e in parte dal Museo Mineralogico.

Tra i cristalli da me misurati si possono distinguere facilmente 2 tipi: al 1° appartengono la maggior parte dei cristalli; essi, simili a quelli già descritti dal prof. Repossi, sono di colore giallo-verde chiaro, di dimensioni variabili da 1 a 2 mm. Ve ne sono anche di più grandi, ma questi possiedono però un minor numero di facce. Essi sono raramente terminati alle due estremità, di solito impiantati per un'estremità dell'asse *y* e, abito eccezionale pel minerale, poco allungati in questa direzione. Nelle altre due direzioni sono quasi equidimensionali, qualche volta tabulari secondo $\{001\}$, qualche volta secondo $\{100\}$. Il 2° tipo è meno frequente, e potei misurarne solo due cristalli, di cui uno è geminato. Essi sono di colore verde più intenso. Il cristallo semplice ha abito più spiccatamente epidotico, ossia è allungato nella direzione dell'asse *y* e tabulare secondo $\{001\}$.

Molto frequenti sono anche i geminati secondo la solita legge dell'epidoto: asse di geminazione la normale a $\{100\}$. Quando non presentano angoli rientranti, essi non sono facilmente distinguibili dai cristalli semplici, per la mancanza della $\{010\}$, che, colla sua doppia striatura, caratteristica in geminati di altre località, ne agevolerebbe il riconoscimento.

I geminati sono in generale meno ricchi di forme, ad eccezione del geminato del 2° tipo, che è uno dei cristalli più ricchi. In alcuni di essi le due facce $\{001\}$ sono sviluppate e formano un angolo rientrante. In altri la $\{001\}$ è sviluppata solo in un individuo e forma un angolo *molto ottuso* colla $\{101\}$ dell'altro individuo.

Digitized by Google

Complessivamente le forme da me osservate sono 21:

$\{001\}$, $\{102\}$, $\{101\}$, $\{201\}$, $\{401\}$, $\{\bar{1}03\}$, $\{\bar{1}02\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{3}02\}$, $\{\bar{2}01\}$, $\{100\}$, $\{320\}$, $\{110\}$, $\{011\}$, $\{012\}$, $\{111\}$, $\{\bar{1}22\}$, $\{\bar{2}33\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{2}21\}$, $\{\bar{3}31\}$.

Descrizione delle singole zone.

Zona [100-010].

Le forme osservate sono: $\{100\}$, $\{320\}$, $\{110\}$.

Il pinacoide $\{100\}$ è una forma costante, in generale molto estesa, sovente stirata parallelamente a *y*.

Il prisma $\{320\}$ è una forma abbastanza rara e sempre lineare. Essa non è molto frequente neanche negli altri epidoti piemontesi. Dal La Valle non è stata trovata nei cristalli di val d'Ala. Essa è invece stata trovata dal Boeris in epidoti della valle di Ayas e dal Toborfty in epidoti della valle di Viù.

Il prisma $\{110\}$ è forma sempre presente e molto estesa; di solito dà belle imagini; raramente è striata parallelamente allo spigolo di combinazione colla $\{\bar{2}21\}$.

La $\{010\}$ non è mai stata osservata.

Zona [010-001].

Le forme osservate sono: $\{011\}$, $\{012\}$, $\{001\}$.

La $\{011\}$ è abbastanza frequente, di solito piccola, ma molto brillante, e dà sempre belle imagini al goniometro. Nel 2° tipo questa forma è molto più grande e bella.

La $\{012\}$ accompagna sovente la $\{011\}$, ma è sempre lineare.

Il pinacoide $\{001\}$ è forma costante, in generale molto estesa, però brutta, non molto brillante e qualche volta striata parallelamente a *y*.

Zona [100-001].

Le forme osservate sono: $\{100\}$, $\{401\}$, $\{201\}$, $\{101\}$, $\{102\}$, $\{001\}$, $\{\bar{1}03\}$, $\{\bar{1}02\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{3}02\}$, $\{\bar{2}01\}$.

Digitized by Google

Tutte le facce di questa zona sono quasi sempre striate a *y* e dànno in generale imagini multiple al goniometro.

Di questi pinacoidi, oltre {100} e {001} già descritti, sono frequentissimi {101}, {$\bar{1}$01}, {102}.

La {401} e la {$\bar{3}$02} sono state trovate una volta sola in uno stesso cristallo (del 2° tipo). Così pure la {201} e la {$\bar{1}$03} sono state trovate una volta sola nell'altro cristallo del 2° tipo. Queste quattro facce sono tutte appena lineari e hanno dato imagini confuse, quantunque sicuramente determinabili. Le {102} e {$\bar{2}$01} sono abbastanza frequenti, ma anch'esse lineari: la {$\bar{2}$01} in un solo cristallo è apparsa grande.

Zona [110-001].

Le forme osservate sono: {001}, {111}, {110}, {33$\bar{1}$}, {22$\bar{1}$}, {11$\bar{1}$}.

La {111} è meno frequente della {$\bar{1}$11} e, specialmente nei cristalli del 2° tipo, è notevole il maggior sviluppo di quest'ultima, che appare come la forma dominante all'estremità del cristallo. Questa osservazione è già stata fatta dal La Valle per gli epidoti della Val d'Ala ed anche da altri per gli epidoti delle valli di Ayas e Viù.

La {$\bar{2}$21} è sempre presente colla {$\bar{1}$11}. Di solito è grande e striata parallelamente allo spigolo di combinazione colla {110}. Nei cristalli del 2° tipo è invece strettissima e lunga.

La {$\bar{3}$31} è presente solo in qualche geminato, è grande, ma sempre molto striata, insieme alla {$\bar{2}$21} e nello stesso senso di questa.

[Zona 100-011].

Le forme osservate sono: {100}, {111}, {011}, {$\bar{1}$23}, {$\bar{2}$33}, {$\bar{1}$11}.

Oltre alle 4 già descritte, abbiamo le due forme {$\bar{1}$22} e {233}, trovate in un solo cristallo, e cioè nel più ricco del 2° tipo. Esse sono grandi e molto striate parallelamente allo spigolo di combinazione della {011} e {$\bar{1}$11} rispettivamente. Queste due forme, rare in questo epidoto, sono abbastanza fre-

Digitized by Google

quenti negli epidoti piemontesi e, in particolare, in quelli di Val d'Ala.

A queste forme ora descritte si potrebbe aggiungere come incerta una forma $\{hkl\}$ che si trova all'incrocio delle due zone [111-$\bar{1}$10] e [$\bar{1}$01-110].

Il simbolo (132), calcolato per questa forma, è discretamente in accordo colle misure fatte, a bagliore, nelle due zone:

	misurati	calcolati
(111) : (132)	20°,58′	20°,32′
(132) : ($\bar{1}$10)	58°,37′	59°,15′
(110) : (132)	22°,59′	22°,40 $^1/_2$′
(132) : (011)	11°,35′	11°,34 $^1/_2$′.

Questa faccia è però stata trovata una volta sola. La $\{132\}$ sarebbe nuova per l'epidoto.

Due combinazioni di forme, frequenti per i cristalli del 1° tipo, sono le seguenti:

I. $\{001\}$, $\{100\}$, $\{\bar{1}02\}$, $\{101\}$, $\{\bar{1}02\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{2}01\}$, $\{110\}$, $\{320\}$, $\{011\}$, $\{012\}$, $\{111\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{2}21\}$.

II. $\{001\}$, $\{100\}$, $\{101\}$, $\{110\}$, $\{011\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{2}21\}$.

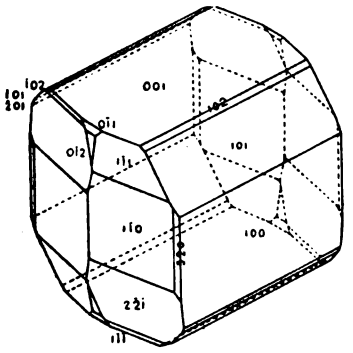


Fig. 1.

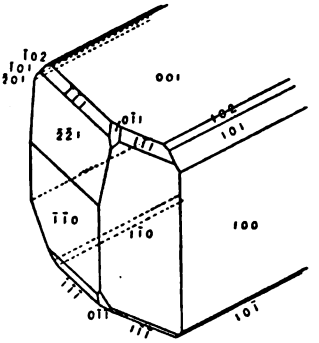


Fig. 2.

In questi sono da notare come forme predominanti oltre le $\{100\}$ e $\{001\}$ anche le $\{110\}$, $\{\bar{1}11\}$ e $\{\bar{2}21\}$. A questo tipo si riferiscono le figure 1 e 2.

Digitized by Google

Il cristallo semplice del 2° tipo ha la seguente combinazione di forme:

$\{001\}$, $\{100\}$, $\{102\}$, $\{101\}$, $\{201\}$, $\{\bar{1}03\}$,
$\{\bar{1}02\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{2}01\}$, $\{110\}$, $\{011\}$, $\{012\}$,
$\{111\}$, $\{\bar{1}22\}$, $\{\bar{2}33\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{2}21\}$

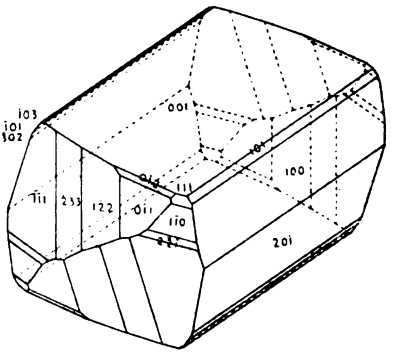


Fig. 3.

Una combinazione comune nei geminati è:

$\{001\}$, $\{100\}$, $\{101\}$, $\{\bar{1}01\}$,
$\{110\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{2}21\}$, $\{\bar{3}31\}$

(Figure 4 e 5).

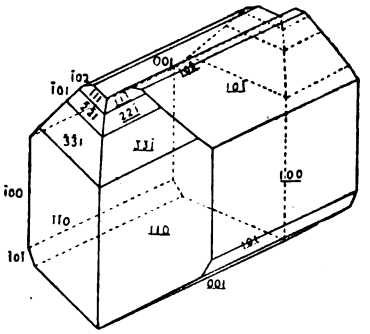


Fig. 4.

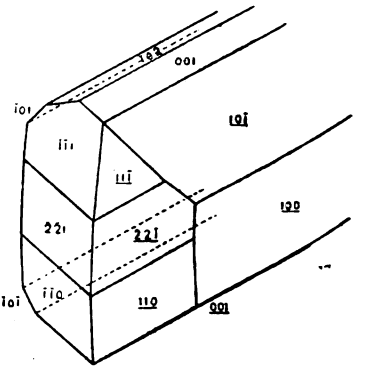


Fig. 5.

Digitized by Google

Per l'epidoto del Giassett, partendo dagli angoli migliori, si possono calcolare le costanti:

$$a : b : c = 1{,}57872 : 1 : 1{,}80978 ,$$

$$\beta = 64°{,}37'.$$

Siccome però esse non si differenziano molto dalle costanti di Kokscharow, usate comunemente, ho creduto bene di usare queste ultime per il calcolo degli angoli, qui avanti riportati.

Come abbiamo visto, l'epidoto del Giassett si può riportare, quanto a giacitura, agli altri della val d'Ala e, in generale, delle pietre verdi.

Per quanto riguarda l'abito, i cristalli del 1° tipo hanno qualche rassomiglianza con quelli più semplici del Paschietto, della Val di Viù ed anche dell'Ossola; i cristalli del 2° tipo invece presentano una somiglianza notevole più con quelli della Bettolina, in val d'Ayas, che cogli altri della val d'Ala.

Digitized by Google

Angolo	Calcolato	Media	Limiti dell'osservazione	N.
(001) : (102)	22°, 31′	22°, 23′ 1/2	22°, 21′ — 22°, 25′	2
(102) : (101)	12°, 12′	12°, 17′ 1/2	12°, 13′ — 12°, 22′	2
(001) : (101)	34°, 43′	34°, 44′	34°, 26′ — 34°, 59′	5
(101) : (201)	11°, 29′	11°, 37′	—	1
(201) : (100)	18°, 25′	18°, 10′	—	1
(101) : (401)	19°, 39′	19°, 2′	—	1
(401) : (100)	10°, 15′	10°, 47′	—	1
(101) : (100)	29°, 54′	29°, 49′	29°, 33′ — 30°, 2′	5
(001) : (100)	64°, 37′	64°, 37′	64°, 30′ — 64°, 56′	3
(001) : ($\bar{1}$03)	22°, 21′	21°, 32′	—	1
($\bar{1}$03) : ($\bar{1}$01)	41°, 21′	41°, 46′	—	1
(001) : ($\bar{1}$02)	34°, 21′	34°, 19′	34°, 7′ — 34°, 30′	6
($\bar{1}$02) : ($\bar{1}$01)	29°, 21′	29°, 24′	29°, 10′ — 29°, 37′	4
(001) : ($\bar{1}$01)	63°, 42′	63°, 50′	—	1
($\bar{1}$01) : ($\bar{3}$02)	16°, 35′	16°, 37′	—	1
(302) : ($\bar{1}$00)	35°, 7′	35°, 7′	—	1
($\bar{1}$01) : ($\bar{2}$01)	25°, 44′ 1/4	25°, 44′	25°, 33′ — 25°, 55′	4
($\bar{2}$01) : ($\bar{1}$00)	25°, 57′ 1/4	26°, 1′	25°. 51′ — 26°, 17′	4
($\bar{1}$01) : ($\bar{1}$00)	51°, 41′ 1/2	51°, 51′ 1/2	51°, 39′ — 52°, 2′	5
(001) : (012)	39°, 10′	39°, 21′	39°, 7′ — 39°, 30′	5
(012) : (011)	19°, 17′ 1/2	19°, 17′	19°, 6′ — 19°, 27′	5
(001) : (011)	58°, 27′ 1/2	58°, 33′	58°, 23′ — 58°, 40′	5
(100) : (320)	43°, 33′ 1/2	43°, 36′	43°, 31′ — 43°, 41′	3
(320) : (110)	11°, 24′ 1/2	11°, 24′	11°, 18′ — 11°, 32′	3
(100) : (110)	54°, 58′	54°, 58′	54°, 47′ — 55°, 4′	6
(001) : (111)	52°, 19′	52°, 19′	52°, 15′ — 42°, 24′	6

Digitized by Google

Angolo	Calcolato	Media	Limiti dell'osservazione	N.
(111) : (110)	23°, 26′	23°, 29′	23°, 22′ — 23°, 34′	6
(001) : (110)	75°, 45′	75°, 45′	75°, 40′ — 76°, 8′	6
(001) : ($\bar{1}$11)	75°, 11′	75°, 11′	75° — 75°, 24′	12
($\bar{1}$11) : ($\bar{2}$21)	14°, 31′	14°, 31′	14°, 19′ — 14°, 47′	12
($\bar{2}$21) : ($\bar{3}$31)	4°, 56′ 1/2	5°, 6′	4°, 43′ — 5°, 30′	2
($\bar{3}$31) : ($\bar{1}$10)	9°, 36′ 1/2	8°, 39′	8°, 25′ — 8°, 53′	2
($\bar{2}$21) : ($\bar{1}$10)	14°, 33′	14°, 29′	14°, 17′ — 14°, 52′	14
(100) : (111)	49°, 51′ 1/2	49°, 49′	49°, 37′ — 49°, 59′	3
(111) : (011)	27°, 11′	27°, 25′	27°, 8′ — 27°, 59′	3
(100) : (011)	77°, 2′ 1/2	77°, 0′, 30″	77° — 77°, 1′	2
(011) : ($\bar{1}$22)	17°, 20′	17°, 32′	17°, 11′ — 17°, 53′	2
($\bar{1}$22) : ($\bar{2}$33)	5°, 45′ 1/2	5°, 22′	4°, 44′ — 6°	2
($\bar{2}$33) : ($\bar{1}$11)	10°, 50′	11°, 2′	10°, 46′ — 11°, 19′	2
(011) : ($\bar{1}$11)	33°, 55′ 1/2	33°, 46′	33°, 38′ — 33°, 55′	2
($\bar{1}$11) : ($\bar{1}$00)	69°, 2′	69°, 6′	69°, 4′ — 69°, 15′	4
(001) : (10$\bar{1}$)	50°, 46′	50°, 16′	49°, 35′ — 50°, 57′	2
(10$\bar{1}$) : ($\bar{1}$01)	76°, 38′	76°, 30′	76°, 27′ — 76°, 33′	2
(0$\bar{1}$1) : (01$\bar{1}$)	25°, 55′	25°, 56′	—	1
(1$\bar{1}$0) : ($\bar{1}$10)	70°, 4′	69°, 59′	69°, 23′ — 70°, 28′	3
(1$\bar{1}\bar{1}$) : ($\bar{1}$11)	41°, 56′	41°, 55′	41°, 43′ — 42°, 2′	5
(2$\bar{2}\bar{1}$) : ($\bar{2}$21)	57°, 31′	57°, 14′	57°, 5′ — 57°, 23′	2

Istituto Mineralogico della R. Università di Torino.
Giugno 1929 (VII).

L'Accademico Segretario
EMILIO REPOSSI.

Digitized by Google

Digitized by Google

INDICE

DEL VOLUME LXIV

ELENCO degli Accademici Nazionali residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 31 dicembre 1928 . . *Pag.* III

PRESIDENTI della Reale Accademia delle Scienze di Torino dalla sua fondazione . . . . . » V

MUTAZIONI avvenute nel Corpo accademico dal 1° gennaio al 31 dicembre 1927 . . . . . » XXIII

Relazione Premio Vallauri (1923-26) . . . . . » 210

Relazione della Commissione per il Premio di fondazione Gautieri - Storia (1925-1927) . . . . . » 266

Relazione della Commissione per il Premio di fondazione Gautieri - Filosofia (1924-1926) . . . . . » 274

ADUNANZE:

Sunti degli Atti verbali della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali . . . . . » 1, 46, 56, 66, 68, 95, 104, 144, 188, 217, 244, 262, 282, 316.

Sunti degli Atti verbali delle Classi Unite . . . . . » 43, 208, 210, 242, 279, 280, 314.

ALBENGA (Giuseppe). — A proposito di qualche formola approssimata per la trave inflessa e sollecitata assialmente . . . . » 235

ALIVERTI (G.). — Misure di radioattività atmosferica . . . » 97

AMERIO (A.), DE PASQUALE (O.), RICCA (V.). — Misure pireliometriche eseguite sull'Aspromonte . . . . . » 159

BOCCALATTE (Cesarina). — La Geometria basata sulle idee di punto e angolo retto . . . . . » 47

BURALI-FORTI (C.). — Una prima questione di balistica esterna » 146

CIBRARIO (Maria). — Proposizioni universali e particolari, e definizione di limite . . . . . » 319

COLOMBA (Luigi). — Osservazioni litologiche e mineralogiche sul giacimento di Castiglione (Traversella) . . . . . » 373

Digitized by Google

Colombo (Bonaparte). — Sulla propagazione delle onde sismiche in uno strato piano illimitato . . . . . *Pag.* 58
Colucci (Antonio). — Trattazione in grande del problema dei valori iniziali per le equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti . . . . . » 219
Debenedetti (Elsa). — Studio cristallografico dell'Epidoto del Giassett in Val d'Ala (Piemonte) . . . . . » 385
Ferrari (Carlo). — Sull'analogia fra i campi elettrici e i campi aerodinamici . . . . . » 190
Gennaro (Virginia). — Thomsonite e Scolecite dell'alta Valle di Ayas e delle Valli di Lanzo . . . . . » 133
Giua (Michele). — Ricerche sopra alcune reazioni di condensazione » 89
— e Racciu (Giovanni). — Ricerche sulla resinificazione. - I. Sulla condensazione dell'aldeide formica con l'uretano ordinario » 300
— — Influenza dei sostituenti sulla stabilità di alcuni composti ciclici . . . . . » 331
Grassi (Guido). — Sulla resistività dell'Alluminio . . . . » 248
Majorana (Quirino). — Attenuazione dissimmetrica di energia raggiante in un mezzo assorbente . . . . . » 359
Marseguerra (Vincenzo). — Sulle funzioni tayloriane . . . » 251
Mascarelli (Luigi). — Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati (e dei dinaftili, ecc.). Considerazioni sul grande numero di antipodi ottici privi di atomi asimmetrici, che ne possono derivare . . . . . » 31
Palazzo (A. M.). — Le lenticelle della radice del Morus . . » 197
Parona (C. F.). — Appunti per uno studio sulle *Spugne* del Permiano di Sicilia (Bacino del Sosio) . . . . . » 121
Pistolesi (Enrico). — Sul calcolo di resistenza delle eliche . » 283
Repossi (Emilio). — Studio mineralogico dei terreni agrari del Vercellese . . . . . » 335
Resegotti (Giuseppe). — Heulandite e Stilbite di Prascorsano presso Cuorgnè (Piemonte) . . . . . » 105
Sacco (Federico). — Nuovi dati di fatto riguardo l'età degli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino . . . . . » 11
Somigliana (Carlo). — Sulla misura della Terra e la gravimetria » 4
Tonolo (Angelo). — Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio S_4 . . . . . » 69
Zoia (Raffaello). — Nuovo procedimento per studiare le variazioni della resistenza all'urto su barrette intagliate dovute al fenomeno dell'invecchiamento . . . . . » 35
Zuffardi-Comerci (Rosina). — La fauna pliocenica di Masserano-Cossato (Biellese) . . . . . » 305

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913. 1 vol. in-4° di 70 pagg. e 96 tav.

Opere scelte di Amedeo Avogadro (per cura di **I. Guareschi**).

Torino, Unione tipografico-editrice torinese, 1911, 1 vol. in-4° (4 can., CXL-492 pp., 1 ritr.).

Miscellanea di studi danteschi. *Dante e il Piemonte.*

Torino, Fratelli Bocca editori, 1922, in-8° (VIII-648 pp.).

Digitized by Google

SOMMARIO

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 26 Maggio 1929 . *Pag.* 279
Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 9 Giugno 1929 . „ 280

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 9 Giugno 1929 . *Pag.* 282
Pistolesi (Enrico). — Sul calcolo di resistenza delle eliche . „ 283
Giua (Michele) e Racciu (Giovanni). — Ricerche sulla resinificazione. - I. Sulla condensaz. dell'aldeide formica con l'uretano ordinario . 300
Zuffardi-Comerci (Rosina). — La fauna pliocenica di Masserano-Cossato (Biellese) . . . . . „ 305

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 16 Giugno 1929 . *Pag.* 314

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 23 Giugno 1929 . *Pag.* 316
Cibrario (Maria). — Proposizioni universali e particolari, e definizione di limite . . . . . „ 319
Giua (Michele) e Racciu (Giovanni). — Influenza dei sostituenti sulla stabilità di alcuni composti ciclici . . . . . „ 331
Repossi (Emilio). — Studio mineralogico dei terreni agrari del Vercellese . . . . . „ 335
Majorana (Quirino). — Attenuazione dissimmetrica di energia raggiante in un mezzo assorbente . . . . . „ 358
Colomba (Luigi). — Osservazioni litologiche e mineralogiche sul giacimento di Castiglione (Traversella) . . . . . „ 373
Debenedetti (Elsa). — Studio cristallografico dell'Epidoto del Giassett in Val d'Ala (Piemonte) . . . . . „ 385

Tip. Vincenzo Bona - Torino

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 03546 5718

BOUND

JUN 29 1948

UNIV. OF MICH.
LIBRARY

Digitized by Google